计算索末菲尔德型积分的新方法——球面波级数展开法 [1]

江滨浩 刘永坦

(哈尔滨工业大学 哈尔滨 150001)

摘 要 利用广义阻抗边界条件模拟和简化地球表面对电磁场的影响. 应用圆柱波函数的球面波展开表达式, 地平面上方水平电偶极子电磁场中的索末菲尔德型积分可表达成快速、绝对收敛的球面波展开式. 利用积分路径的变换和超几何函数理论, 展开式中的展开系数可表达成以大地表面复阻抗为宗量的第二类勒让德函数. 该展开式数学物理意义明显, 并且十分便于数值计算. 该文给出的方法是求解下索末菲尔德半空间问题的精确、有效解析方法.

关键词 电磁场理论, 索末菲尔德型积分, 广义阻抗边界条件, 球面波展开

中图号 O441, O173

1 引 言

在研究近地天线、地波传播、水下通讯、地球物理勘探和用频域法求解时域电磁波散射等理论和实际问题时, 都需要解决索末菲尔德 (Sommerfeld) 型积分 (简称 SD 积分) 的计算问题. 如何精确、有效地解决 SD 积分一直是各国学者研究的课题, 近年来仍有不少学者对这一课题进行着深入的研究 [1-6] .

本文利用广义阻抗边界条件来简化地平面上方电磁场边值问题的求解. 在此边界条件下, 地平面上方水平电偶极子电磁场能够分解成偶极源的直达波、镜像源的反射波和 SD 积分. 利用圆柱波函数和球面波函数的转换关系, SD 积分被表达成绝对、快速收敛的球面波展开式. 应用积分路径的变换和超几何函数理论, 展开式中的展开系数被表达成以大地归一表面阻抗为复宗量的第二类勒让德 (Legendre) 函数. 相对阻抗边界条件, 该展开式是精确的解析表达式, 它适合于任意场点和源点的位置; 展开式中的球贝塞尔函数、勒让德多项式和展开系数既便于数学计算, 又有明显的数学物理意义. 本文的结果能够为相关的电磁场问题的研究提供准确、方便的解析表达式.

2 索末菲尔德半空间问题的描述

建立圆柱坐标系 (ρ,φ,z) 使得 $z=0$ 平面为媒质的分界面. 上半空间 $(z>0)$ 是空气, 物性参数为 $(\varepsilon_0,\mu_0;k_0)$; 下半空间 $(z<0)$ 是大地, 这里假设大地是均匀的导电媒质或水平分层媒质. 单位谐振电流元 (电偶极子) 位于上半空间 $(0,0,h)$ 处; 场点位于上半空间 (ρ,φ,z) 处. 不失一般性, 设电偶极子的极轴沿 x 轴取向 (水平电偶极子) . 可引用电型和磁型赫兹矢量的 z 分量 ($\prod_e=\prod_e\hat{z}$, $\prod_m=\prod_m\hat{z}$)[7] 来描述电磁场的分布. 应用傅里叶-贝塞尔变换, $(\prod_e,\prod_m)$ 可以表示成如下连续谱的积分表达式 [7] :

$$\prod_e=\frac{1}{4\pi i\varepsilon_0\omega}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{1}{\lambda}[\delta_\pm e^{-u|z-h|}+R_e(\lambda)e^{-u|z+h|}]J_0(\lambda\rho)\mathrm{d}\lambda \tag{1a}$$

$$\prod_m=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty\frac{1}{u\lambda}[\delta_\pm e^{-u|z-h|}+R_m(\lambda)e^{-u|z+h|}]J_0(\lambda\rho)\mathrm{d}\lambda \tag{1b}$$

[1] 2001-07-29 收到, 2002-06-17 改回

式中 $\delta_{\pm}=\mathrm{sgn}(z-h)$(符号函数)，$u=\sqrt{\lambda^2-k_0^2}$，$J_0(\lambda\rho)$ 是零阶贝塞尔函数，$R_{e,m}(\lambda)$ 是谱密度函数的反射系数．时间因子取为 $e^{i\omega t}$．(1) 式中的被积函数代表外向行波；为了使积分满足辐射条件并具有收敛性，积分路径的选取必须满足条件 $\mathrm{Re}(u)\geq 0$ 和 $\mathrm{Im}(u)\geq 0$．

在 $z=0$ 平面上，广义阻抗边界条件可写成 [8-10]

$$\prod_{\gamma=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial z}-ik_0\Gamma_\gamma^e\right)E_z=0,\quad \prod_{\gamma=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial z}-ik_0\Gamma_\gamma^m\right)H_z=0 \tag{2}$$

式中 Γ_γ^e 和 Γ_γ^m 是已知的复常量．随着 N(称为阻抗边界条件的阶数) 的增大．边界条件 (2) 式的适应程度和模拟效果将明显增强．当 $N=1$ 且 $\Gamma_1^e=(\Gamma_1^m)^{-1}$ 时，(2) 式退化成众所周知的阻抗 (即 Leomtoroch) 边界条件：$\hat{z}\times\boldsymbol{E}=\Gamma_1^e\hat{z}\times(\hat{z}\times\boldsymbol{H})$．应用阻抗边界条件 (2) 式，我们得到

$$R_{e,m}=(-1)^{N+1}\prod_{\gamma=1}^{N}\left[\frac{u-ik_0\Gamma_\gamma^{e,m}}{u+ik_0\Gamma_\gamma^{e,m}}\right]=(-1)^{N+1}\left[1+\sum_{\gamma=1}^{N}B_\gamma^{e,m}\frac{u-ik_0\eta_{e,m}}{\lambda^2-k_0(1-\eta_{e,m}^2)}\right] \tag{3}$$

这里 B_γ^e 和 B_γ^m 可用待定系数法分别用 $ik_0\Gamma_\gamma^e$ 和 $ik_0\Gamma_\gamma^m$ 来表示，并简记 $\Gamma_\gamma^{e,m}=\eta_{e,m}$．将 (3) 式代入到 (1) 式中，我们得到

$$\prod_e=\frac{1}{4\pi i\varepsilon_0\omega k_0}\frac{\partial}{\partial z}\left\{k_0[G_e(z-h)-(-1)^{N+1}G_e(z+h)]\right.$$
$$\left.+\frac{i\cos\varphi}{2k_0^2}(-1)^N\sum_{\gamma=1}^{N}B_\gamma^e\left(\frac{\partial}{\partial z}-ik_0\eta_e\right)\mathrm{SD}_r^e\right\} \tag{4a}$$

$$\prod_m=\frac{-1}{4\pi}\left\{k_0[G_m(z-h)+(-1)^{N+1}G_m(z+h)]\right.$$
$$\left.-\frac{i\sin\varphi}{2ik_0^2}(-1)^{N+1}\sum_{\gamma=1}^{N}B_\gamma^m\left(\frac{\partial}{\partial z}+ik_0\eta_m\right)\mathrm{SD}_r^m\right\} \tag{4b}$$

式中

$$G_e(z\pm h)=\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{1}{u\lambda}e^{-u|z\pm h|}J_0(\lambda\rho)\mathrm{d}\lambda \tag{5a}$$

$$G_m(z\pm h)=\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty\frac{1}{u\lambda}e^{-u|z\pm h|}J_0(\lambda\rho)\mathrm{d}\lambda \tag{5b}$$

$$\mathrm{SD}_\gamma^{e,m}=-2ik_0^2\int_0^\infty\frac{1}{u}e^{-u(z+h)}J_1(\lambda\rho)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2-k_0^2(1-\eta_{e,m}^2)} \tag{6}$$

式中 $J_1(\lambda\rho)$ 是一阶贝塞尔函数．

首先利用指数积分函数 [2]，(5) 式可以改写成

$$G_e(z\pm h)=-i\cos\varphi\frac{e^{-ik_0r_\pm}}{\rho},\quad G_m(z\pm h)=-i\sin\varphi\frac{e^{-ik_0r_\pm}}{\rho} \tag{7}$$

式中 $r_\pm = [\rho^2 + (z \pm h)^2]^{1/2}$. 显然，$G_{e,m}(z-h)$ 和 $G_{e,m}(z+h)$ 可以解释为 $z=h$ 处偶极源的直达波和 $z=-h$ 处镜像源的反射波.

3 SD 积分的球面波展开式

一般来说，对于无界空间，直角坐标系和柱坐标系中的赫姆霍兹 (Helmholtz) 方程的解答是连续谱. 然而，在球坐标系中，即使是对于无界空间，所得解答仍是离散谱. 通常，离散级数的求和比求积分要简单一些. 因此，在各种波型展开法中，球面波展开法应用较多. 这种方法能否成功取决于计算展开式系数时所遇到的困难.

引入变换：$\lambda = k_0 \sin\beta$, $u = ik_0\cos\beta$; $(z+h+i\Delta/k_0) = r_\Delta \cos\theta_\Delta$, $\rho = r_\Delta \sin\theta_\Delta$; 这里 Δ 是微小的正实数；(6) 式可以改写成

$$\mathrm{SD}_\gamma^{e,m} = \lim_{\Delta\to 0_+}\int_{L_{1,4}} e^{-\Delta\cos\beta} e^{-ik_0 r_\Delta \cos\theta_\Delta\cos\beta} J_1(k_0 r_\Delta \sin\theta_\Delta \sin\beta)\frac{2\mathrm{d}\beta}{\cos^2\beta - \eta_{e,m}^2} \tag{8}$$

积分路径 L_1 或 L_4 位于 β-复平面的条状区域 $[0 \le \mathrm{Re} \le \pi/2, I_m(\beta) \ge 0]$ 内，路径 L_1 和 L_4 分别从原点延伸至无限远处 $(\pi/2 + i\infty)$ 和 $(\pi/2 - i\infty)$. 再应用圆柱波函数的球面波展开式 [11] :

$$e^{-ik_0 r_\Delta\cos\theta_\Delta\cos\beta} J_1(k_0 r_\Delta\sin\theta_\Delta\sin\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1}(-1)^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} P_n^1(\cos\beta) P_n^1(\cos\theta_\Delta) j_n(k_0 r_\Delta) \tag{9}$$

式中 $P_n^1(\cdot)$ 是一阶 n 次连带勒让德多项式，$j_n(\cdot)$ 是 n 阶球贝塞尔函数，(8) 式可以改写成

$$\mathrm{SD}_\gamma^{e,m} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} C_n(\eta_{e,m}) P_n^1(\cos\theta_+) j_n(k_0 r_+) \tag{10}$$

式中

$$C_n(\eta_{e,m}) = -i \lim_{\Delta\to 0_+}\int_{L_{1,4}} e^{-\Delta\cos\beta} P_n^1(\cos\beta)\frac{2\mathrm{d}\beta}{\cos^2\beta - \eta_{e,m}^2} \tag{11}$$

$\theta_+ = \arctan\lfloor \rho(z+h)^{-1} \rfloor$. 应用积分变量、积分路径的变换和超几何函数的理论 (见附录)，我们推导出

$$C_n(\eta_{e,m}) = \frac{2(-1)^{n+1}}{\eta_{e,m}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta_{e,m}} Q_n(\eta_{e,m}) \tag{12}$$

式中 $Q_n(\eta_{e,m})$ 是零阶第二类 n 次连带勒让德函数.

现在考虑级数 (9) 式的收敛性. 首先引入不等式 [12]:

$$|P_n^1(\cos\theta_+)| \le \sqrt{\frac{8}{\pi n}}(n+1)(\sin\theta_+)^{-3/2}, \quad |j_n(k_0 r_+)| \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{k_0 r_+}{2}\right]^n [\Gamma(n+\frac{3}{2})]^{-1} \tag{13}$$

式中 $\Gamma(\cdot)$ 式伽马 (gamma) 函数. 再由关系式 [12] :

$$Q_n(\eta_{e,m}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(\xi)}{\xi - \eta_{e,m}}\mathrm{d}\xi, \qquad |P_n(\xi)| < 1, \quad -1 \le \xi \le 1 \tag{14}$$

可以得到

$$|Q_n(\eta_{e,m})| \le \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\eta_{e,m}}{1+\eta_{e,m}}\right| \tag{15}$$

从不等式 (13) 式和 (15) 式, 可以看出随着 n 的增大, 级数 (9) 式通项的递减速度将快于 $\Phi^n[\Gamma(n+1/2)n^{3/2}]^{-1}$ 量级的递减速度，这里 Φ 是 $|k_0r_+\cos\theta_+|$ 的最大值上限. 这表明级数 (9) 式是 SD 积分绝对收敛的球面波展开式. 实际计算结果表明，对任意参量 $(k_0r_+,\cos\theta_+,\eta_{e,m})$ ， $n\ge 10$ 后的级数项对 SD 积分的贡献小于 1% . 实际应用中只取前有限项就可有效、准确地计算 SD 积分. 展开式中的每一项可以解释为位于 $z=-h$ 处相应 “波源” 在 $z>0$ 半空间产生的球面波. 其中 $j_n(k_0r_+)$ 代表着沿径向方向上的驻波， $P_n^1(\cos\theta_+)$ 反映了场在以 r_+ 为半径球面上正负交替的周期性变化，标号 n 确定了波节线的数目，展开系数 (12) 式可看成 “波源” 的 “强度” 来直接反映常阻抗边界面对场的影响. 另一方面，级数展开式中的球贝塞尔函数和勒让德函数均可表示为初等函数 [12]

4 结 束 语

本文已给出了地平面上方水平电偶极子电磁场的精确解析表达式. 位函数 $(\prod_e,\prod_m)$ 中的 SD 积分已被表达成球面波展开式 (9) 式，其中的展开系数是以地球归一表面阻抗为复宗量的第二类勒让德函数 (12) 式. 该展开式的主要特点是: (1) 它们相对广义阻抗边界条件 (2) 式是精确的表达式，适合于任意场点和源点的位置； (2) 它们具有绝对、快速的收敛性质 (通项递减的速度快于 $[n^{3/2}\Gamma(n+1/2)]^{-1}$ 量级递减的速度)，并且展开系数便于计算； (3) 展开式中的球贝塞尔函数 $j_n(k_0r_+)$ 和勒让德多项式 $P_n^1(\cos\theta)$ 数学物理意义明显，并且便于计算. 由于水平电偶极子电磁场的表达式包含着垂直电偶极子场的表达式，磁流元的情况与电流元的情况类似. 因此，本文给出的方法是求解地平面上方任意取向电、磁偶极子电磁场的精准、有效的解析方法.

附 录

(11) 式可改写成 $C_n(\eta_{e,m})=(C_n^- - C_n^+)/2\eta_{e,m}$ 式中

$$C_n^{\pm} = -i\lim_{\Delta\to 0_+}\int_{L_{1,4}} e^{-\Delta\cos\beta}P_n^1(\cos\beta)\frac{2\mathrm{d}\beta}{\cos\beta\pm\eta_{e,m}} \tag{A-1}$$

当被积函数中 $(\cos\beta\pm\eta_{e,m})^{-1}$ 的极点 (标记为 β_p^+) 可能位于 $[0<\mathrm{Re}(\beta)<\pi/2, \mathrm{Im}(\beta)>0]$ 的区域内，积分路径应选择曲线 L_4 ；当极点 (标记为 β_p^-) 可能位于 $[0<\mathrm{Re}(\beta)<\pi/2, \mathrm{Im}(\beta)<0]$ 的区域内，积分路径应选择曲线 L_1 . (A-1) 式的积分路径可以作适应的变形，我们有

$$C_n^{+} = -i\lim_{\Delta\to 0_+}\left[\int_0^{\pm i\infty}+\int_{L_{1,4}^{\infty}}\right] e^{-\Delta\cos\beta}P_n^1(\cos\beta)\frac{2\mathrm{d}\beta}{\cos\beta+\eta_{e,m}} \tag{A-2}$$

可以证明， (A-2) 式中的第二个积分为零. 再依次进行变量变换 $\beta=i\alpha$ 和 $(\sin h\alpha)^2=\tau$, (A-2) 式能够改写成

$$C_n^{+} = \lim_{\Delta\to 0_+}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\Delta\sqrt{1+\tau}}}{\sqrt{\tau(1+\tau)}(\sqrt{1+\tau}+\eta_{e,m})}P_n^1(\sqrt{1+\tau})\mathrm{d}\tau \tag{A-3}$$

类似，有

$$C_n^- = \lim_{\Delta\to 0_+}\int_0^\infty \frac{e^{-\Delta\sqrt{1+\tau}}}{\sqrt{\tau(1+\tau)}(\sqrt{1+\tau}-\eta_{e,m})}P_n^1(\sqrt{1+\tau})\mathrm{d}\tau \tag{A-4}$$

再将 (A-3) 式和 (A-4) 式合并，有

$$C_n(\eta_{e,m}) = \lim_{\Delta\to 0_+}\int_0^\infty \frac{e^{-\Delta\sqrt{1+\tau}}}{\sqrt{\tau(1+\tau)}(\tau+\Phi_{e,m})}P_n^1(\sqrt{1+\tau})\mathrm{d}\tau \tag{A-5}$$

式中 $\Phi_{e,m}=1-\eta_{e,m}^2$. 可以看出 (A-5) 式中的积分对任意复数 $\eta_{e,m}^2$ 均是收敛的.

利用公式 [13,p194,304]:

$$\frac{1}{\tau+\Phi_{e,m}} = \int_0^\infty e^{-(\tau+\Phi_{e,m})s}\mathrm{d}s \tag{A-6}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-s\tau}}{\sqrt{\tau(1+\tau)}}P_n^1(\sqrt{1+\tau})\mathrm{d}\tau = 2s^{-1/4}e^{s/2}W_{\frac14,\frac n2+\frac14}(s) \tag{A-7}$$

$$e^{s/2}W_{\frac14,\frac n2+\frac14}(s) = s^{(2n+3)/4}U(\frac n2+\frac12,n+\frac32;s) \tag{A-8}$$

式中 $W_{\frac14,\frac n2+\frac14}(s)$ 和 $U(\frac n2+\frac12,n+\frac32;s)$ 分别是 Whittaker 函数和 Tricomi 函数 (统称为合流超几何函数)，(A-5) 式可以改写成

$$C_n(\eta_{e,m}) = 2\int_0^\infty s^{(n+1)/2}e^{-\Phi_{e,m}s}U(\frac n2+\frac12,n+\frac32;s)\mathrm{d}s \tag{A-9}$$

依次应用关系式 [14,13,p47,41]:

$$\int_0^\infty e^{-\Phi_{e,m}s}s^{b-1}U(a,c;s)\mathrm{d}s = \frac{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a+b-c+1)} \times \Phi_{e,m}^{-b}{}_2F_1(a,b;a+b-c+1;1-\Phi_{e,m}^{-1}) \tag{A-10}$$

$${}_2F_1(a,b;\gamma;\xi) = (1-\xi)^{-b}{}_2F_1[\gamma-a,b;c;\xi(\xi-1)^{-1}] \tag{A-11}$$

$${}_2F_1(a,b;\gamma;\xi) = \frac{\gamma-1}{(a-1)(b-1)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}{}_2F_1(a-1,b-1;\gamma-1;\xi) \tag{A-12}$$

式中 ${}_2F_1(a,b;\bullet;\bullet)$ 是高斯超几何函数，我们得到

$$C_{2n+1}(\eta_{e,m}) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(-n-\frac12)}{\sqrt{\pi}\eta_{e,m}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta_{e,m}}{}_2F_1(n+1,-n-\frac12;\frac12;\eta_{e,m}^2) \tag{A-13}$$

$$C_{2n}(\eta_{e,m}) = \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(-n)}{\sqrt{\pi}\eta_{e,m}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta_{e,m}}{}_2F_1(n+\frac12;-n;\frac12;\eta_{e,m}^2) \tag{A-14}$$

对于 $C_{2n+1}(\eta_{e,m})$，应用关系式 [13,p52,64]:

$${}_2F_1(a,b;\frac12;\eta_{e,m}^2) = \Gamma(a+\frac12)\Gamma(b+\frac12)\frac{(\eta_{e,m}^2-1)^{(1-2a-2b)/4}}{\sqrt{\pi}2^{3/2-a-b}} \times [P_{a-b-1/2}^{1/2-a-b}(\eta_{e,m})+P_{a-b-1/2}^{1/2-a-b}(-\eta_{e,m})] \tag{A-15}$$

$$e^{\pm i\pi l}P_l(\eta_{e,m}) - P_l(-\eta_{e,m}) = \frac{2}{\pi}\sin(\pi l)Q_l(\eta_{e,m}) \tag{A-16}$$

我们得到

$$C_{2n+1}(\eta_{e,m}) = \frac{2}{\eta_{e,m}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta_{e,m}}Q_{2n+1}(\eta_{e,m}) \tag{A-17}$$

对于 $C_{2n}(\eta_{e,m})$ ，应用公式 [13,p41]:

$$_2F_1(a,b;\gamma;\xi) = \frac{1}{(a-1)}\xi^{2-a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}[\xi^{a-1}{}_2F_1(a-1,b;\gamma;\xi)] \tag{A-18}$$

和 (A-15) 式、 (A-16) 式，整理得到

$$\begin{aligned} C_{2n}(\eta_{e,m}) = & \frac{-1}{\eta_{e,m}(n+1)(2n+1)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta_{e,m}} \\ & \times\left\{\eta_{e,m}^{2n+3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta_{e,m}}\left[\eta_{e,m}^{-2n-2}\sqrt{\eta_{e,m}^2-1}Q_{2n+1}^1(\eta_{e,m})\right]\right\} \end{aligned} \tag{A-19}$$

再利用勒让德函数的递推关系式 [24,p165] ， (A-19) 式能够进一步改写成

$$C_{2n}(\eta_{e,m}) = -\frac{2}{\eta_{e,m}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta_{e,m}}Q_{2n}(\eta_{e,m}) \tag{A-20}$$

最后，将 (A-17) 式和 (A-20) 式合并整理就可以得到 (12) 式。

参 考 文 献

[1] P. Giuseppe, L. V. John, The centennial of Sommerfeld's diffraction problem, and short biography of Arnola Sommerfeld(1868-1951), Electromagnetics, 1998, 18(2), 103–116.

[2] 江滨浩，刘永坦，有限导电平面上电偶极子电磁场的解析公式，电波科学学报， 1999, 14(1), 13–18.

[3] 江滨浩，刘永坦， Sommerfeld 型积分的解析表达式，微波学报， 2000, 16(1), 38–43.

[4] 胡俊，聂在平，索末菲尔德积分新方法—快速汉克尔变换，电子学报， 1992, 6(3), 126–131.

[5] S. O. Park, C. A. Balanis, Analytical technique to evaluate asymptotic part of the impedance matrix of Sommerfeld type integrals, IEEE Trans. on Antennas Propagat., 1997, 45(3), 798–805.

[6] K. A. Michalski, Extrapolation methods for Sommerfeld integral tails. IEEE Trans. on Antennas Propagat., 1998, 46(10): 1405-1418

[7] J. R. Wait, Electromagnetic Wave Theory, New York, Harper & Row, 1985, 241–244.

[8] T. B. A. Senior, J. L. Volakis, Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics, Stevenage, UK, IEE press, 1995, Ch3.

[9] T. B. A. Senior, J. L. Volakis, Higher order impedance and absorbing boundary conditions, IEEE Trans. on Antennas Propagat., 1997, 45(1), 107–114.

[10] M. A. Ricoy, J. L. Volavis, Derivation of generalized transition/boundary conditions for planar multiple-layer structures, Radio Science, 1990, 25(4), 391–405.

[11] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, New York, McGraw-Hill, 1941, 412–413.

[12] 数学手册，北京，人民教育出版社， 1979.

[13] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, Third Edition, New York, Chelsea Publishing, 1966.

[14] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Table of Integral, Series, and Products, New York, Academic Press, 1980, 860.

A NEW TECHNIQUE FOR COMPUTATING SOMMERFELD TYPE INTEGRALS—EXPANTION OF SPHERICAL WAVE FUNCTIONS

Jiang Binhao　　Liu Yongtan

(*Harbin Institute of Technology, Haerbin* 150001, *China*)

Abstract Generalized impedance boundary conditions are employed to simulate the effect of the earth's surface on electromagnetic fields. The Sommerfeld type integrals contained in the electromagnetic fields of a horizontal electric dipole over the ground plane are expressed as a rapidly and absolutely convergent expansion of spherical wave functions; and the coefficients of the series are cast into the Legendre functions with argument for the complex surface impedance of the ground with the help of the techniques of the transformation of integration path and the hypergeometric functions. The obtained results have explicit mathematical and physical interpretation and can conveniently be used to calculate the fields. The technique described here is an accurate and efficient computation for the Sommerfeld type integrals.

Key words Electromagnetic theory, Sommerfeld type integrals, Generalized impedance boundary conditions, Expansion of spherical wave functions

江滨浩：　男，1959 年生，副教授，博士，主要从事非均匀介质中的电磁波传播与散射问题的研究.
刘永坦：　男，1936 年生，教授，中国科学院、工程院双院士，主要研究方向是新体制雷达系统、制导与信号处理.