

# 有限土体主动土压力计算

马 平, 秦四清, 钱海涛

(中国科学院 地质与地球物理研究所, 北京 100029)

**摘要:** 建立在半无限土体假定基础上的朗肯、库仑土压力理论并不适用于有限土体土压力的计算。根据实际情况, 建立有限土体土压力计算模型, 基于极限平衡理论及平面滑裂面假定, 在考虑土黏聚力及有限土体宽度的基础上, 推导有限土体滑裂面剪切破坏角的数学表达式, 并建立有限土体主动土压力计算公式。所建立的计算公式表明, 有限土体滑裂面剪切破坏角不再是库仑土压力理论给出的定值  $45^\circ + \varphi/2$ , 而是一个变量, 与计算深度、土内摩擦角、土黏聚力及有限土体宽度有密切关系。通过算例分析发现, 有限土体滑裂面剪切破坏角随深度增加成非线性增长; 而与土黏聚力和有限土体宽度成负相关; 随着土内摩擦角的增大, 剪切破坏角先是减小, 随后增大。最后, 将有限土体土压力计算结果与朗肯土压力进行对比, 证实了有限土体主动土压力计算公式的合理性。

**关键词:** 土力学; 有限土体; 主动土压力; 滑裂面; 黏聚力

**中图分类号:** TU 43

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2008)增 1 - 3070 - 05

## CALCULATION OF ACTIVE EARTH PRESSURE FOR LIMITED SOILS

MA Ping, QIN Siqing, QIAN Haitao

(*Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029*)

**Abstract:** With the development of underground engineering in cities, people pay more attention to the calculation of earth pressure for limited soils in foundation supporting projects. However, Rankine's and Conclom's theories based on semi-infinite space assumption are not suitable for calculating the earth pressure of limited soils. Based on the limit equilibrium theory and the hypothesis of planar sliding plane, a formula for calculating the angle of shear failure in limited soils is deduced with the consideration of cohesion force and the width of limited soils. And then, a formula is proposed to calculate the active earth pressure of limited soils exerted against the supporting system. The formula shows that the angle of shear failure of limited soils is no longer the one in Conclom's theory. And the angle of shear failure is no long equal to  $45^\circ + \varphi/2$ , but is a variable related to the width of limited soils, the cohesion of soil, the friction angle of soil and the depth. It is found that the angle of shear failure of limited soils increases nonlinearly with the increase of the depth, and decreases with the increase of the width of limited soils and the cohesion of soil. It is interesting that the angle of shear failure in limited soils decreases firstly with the increase of friction angle of soil, but latterly it will increase with the increase of friction angel of soil when it reaches to a certain degree. Finally the calculated results using the deduced formulas for the angle of shear failure and the active earth pressure of limited soils are analyzed by comparison with those of Rankine's theory. It proves the present formulas are reasonable.

**Key words:** soil mechanics; limited soils; active earth pressure; sliding plane; cohesion force

**收稿日期:** 2006 - 11 - 23; **修回日期:** 2007 - 03 - 24

**基金项目:** 国家重点基础研究发展规划(973)项目(2002CB412702)

**作者简介:** 马 平(1978 -), 男, 博士, 2001年毕业于西北大学地质学系地质学专业, 现为在站博士后, 主要从事岩土工程基础理论及工程应用方面的研究工作。E-mail: sanmacool@mail.iggcas.ac.cn

# 1 引 言

随着工程建设不断向地下空间发展, 城市建筑密度不断加大。在深基坑设计中, 拟开挖基坑往往距离已有的建筑物较近, 且大多数建筑物都存在地下室, 那么在已建建筑物地下室墙体与拟开挖基坑之间是有限宽度的土体(见图1)。此时, 作用在拟建基坑围护结构上的土压力属于有限土体土压力范畴。另外, 双排桩桩间土属于有限土体, 其作用在前排桩上的土压力也是有限土体土压力, 它的研究是双排桩设计研究的焦点<sup>[1~3]</sup>。对于有限土体土压力, 人们一般仍然采用经典朗肯土压力或库仑土压力的分布形式来计算。众所周知, 古典的朗肯或库仑土压力理论采用的是半无限土体的假设条件, 对于这种有限土体并不适合。已有一些学者<sup>[1, 4~7]</sup>对有限土体土压力的计算进行了初步研究, 指出采用经典的朗肯土压力理论或者库仑土压力理论进行有限土体土压力计算是不合适的。例如, 何颐华等<sup>[1]</sup>通过室内模型试验与工程实例, 得出双排桩支护中有限土体主动土压力的分布, 并提出了一种简化的土压力计算方法; 高印立<sup>[5, 6]</sup>采用极限分析法研究了有限范围土体土压力, 指出常规的朗肯土压力理论与利用极限分析法求得的有限土压力有一定的差异; 王文杰等<sup>[7]</sup>采用极限分析法求得的有限土体主动土压力小于朗肯理论计算的主动土压力。然而这些研究还存在一些问题, 主要问题是对计算模型进行了不符合实际的简化, 未考虑土黏聚力作用, 导致有限土体剪切破坏角的计算不甚合理, 并且均未给出已有构筑物对剪切破坏角的影响, 但土的黏聚力及滑裂面的形状对土压力分布有重要影响<sup>[8~10]</sup>, 它们是不容忽视的。鉴于此, 本文根据实际情况, 建立了有限土体土压力计算模型, 基于极限平衡理论及平面滑裂面假定, 在考虑土黏聚力的基础上,

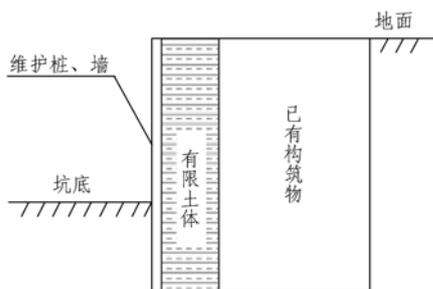


图 1 存在有限土体的基坑  
Fig.1 Foundation pit with limited soils

推导了有限土体滑裂面剪切破坏角的数学表达式, 研究了有限土体宽度、计算深度以及土力学参数与有限土体剪切破坏角之间的关系, 建立了有限土体主动土压力计算公式。通过算例, 将有限土体土压力计算结果与朗肯土压力进行对比, 证实了有限土体主动土压力计算公式的合理性。

# 2 计算模型

当墙背光滑, 坡顶水平时, 朗肯与库仑土压力理论得到的主动土压力计算时的剪切破坏角均为  $\theta = 45^\circ + \varphi/2$ , 剪切破坏角是个定值, 与深度无关(见图2(a))。然而, 当离基坑侧壁一定距离有已有构筑物存在时, 滑动土体的剪切破坏面不能剪穿已有构筑物, 此时朗肯与库仑土压力理论中的剪切破坏面不成立(见图2(b))。由此可以看出, 由于已有构筑物的存在, 使滑动土体不再是经典土压力理论中描述的三角形滑动体。因此, 不能采用经典的朗肯或库仑土压力理论计算有限土体产生的主动土压力, 需要发展新的有限土体土压力计算方法。

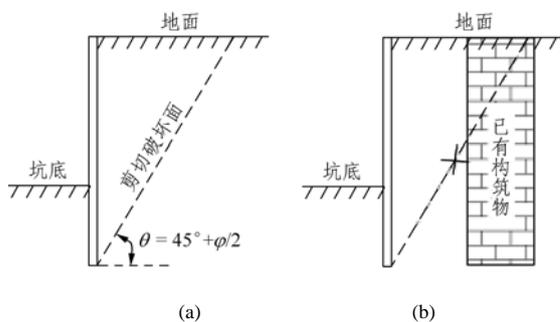


图 2 破坏模式分析  
Fig.2 Analysis of failure mode

假设: (1) 土体为刚塑性体, 不考虑土体与桩墙之间的摩擦力; (2) 已有构筑物埋深大于桩墙埋深; (3) 土体向支护结构滑动, 不考虑滑动土体与已有构筑物之间的摩擦力; (4) 有限土体为  $c, \varphi$  型均质土。则对于图 2(b)所示的有限范围土体的情况, 可以建立图 3 所示的土体受力计算模型。梯形滑动土体  $ABCD$  沿墙背  $DA$ 、滑裂面  $AB$  以及有限土体与已有构筑物分界面  $CB$  向下滑动, 在重力  $W$ 、桩墙抗力  $E$ 、下部不动土体反力  $R$  以及下部土体对上部土体的黏结力  $K$  作用下, 处于极限平衡状态。桩墙抗力  $E$  与有限土体作用在支护结构上的土压力大小相等、方向相反。

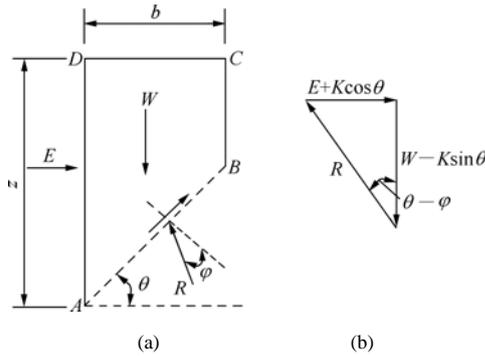


图3 土压力计算简图

Fig.3 Diagram of earth pressure computing

### 3 基本方程

根据极限平衡原理，梯形滑动土体abcd每延米土体重力W可表示为

$$W = \gamma b \left( z - \frac{b}{2} \tan \theta \right) \quad (1)$$

式中： $\gamma$ 为土的重度(kN/m<sup>3</sup>)； $b$ 为已有构筑物距基坑的距离，即有限土体宽度(m)； $z$ 为计算点深度(m)； $\theta$ 为滑动破坏面与水平面的夹角(°)。

剪切破坏面下部不动土体对上部滑动土体的黏结力K可表示为

$$K = \frac{b}{\cos \theta} c \quad (2)$$

W的方向垂直向下；K的方向与滑裂面平行且向斜上方；R与土体内摩擦角 $\phi$ 有关，大小未知，方向已知，其方向与滑裂面的法线成 $\phi$ 角。将K分解为垂直与水平方向的力，因滑体ABCD处于平衡状态，则垂直方向力(W与K的垂直分量)、水平方向力(E与K的水平分量)与R三力共点，即可形成图3(b)所示的封闭力三角形。则土压力合力E可表示为

$$E = \left[ \gamma b \left( z - \frac{b}{2} \tan \theta \right) - bc \tan \theta \right] \tan(\theta - \phi) - bc \quad (3)$$

土压力强度e的微分表达式为

$$e = \frac{dE}{dz} \quad (4)$$

### 4 破坏面

极限平衡理论求解土压力问题的关键在于确定破坏面。对于经典的朗肯土压力理论与库仑土压力理论中的三角形滑动体而言，按照极限平衡理论导

出的破坏面与深度无关，破坏面与水平面的夹角始终为 $45^\circ + \phi/2$ (主动土压力)。从式(3)可以看出，对于土体边界条件不同于经典理论的有限土体土压力E直接受滑动破坏面 $\theta$ 的影响。

当深度z一定时，E为剪切破坏角 $\theta$ 的函数。按照极限平衡理论，当 $dE/d\theta = 0$ 时，E取极值 $E_a$ ，即为主动土压力合力，并可求得产生主动土压力 $E_a$ 时的剪切破坏角 $\theta'$ 值。式(3)对 $\theta$ 求导可得

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\theta} = & \gamma b z [1 + \tan^2(\theta - \phi)] - \frac{1}{2} \gamma b^2 (1 + \tan^2 \theta) \cdot \\ & \tan(\theta - \phi) - \frac{1}{2} \gamma b^2 [1 + \tan^2(\theta - \phi)] \tan \theta - \\ & bc(1 + \tan^2 \theta) \tan(\theta - \phi) - \\ & bc \tan \theta [1 + \tan^2(\theta - \phi)] \end{aligned} \quad (5)$$

令 $dE/d\theta = 0$ ，可以求得

$$\begin{aligned} \theta' = \text{atan} \left\{ \frac{1}{2(\gamma b \tan \phi + 2c \tan \phi)} \left[ -2\gamma b - \right. \right. \\ \left. \left. 4c + 2(\gamma^2 b^2 + 4\gamma bc + 4c^2 + 2\gamma^2 bz \tan^3 \phi + \right. \right. \\ \left. \left. 2\gamma^2 bz \tan \phi + \gamma^2 b^2 \tan^2 \phi + 4\gamma bc \tan^2 \phi + \right. \right. \\ \left. \left. 4\gamma zc \tan^3 \phi + 4\gamma zc \tan \phi + 4c^2 \tan^2 \phi)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

从式(6)可以看出，由于已有构筑物的存在，使产生主动土压力时的滑动土体剪切破坏角 $\theta'$ 不再是一般朗肯土压力理论所给出的定值 $45^\circ + \phi/2$ ，而是一个变量，与土体物理力学性质、有限土体宽度以及深度有关，其一般表达式为

$$\theta' = f(\phi, b, z, \gamma, c) \quad (7)$$

根据式(6)所求得剪切破坏角 $\theta'$ 与z, b, c,  $\phi$ 的关系曲线分别如图4~7所示。其中，当计算 $\theta'$ 与z的关系时，取 $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ,  $c = 15 \text{ kPa}$ ,  $\phi = 20^\circ$ ,  $b = 3 \text{ m}$ ；当计算 $\theta'$ 与b的关系时，取 $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ,  $c = 15 \text{ kPa}$ ,  $\phi = 20^\circ$ ,  $z = 10 \text{ m}$ ；当计算 $\theta'$ 与c的关系时，取 $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ,  $z = 10 \text{ m}$ ,  $\phi = 20^\circ$ ,  $b = 3 \text{ m}$ ；当计算 $\theta'$ 与 $\phi$ 的关系时，取 $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ,  $z = 10 \text{ m}$ ,  $c = 15 \text{ kPa}$ ,  $b = 3 \text{ m}$ 。

图4表明，随着深度的增加，剪切破坏角成非线性增长。图5, 6表明，有限土体宽度和土黏聚力与剪切破坏角均成负相关。图7表明，随着土内摩擦角的增大，剪切破坏角先是减小，随后增大。

由此可见，有限土体主动土压力剪切破坏角是个不确定值，它与计算深度、土内摩擦角、土黏聚力及有限土体宽度有密切关系。在进行有限土体主动土压力计算时，必须考虑这些影响因素。

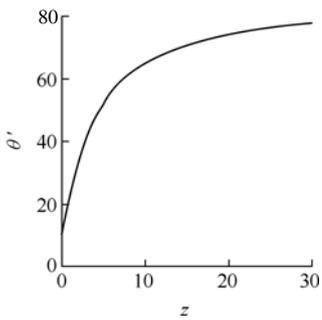


图 4  $\theta'$ 与 $z$ 的关系曲线

Fig.4 Relation curve between  $\theta'$  and  $z$

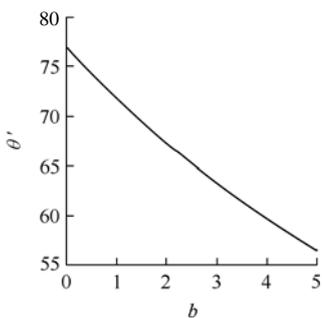


图 5  $\theta'$ 与 $b$ 的关系曲线

Fig.5 Relation curve between  $\theta'$  and  $b$

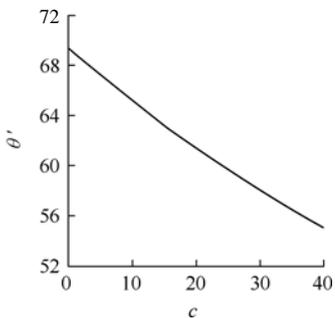


图 6  $\theta'$ 与 $c$ 的关系曲线

Fig.6 Relation curve between  $\theta'$  and  $c$

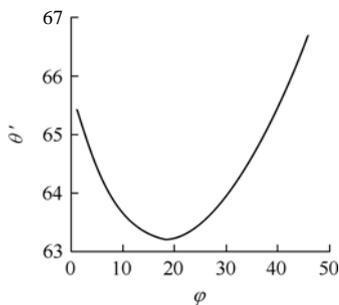


图7  $\theta'$ 与 $\varphi$ 的关系曲线

Fig.7 Relation curve between  $\theta'$  and  $\varphi$

### 5 主动土压力强度

将式(6)代入式(3), 即可得到总主动土压力  $E_a$ 。剪切破坏角  $\theta'$  随深度  $z$  变化使主动土压力强度  $e_a$  不

再随深度线性分布, 因此很难根据式(4)求得主动土压力强度的表达式, 即  $dE_a/dz$  的表达式。但可以采用差分的形式进行主动土压力强度计算, 将式(4)写成差分的形式, 即

$$e_{a|z=\frac{z_1+z_2}{2}} = \frac{\Delta E_a}{\Delta z} = \frac{E_{a|z=z_2} - E_{a|z=z_1}}{z_2 - z_1} \quad (8)$$

然而, 式(8)只适合于滑动破坏土体为梯形的情况, 如若计算深度较小, 有限土体宽度足够宽, 剪切破坏土体为三角形时, 仍然需采用经典的土压力理论进行土压力强度计算。

(1) 当  $z \leq b \tan(45^\circ + \varphi/2)$  时, 剪切破坏面通过地面, 此时破坏模式与经典的主动土压力破坏模式相同, 则依照朗肯理论, 主动土压力强度可表示为

$$e_a = \gamma z \tan^2(45^\circ - \varphi/2) - 2c \tan(45^\circ - \varphi/2) \quad (9)$$

(2) 当  $z > b \tan(45^\circ + \varphi/2)$  时, 桩墙后的剪切破坏土体为梯形体(见图 3), 此时先根据式(6)计算剪切破坏角, 然后代入式(3)计算总土压力, 再依据式(8)进行主动土压力强度计算。

### 6 实 例

取土重度  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ 、土的黏聚力  $c = 0 \text{ kPa}$ 、内摩擦角  $\varphi = 30^\circ$ ; 计算深度  $H = 15 \text{ m}$ ; 有限土体宽度  $b = 0.1H, 0.2H, 0.3H, 0.4H, 0.5H$ (当  $b \tan(45^\circ + \varphi/2) > H$  时, 已经不属于有限土体范畴)。根据式(3), (6), (8)计算得到各有限土体宽度时主动土压力如图 8 所示, 图中  $R$  为朗肯土压力计算结果。

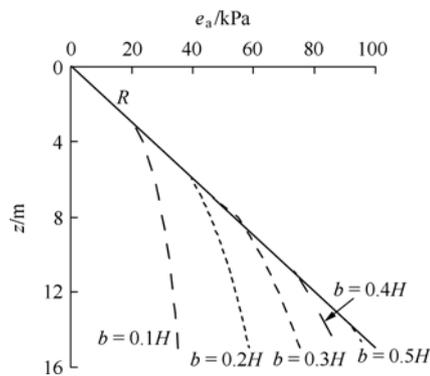


图 8 不同宽度时有限土体主动土压力

Fig.8 Active earth pressures for limited soil with different widths

从图 8 中可以看出, 2 种计算方法得到的土压力强度曲线存在明显差别, 朗肯主动土压力大于有限土体主动土压力, 深度越大, 差别越大; 而且有

限土体主动土压力与深度为非线性的关系,有别于朗肯土压力的线性关系。计算结果还表明,有限土体宽度越小,有限土体主动土压力越小;有限土体宽度趋于0时,有限土体土压力也趋于0;随着有限土体宽度的增加,有限土体土压力逐渐向朗肯土压力逼近。可见,有限土体土压力计算符合工程实际情况。

## 7 结 论

本文通过有限土体主动土压力计算模型的建立以及有限土体滑裂面剪切破坏角的求解,推求了有限土体主动土压力计算公式,得到了以下主要结论。

(1) 有限土体主动土压力剪切破坏角不是定值 $45^\circ + \varphi/2$ ,它与计算深度、土内摩擦角、土黏聚力及有限土体宽度有密切关系。

(2) 有限土体主动土压力小于朗肯主动土压力,并且有限土体主动土压力强度与深度为非线性关系。

### 参考文献(References):

- [1] 何颐华, 杨 斌, 金宝森, 等. 双排护坡桩试验与计算的研究[J]. 建筑结构学报, 1996, 17(2): 58 - 66.(HE Yihua, YANG Bin, JIN Baosen, et al. Studies on test and calculation for double row piles[J]. Journal of Building Structures, 1996, 17(2): 58 - 66.(in Chinese))
- [2] 李克忠. 双排支护桩结构分析[J]. 公路与汽运, 2004, (2): 88 - 90.(LI Kezhong. Analysis of double row piles supporting structure[J]. Highways and Automotive Applications, 2004, (2): 88 - 90.(in Chinese))
- [3] 周翠英, 刘祚秋, 尚 伟, 等. 门架式双排抗滑桩设计计算新模式[J]. 岩土力学, 2005, 26(3): 441 - 444.(ZHOU Cuiying, LIU Zuoqiu, SHANG Wei, et al. A new mode for calculation of portal double row anti-sliding piles[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(3): 441 - 444.(in Chinese))
- [4] 谢小荣, 张可能, 许宏武. 极限分析法计算有限土体主动土侧压力[J]. 西部探矿工程, 2005, 17(9): 22 - 23.(XIE Xiaorong, ZHANG Keneng, XU Hongwu. Calculation of lateral active earth pressure for limited soils by limit analysis method[J]. West-China Exploration Engineering, 2005, 17(9): 22 - 23.(in Chinese))
- [5] 高印立. 有限土体土压力的计算探讨[J]. 建筑科学, 2000, 16(5): 53 - 56.(GAO Yinli. The calculation of finite earth pressure[J]. Building Science, 2000, 16(5): 53 - 56.(in Chinese))
- [6] 高印立. 极限分析法计算有限范围土体土压力[J]. 建筑结构, 2001, 31(8): 66 - 68.(GAO Yinli. Calculation of finite earth pressure by limit analysis[J]. Building Structures, 2001, 31(8): 66 - 68.(in Chinese))
- [7] 王文杰, 曾进群, 陈小丹. 深基坑开挖中有限土体土压力计算方法探讨[J]. 岩土工程界, 2004, 8(3): 30 - 31.(WANG Wenjie, ZENG Jinqun, CHEN Xiaodan. Discussion on calculation method for earth pressure of limited soils in deep foundation pit[J]. Geotechnical Engineering Word, 2004, 8(3): 30 - 31.(in Chinese))
- [8] 陈昌富, 曾玉莹, 肖淑君, 等. 基于CSA和薄层单元法主动土压力计算方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(增2): 5 292 - 5 296.(CHEN Changfu, ZENG Yuying, XIAO Shujun, et al. Calculation method of active earth pressure based on CSA and thin layer element method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(Supp.2): 5 292 - 5 296.(in Chinese))
- [9] 年廷凯, 栾茂田. 均布荷载作用下挡土墙后黏性填土的土压力计算[J]. 岩土力学, 2002, 23(1): 17 - 22.(NIAN Tingkai, LUAN Maotian. Earth pressure computations of cohesive backfill with inclined surface under surcharge by limit analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, 23(1): 17 - 22.(in Chinese))
- [10] 李巨文, 王 孙, 梁永朵, 等. 挡土墙后黏性填土的主动土压力计算[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(5): 650 - 652.(LI Juwen, WANG Sun, LIANG Yongduo, et al. Computation of earth pressure of cohesive backfill on retaining wall[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(5): 650 - 652.(in Chinese))