材 料 力 学

第十二章

弯曲的几个补充问题

南京航空航天大学
陶秋帆等

§6.4 用叠加法求弯曲变形

- 叠加法

在线弹性小变形的条件下，外载荷与挠度 (力与位移)成线性关系， 可用叠加法计算梁的挠度。

- 用叠加法的基础

熟记简单载荷作用下的挠度和转角。

- 叠加法的两种类型

(1) 载荷叠加法

将载荷分解为几个简单载荷，分别求解后，进行叠加；

(2) 变形叠加法

在内力不变的前提下，将梁分解(或刚化)为几段，求出各段的变形，然后进行叠加。

§6.5 简单静不定梁

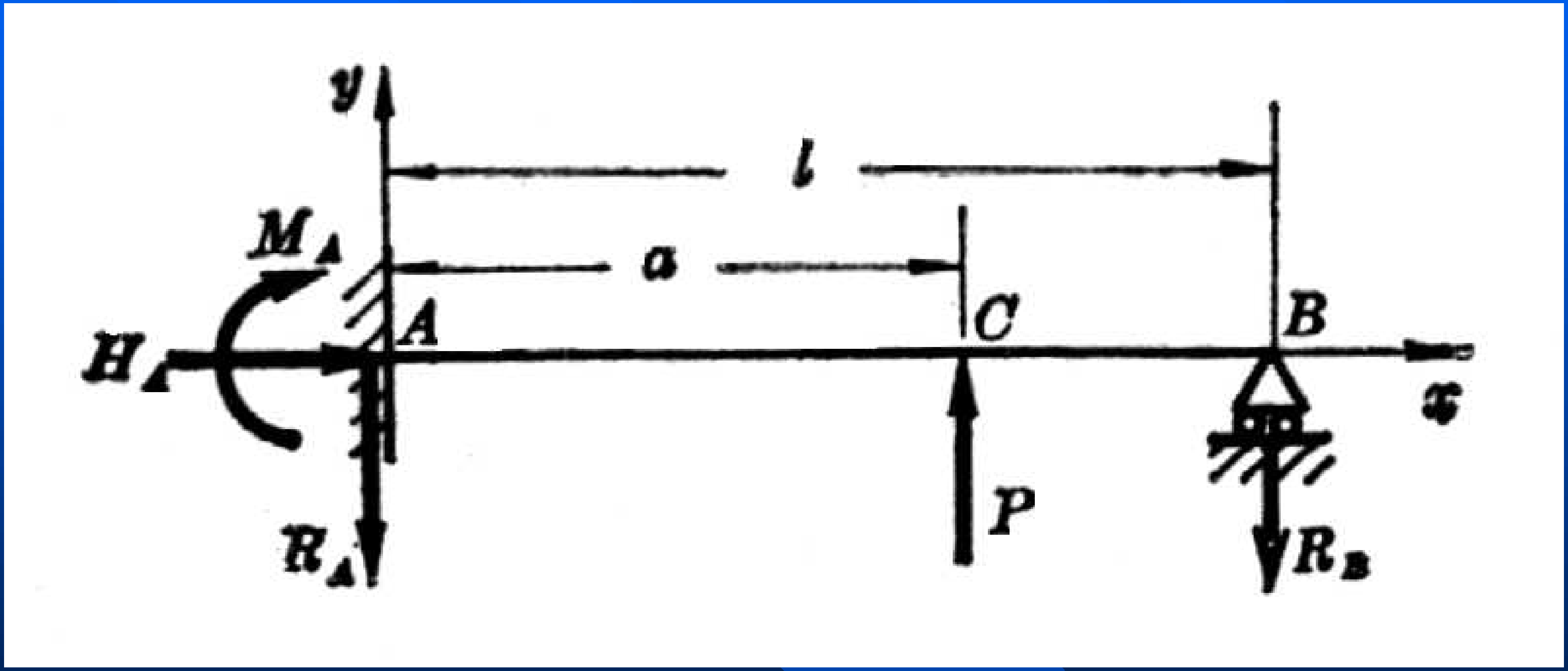
- 基本概念

- 静定基　　将静不定系统中的多余约束解除后，得到的“静定基本系统”。

- 相当系统　在静定基上加上外载荷以及多余约束力，便得到受力和变形与静不定系统完全相同的“相当系统”。

◆ 说明

静定基不是唯一的，可有多种选法。



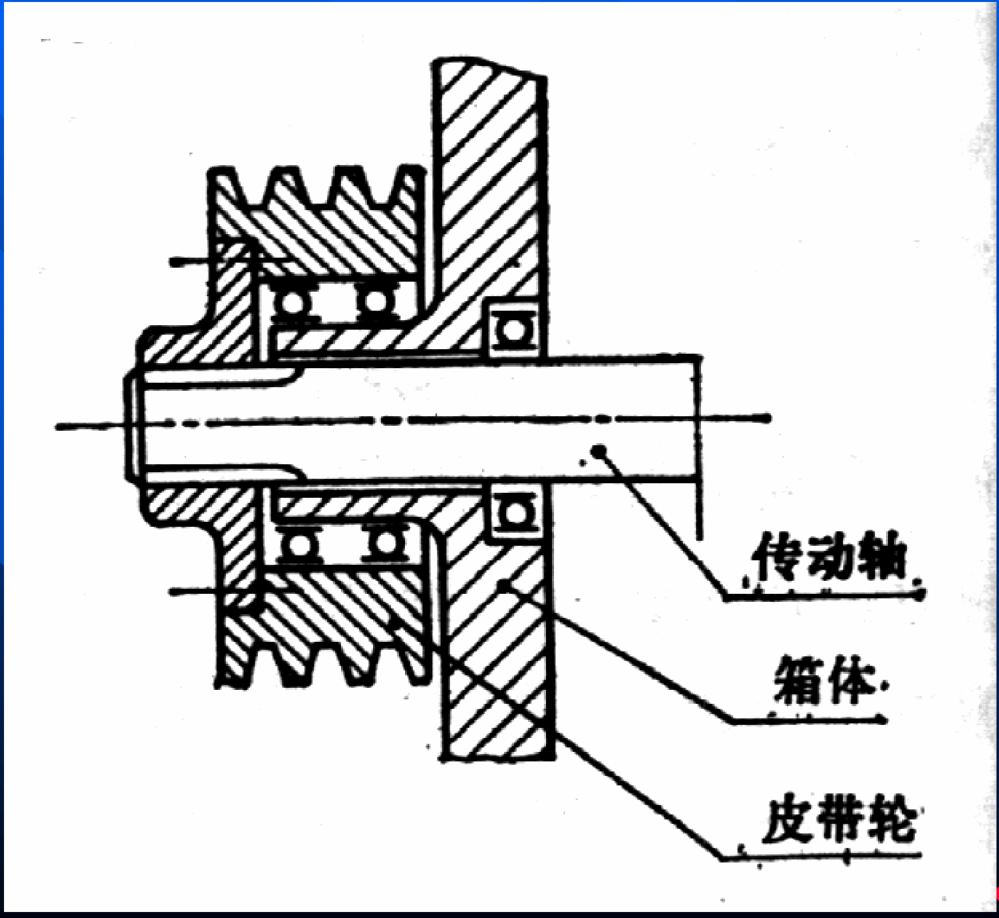
§6.6 提高弯曲刚度的一些措施

梁的挠曲线微分方程为 $$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M(x)}{EI}$$

提高弯曲刚度的措施：

1 改善结构形式，减小弯矩值

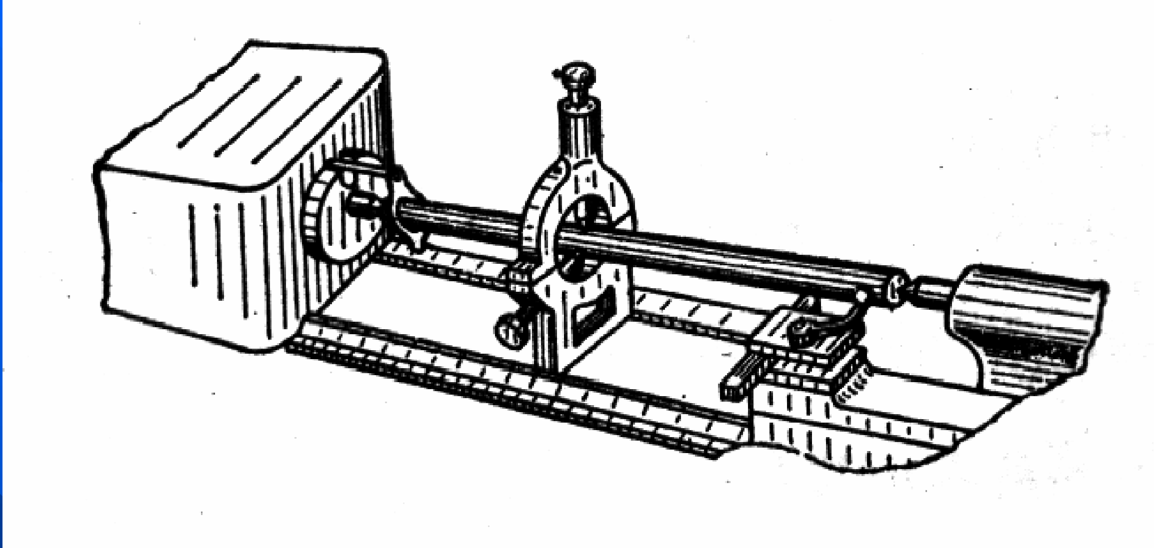
- 使力不传到轴上，而由箱体承受。
- 缩小跨度或增加约束

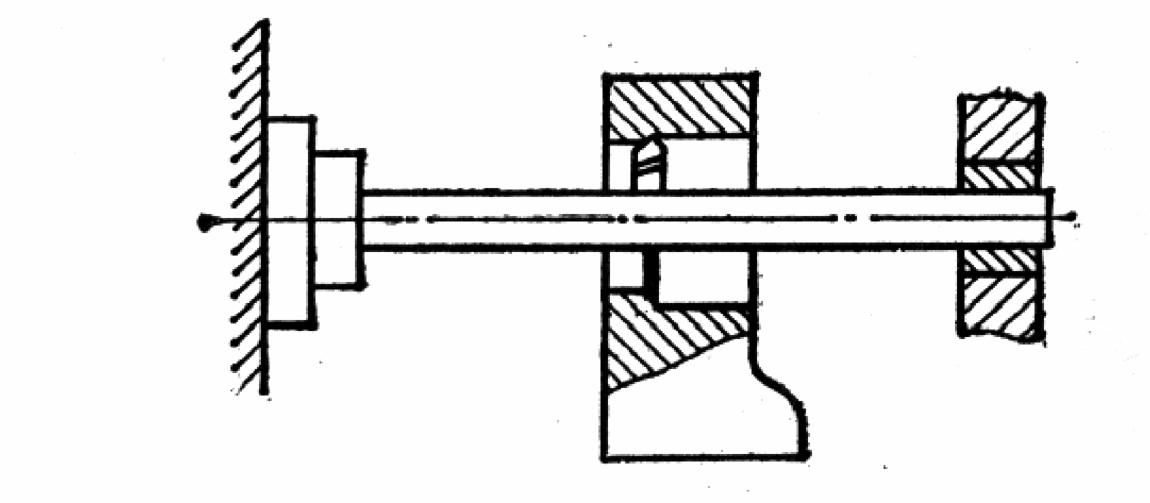


1 改善结构形式，减小弯矩值

- 缩小跨度或增加约束

梁受集中力作用时，挠度与跨度 L 的三次方成正比。





2 选择合理的截面形状

- 弹性模量与抗弯刚度

- 弹性模量与抗弯刚度

- 抗弯刚度*EI*除与截面形状有关外，还与弹性模量有关。
- 钢材的弹性模量最大，故用钢材制造的构件有较大的抗弯刚度。
- 高强度合金钢与低碳钢的弹性模量相同，故选用高强度合金钢可提高构件的<u>强度</u>，但不能提高其<u>刚度</u>。

第十二章　弯曲的几个补充问题

本章内容:

1 非对称弯曲

2 开口薄壁杆件的切应力 弯曲中心

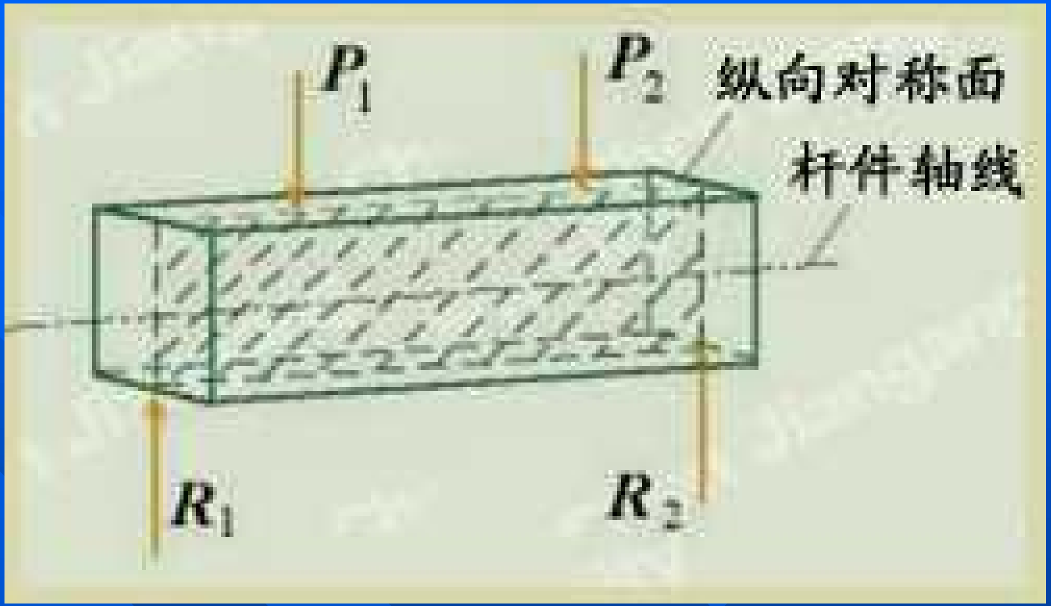
3 用奇异函数求弯曲变形

4 有限差分法

§ 12. 1 非对称弯曲

- 对称弯曲

梁具有纵向对称面，且载荷都作用在纵向对称面内，则挠曲线也在该对称面内。



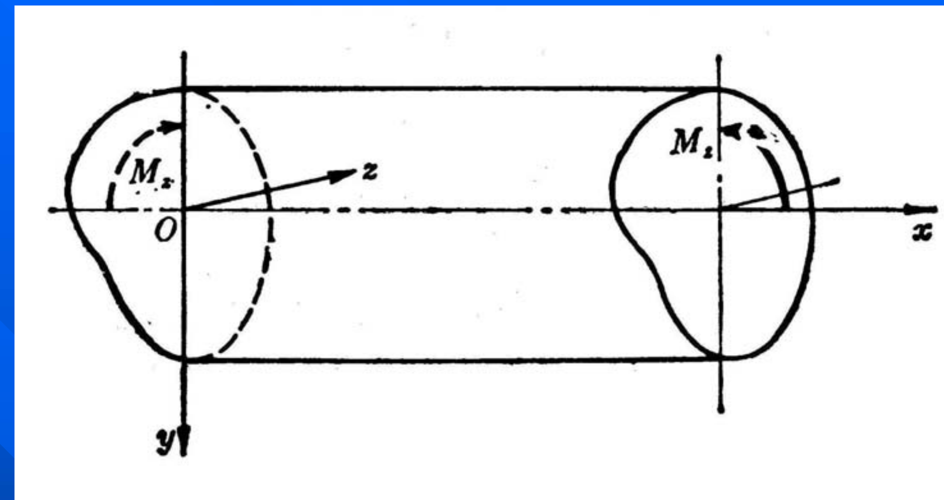
- 非对称弯曲

梁没有纵向对称面，或虽有纵向对称面，但载荷不作用在纵向对称面内。

一、非对称的纯弯曲的正应力

一、非对称的纯弯曲的正应力

取截面形心为坐标原点。



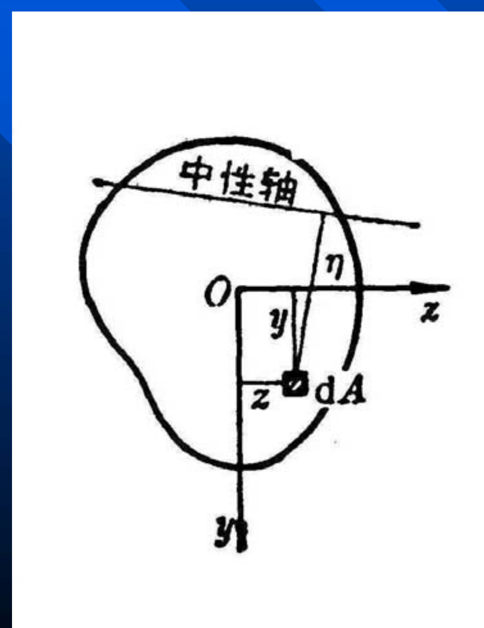
- 基本假设
  - 平面假设
  - 纵向纤维间无正应力

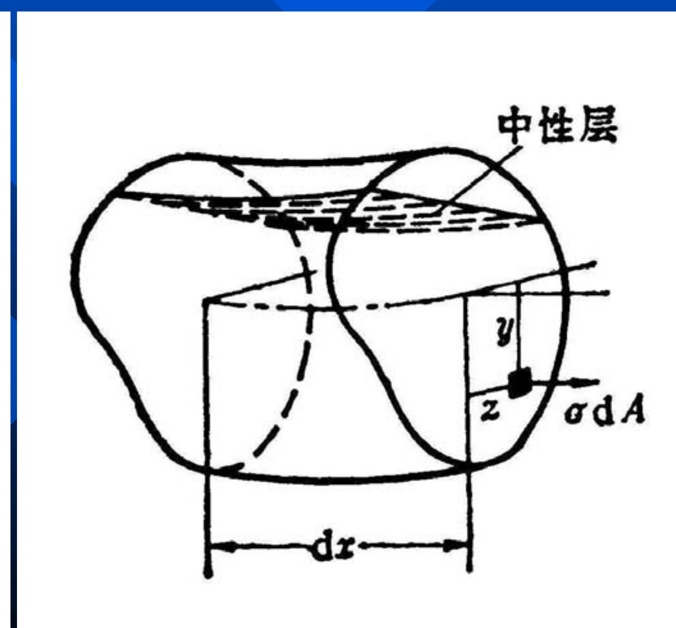
1 外力偶在*xy*平面内

*xy*平面内的外力偶记为M_z 。

- 取d*x*微段

中性轴的位置和方位未知。





- 取dx微段

中性轴的位置和方位未知。

(1) 变形几何关系

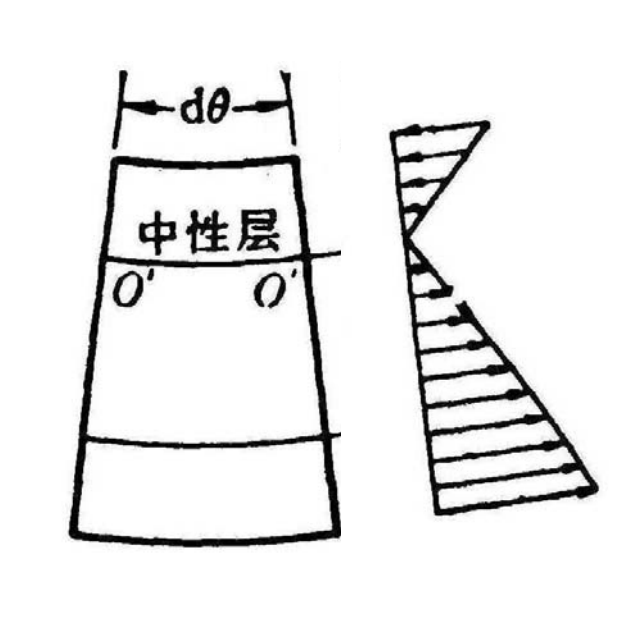
$$\varepsilon = \frac{\eta}{\rho}$$

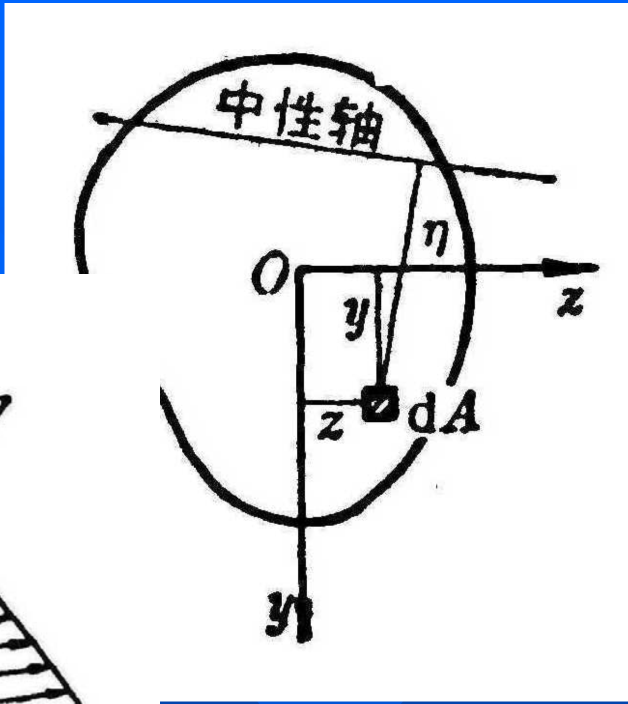
(2) 物理关系

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\eta}{\rho}$$

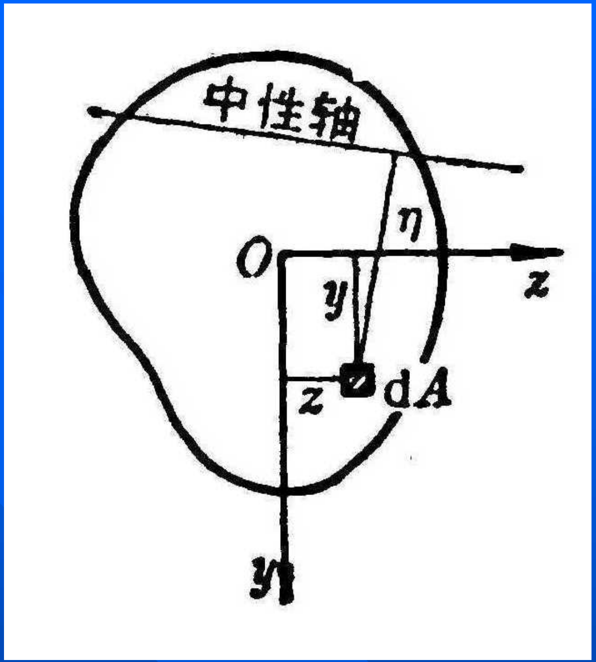
(3) 静力关系 $N = \int_A \sigma \,\mathrm{d}A = 0$

$$M_y = \int_A z\sigma \,\mathrm{d}A = 0 \qquad M_z = \int_A y\sigma \,\mathrm{d}A = M_z$$





(2) 物理关系 $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{\eta}{\rho}$



(3) 静力关系 $N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = 0$

$$M_y = \int_A z\sigma \mathrm{d}A = 0$$

$$M_z = \int_A y\sigma \mathrm{d}A = M_z$$

- 确定中性轴的位置

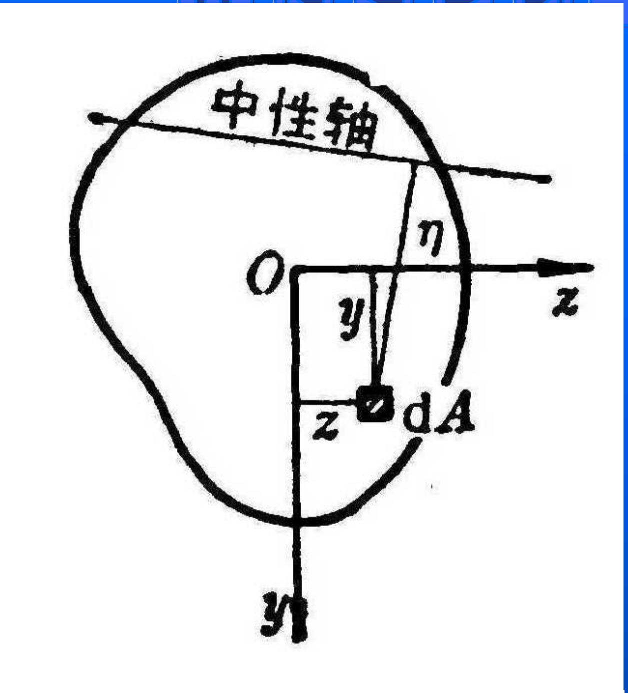
由 $N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = 0 \longrightarrow \int_A E\dfrac{\eta}{\rho}\mathrm{d}A = 0 \longrightarrow \int_A \eta \mathrm{d}A = 0$

$\longrightarrow$ 中性轴仍通过截面的形心。

$$N=\int_A \sigma \mathrm{d}A=0$$

$$\longrightarrow \int_A E\frac{\eta}{y}\mathrm{d}A=0 \longrightarrow \int_A \eta \mathrm{d}A=0$$

⟶ 中性轴仍通过截面的形心。



- 确定中性轴的方位

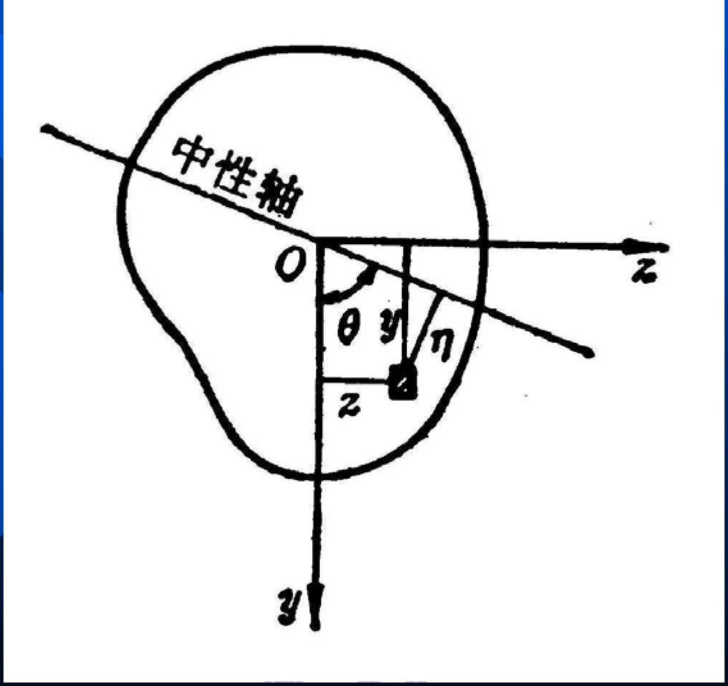
设中性轴与y轴的夹角为θ，

θ以逆时针为正。

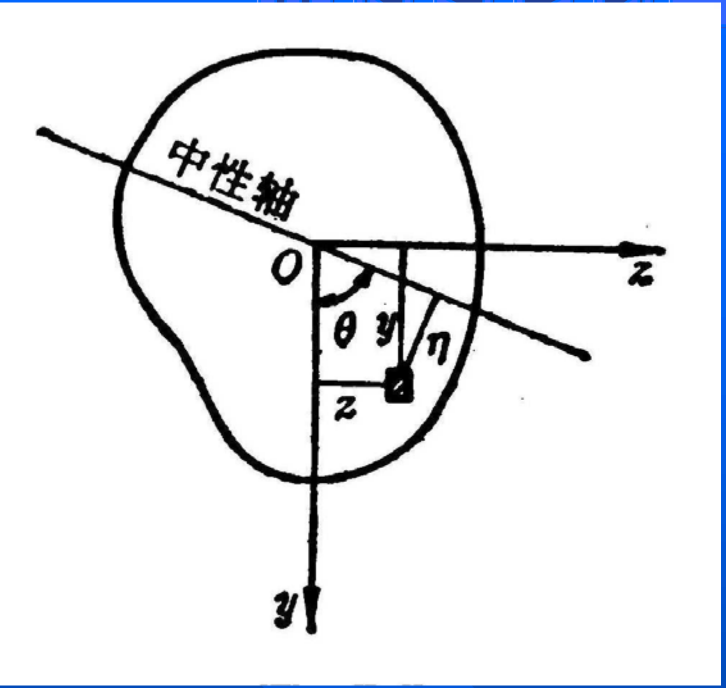
对η，有 $\eta = y\sin\theta - z\cos\theta$

则应力可写为

$$\sigma=\frac{E}{\rho}(y\sin\theta - z\cos\theta)$$



对η，有 $\eta = y\sin\theta - z\cos\theta$



则应力可写为

$$\sigma = \frac{E}{\rho}(y\sin\theta - z\cos\theta)$$

代入 $M_y = \int_A z\sigma \,\mathrm{d}A = 0$

$$\int_A \frac{E}{\rho}(y\sin\theta - z\cos\theta)z\,\mathrm{d}A$$

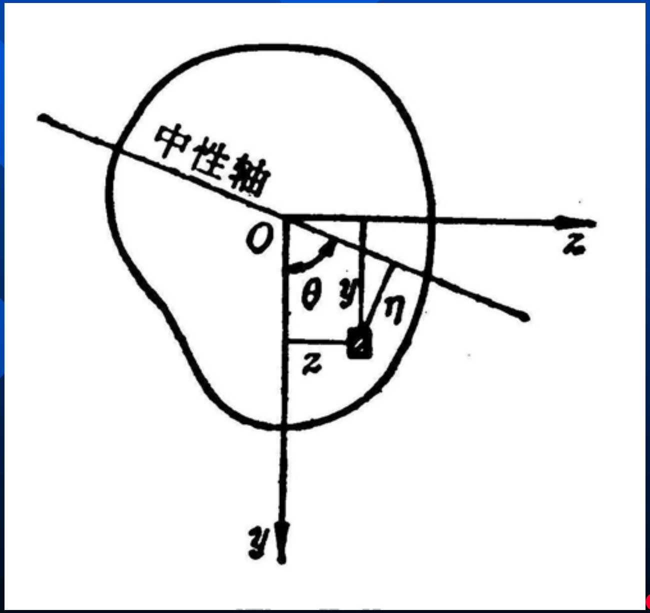
$$= \frac{E}{\rho}(\sin\theta\int_A yz\,\mathrm{d}A - \cos\theta\int_A z^2\,\mathrm{d}A)$$

$$\rightarrow \int_A \frac{E}{\rho}(y\sin\theta - z\cos\theta)z\,\mathrm{d}A$$

$$= \frac{E}{\rho}(\sin\theta\int_A yz\,\mathrm{d}A - \cos\theta\int_A z^2\,\mathrm{d}A)$$

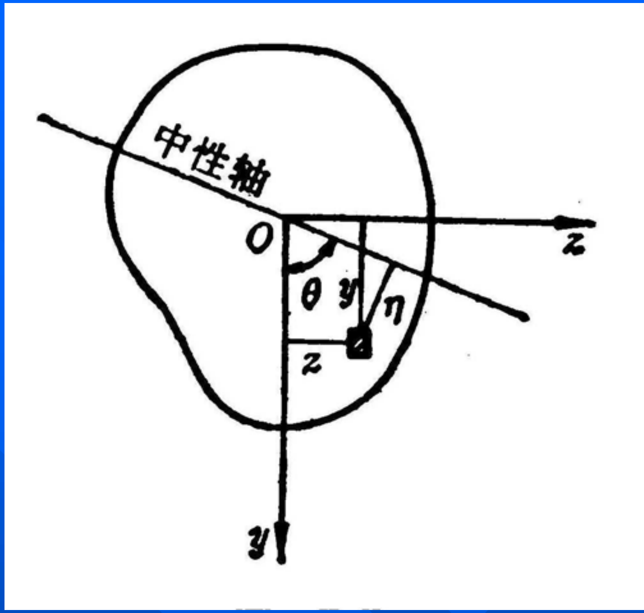
$$= \frac{E}{\rho}(I_{yz}\sin\theta - I_y\cos\theta) = 0$$

$$\rightarrow \tan\theta = \frac{I_y}{I_{yz}}$$



这样，中性轴的位置和方位就完全确定。

$$\longrightarrow \quad \tan\theta = \frac{I_y}{I_{yz}}$$



这样，中性轴的位置和方位就完全确定。

- 导出正应力公式

将 $\sigma = \dfrac{E}{\rho}(y\sin\theta - z\cos\theta)$ 代入 $M_z = \int_A y\sigma \mathrm{d}A$

$$\longrightarrow \quad M_z = \frac{E}{\rho}\left(\sin\theta\int_A y^2 \mathrm{d}A - \cos\theta\int_A yz\,\mathrm{d}A\right)$$

$$= E/\rho\cdot(I_z\sin\theta - I_{yz}\cos\theta)$$

- 导出正应力公式

将 $\sigma=\dfrac{E}{\rho}(y\sin\theta-z\cos\theta)$ 代入 $M_z=\int_A y\sigma\,\mathrm{d}A$

$$\longrightarrow\quad M_z=\frac{E}{\rho}\left(\sin\theta\int_A y^2\,\mathrm{d}A-\cos\theta\int_A yz\,\mathrm{d}A\right)$$

$$=E/\rho\cdot(I_z\sin\theta-I_{yz}\cos\theta)$$

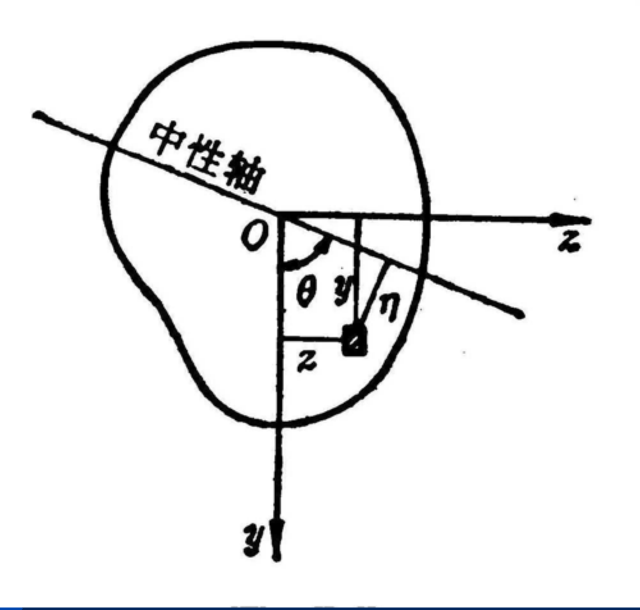
解出 E/ρ，代入前一式，得到

$$\sigma=\frac{M_z(y\sin\theta-z\cos\theta)}{I_z\sin\theta-I_{yz}\cos\theta}=\frac{M_z(y\tan\theta-z)}{I_z\tan\theta-I_{yz}}$$

解出 E/ρ，代入前一式，得到

$$\sigma=\frac{M_z(y\sin\theta-z\cos\theta)}{I_z\sin\theta-I_{yz}\cos\theta}=\frac{M_z(y\tan\theta-z)}{I_z\tan\theta-I_{yz}}$$

再将 $\tan\theta=\frac{I_y}{I_{yz}}$ 代入上式，得



$$\boxed{\sigma=\frac{M_z(yI_y-zI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}}$$

这就是只有M_z作用，梁非对称纯弯曲时，横截面上坐标为(y,z)的点的正应力公式。

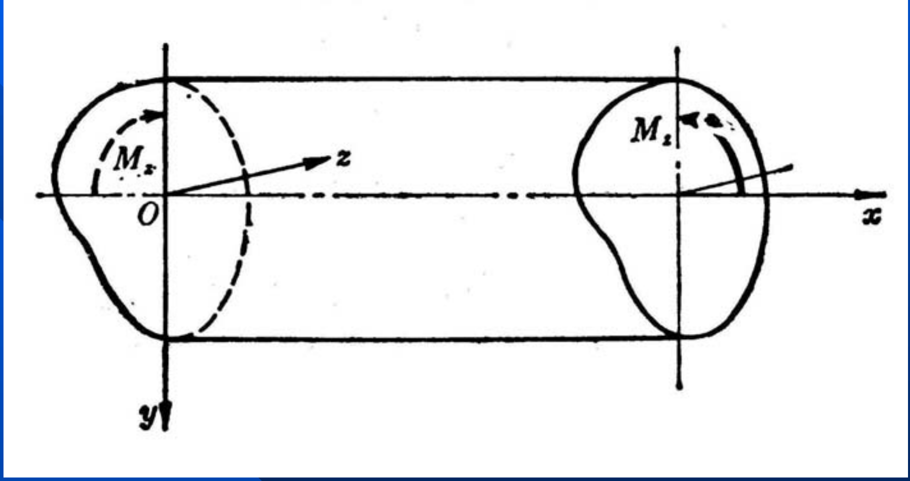
$$\sigma = \frac{M_z(yI_y - zI_{yz})}{I_yI_z - I_{yz}^2}$$

这就是只有M_z作用，梁非对称纯弯曲时，横截面上坐标为(y, z)的点的正应力公式。

2 外力偶在xz平面内

xz平面内的力偶记为M_y。

同理可得

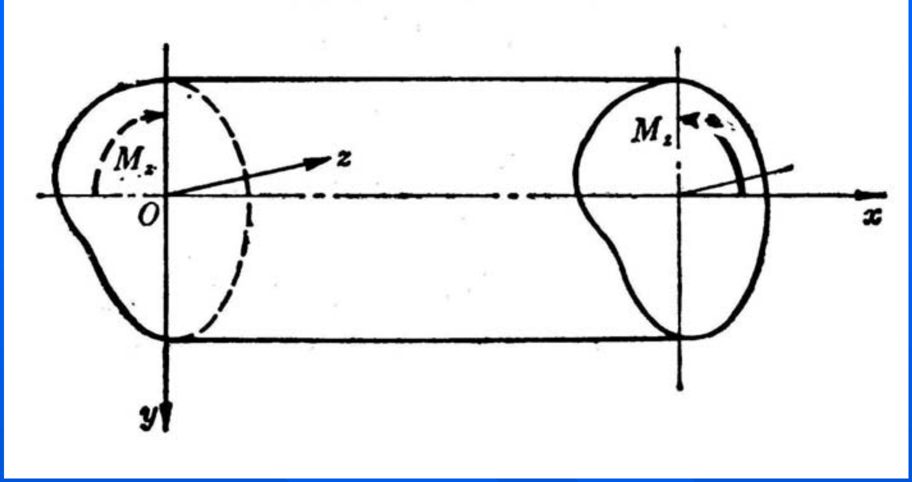


$$\sigma = \frac{M_y(zI_z - yI_{yz})}{I_yI_z - I_{yz}^2}$$

2 外力偶在xz平面内

xz平面内的力偶记为M_y。

同理可得



$$\boxed{\sigma=\frac{M_y(zI_z-yI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}}$$

3 外力偶在任意纵向平面内

将力偶分解为两个正交的力偶M_y和 M_z 。

- 弯曲正应力　则根据叠加原理，有：

$$\sigma=\frac{M_z(yI_y-zI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}+\frac{M_y(zI_z-yI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}$$

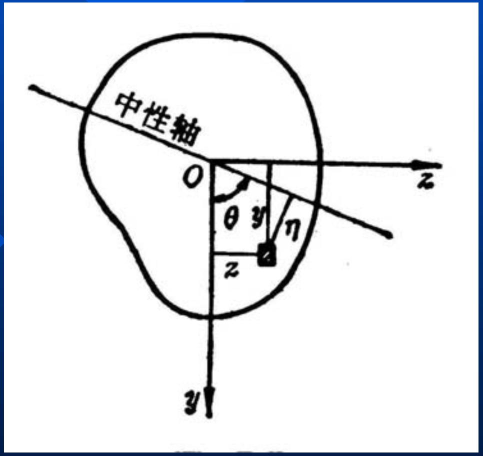
3 外力偶在任意纵向平面内

将力偶分解为两个正交的力偶M_y和 M_z 。

- 弯曲正应力　　则根据叠加原理，有：

$$\sigma=\frac{M_z(yI_y-zI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}+\frac{M_y(zI_z-yI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}$$

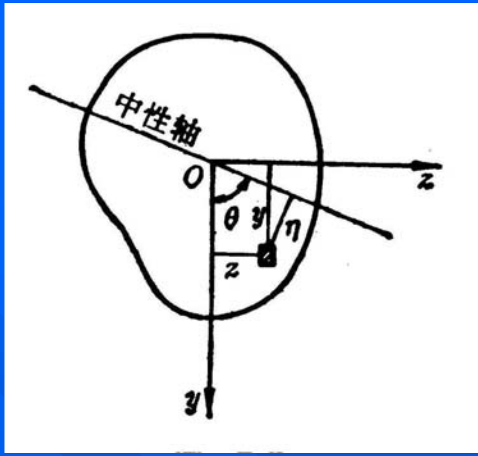
- 中性轴的确定



记中性轴上点的坐标为y_0, z_0，中性轴上各点的正应力为零, 有:

$$\frac{M_z(y_0I_y-z_0I_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}+\frac{M_y(z_0I_z-y_0I_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}=0$$

● 中性轴的确定



记中性轴上点的坐标为y_0, z_0，中性轴上各点的正应力为零, 有:

$$\frac{M_z(y_0 I_y - z_0 I_{yz})}{I_y I_z - I_{yz}^2} + \frac{M_y(z_0 I_z - y_0 I_{yz})}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 0$$

$$\longrightarrow \quad (M_z I_y - M_y I_{yz}) y_0 + (M_y I_z - M_z I_{yz}) z_0 = 0$$

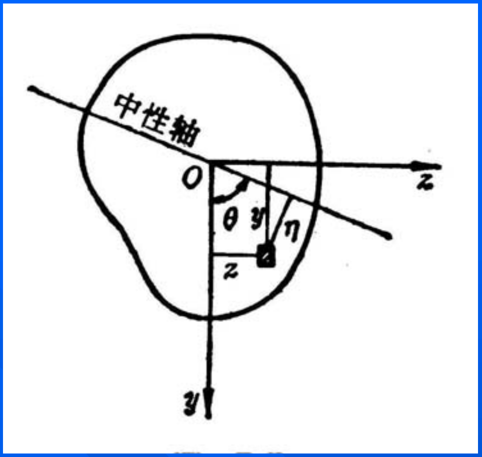
可见，中性轴是通过坐标原点(形心) 的直线。

◆ 中性轴的方位

$$\tan\theta = \frac{z_0}{y_0} = -\frac{(M_z I_y - M_y I_{yz})}{(M_y I_z - M_z I_{yz})}$$

◆ 中性轴的方位

$$\tan\theta = \frac{z_0}{y_0} = -\frac{(M_z I_y - M_y I_{yz})}{(M_y I_z - M_z I_{yz})}$$



4 两种特殊情况

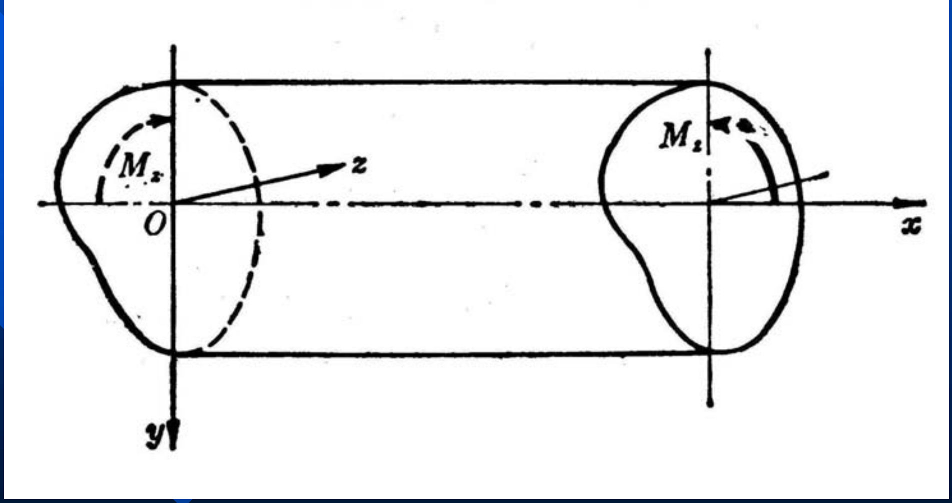
(1) 外力偶在xy平面内且xy平面为形心主惯性平面

xy平面内的力偶为M_z，

这种情况下

$$M_y = 0, \quad I_{yz} = 0$$

由正应力公式：



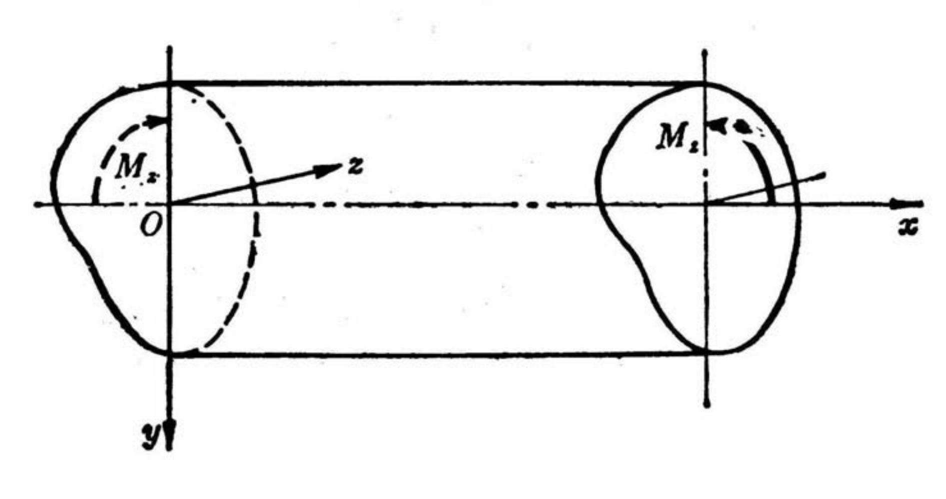
(1) 外力偶在xy平面内且xy平面为形心主惯性平面

xy平面内的力偶为M_z，

这种情况下

$$M_y=0,\quad I_{yz}=0$$

由正应力公式：



$$\sigma=\frac{M_z(yI_y-zI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}+\frac{M_y(zI_z-yI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}$$

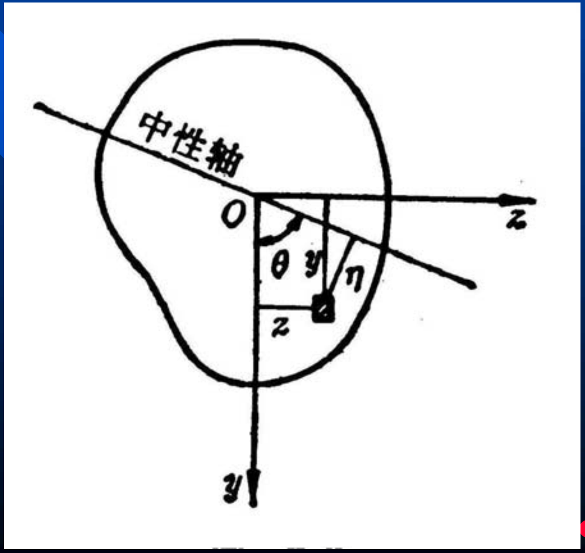
$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma=\frac{M_z y}{I_z}}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M_z y}{I_z}}$$

由中性轴夹角公式： $\tan\theta = -\frac{(M_z I_y - M_y I_{yz})}{(M_y I_z - M_z I_{yz})}$

$$\tan\theta = -\frac{M_z I_y}{-M_z I_{yz}} = \infty \quad \longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

中性轴与z轴重合。

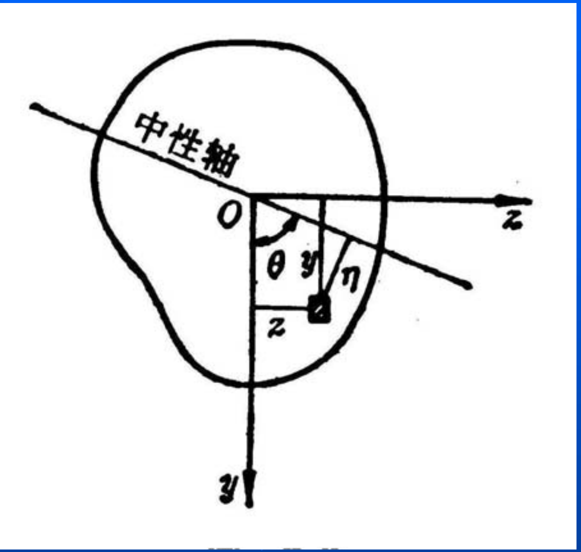


这种情况下，弯矩作用在 xy 平面内，挠曲线也在此平面内。

——平面弯曲

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z}$$

中性轴与z轴重合。



这种情况下，弯矩作用在 xy 平面内，挠曲线也在此平面内。

——平面弯曲

前面讨论的对称弯曲属于平面弯曲。

可以看出：平面弯曲的正应力公式与对称弯曲的正应力公式相同。

- 实心截面梁

前面讨论的对称弯曲属于平面弯曲。

可以看出：平面弯曲的正应力公式与对称弯曲的正应力公式相同。

- 实心截面梁

对实心截面梁，上述结果也适用于弯矩作用面与形心主惯性平面平行但不重合的情况。

这时，弯矩作用面与挠曲线所在面平行。

(2) M_z和M_y同时存在，且分别作用在形心主惯性平面 xy平面与xz平面内。

这时，有：$I_{yz}=0$

(2) M_z和M_y同时存在，且分别作用在形心主惯性平面 xy平面与xz平面内。

这时，有：$I_{yz}=0$

由正应力公式：$$\sigma=\frac{M_z(yI_y-zI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}+\frac{M_y(zI_z-yI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}$$

$\longrightarrow$ $$\boxed{\sigma=\frac{M_zy}{I_z}+\frac{M_yz}{I_y}}$$ 即为两个弯曲的叠加

由中性轴夹角公式：$\longrightarrow$ $$\tan\theta=-\frac{M_zI_y}{M_yI_z}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}}$$

即为两个弯曲的叠加

由中性轴夹角公式： $\longrightarrow$ $$\tan\theta = -\frac{M_z I_y}{M_y I_z}$$

二、非对称的横力弯曲

非对称的横力弯曲在一般情况下，在发生弯曲的同时还会发生扭转。

- 实心截面梁

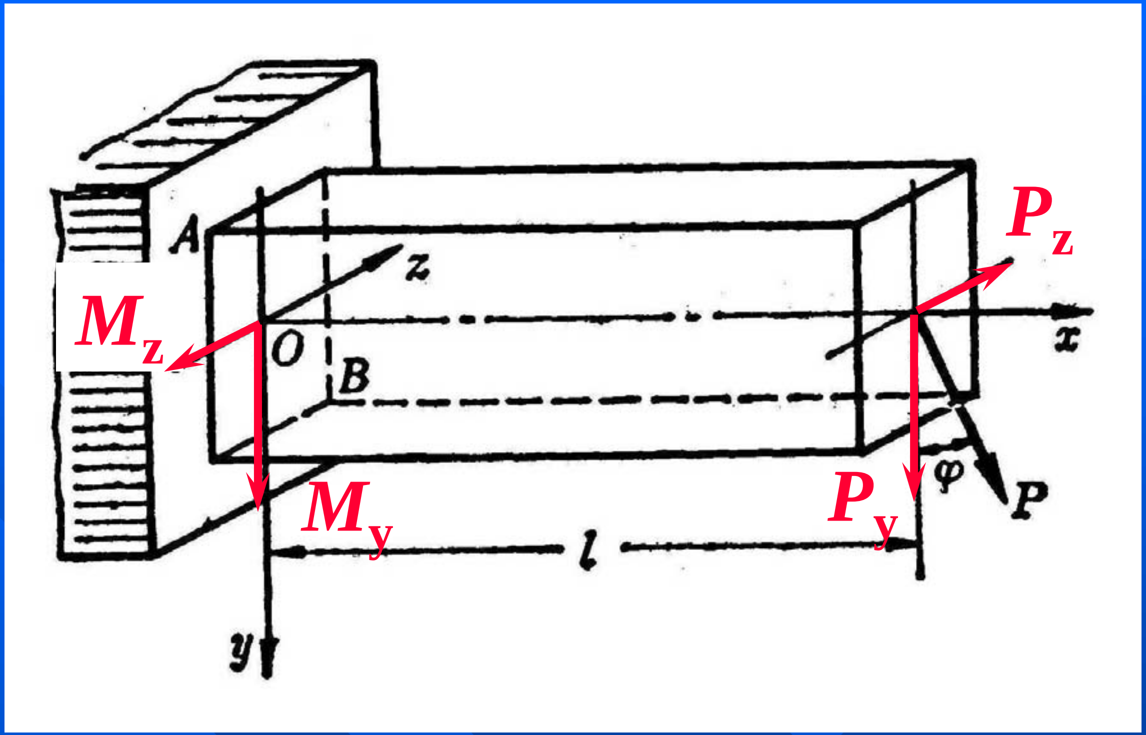
对实心截面梁，当横力通过截面形心时，可以忽略扭转变形，用纯弯曲的正应力公式进行计算。

例 1 (书例7.2)

已知：矩形截面梁，P，φ。

求：讨论梁的正应力与变形。

解：图中y, z轴是形心主惯性轴。



将力P向形心主惯性轴分解： $P = P_y + P_z$

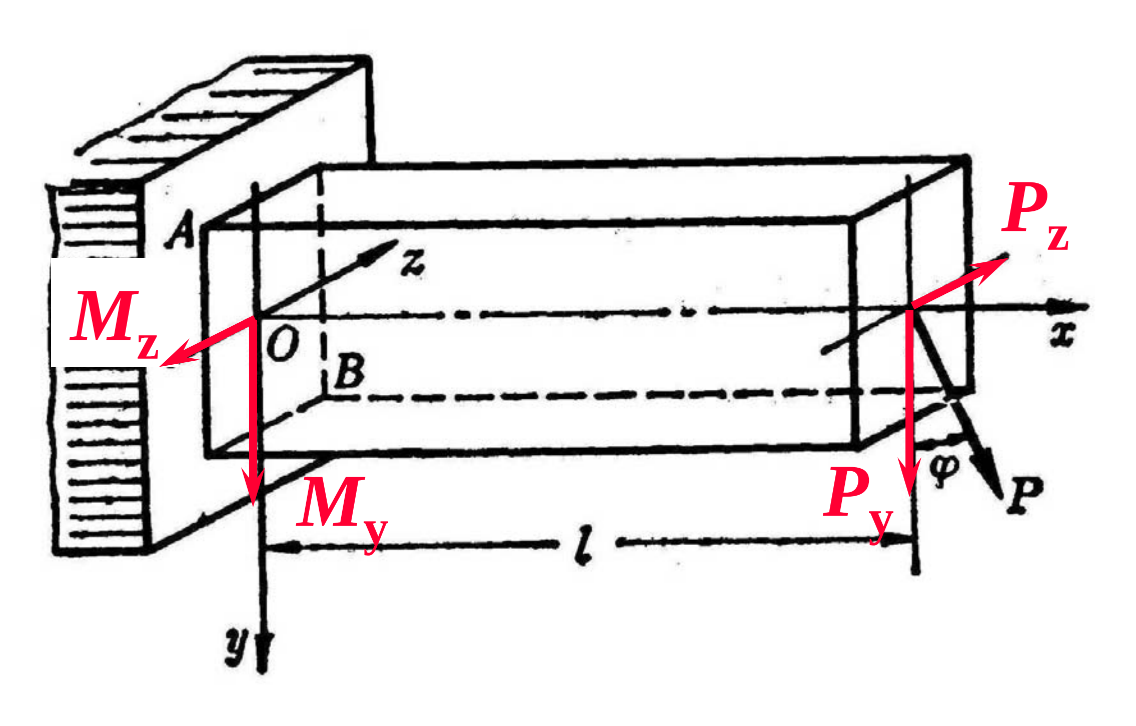
$$P_y = P\cos\varphi, \quad P_z = P\sin\varphi$$

- 固定端处的弯矩 $M_z = -Pl\cos\varphi$， $M_y = -Pl\sin\varphi$

◆ 规定：弯矩以在第一象限产生拉应力为正

- 固定端处的弯矩

$$M_z = -Pl\cos\varphi,$$
$$M_y = -Pl\sin\varphi$$



◆ <u>注意</u>：这里弯矩正负号规定与理力中不同。

- <u>规定</u>：在坐标轴<u>正向</u>第一象限处产生<u>拉应力</u>的弯矩为正弯矩。

- <u>问题</u>　最大<u>拉应力</u>发生在何处？
　　最大<u>压应力</u>发生在何处？

◆ <u>方法1</u> 分别判断两个弯矩产生的应力，再叠加。

◆ 方法1

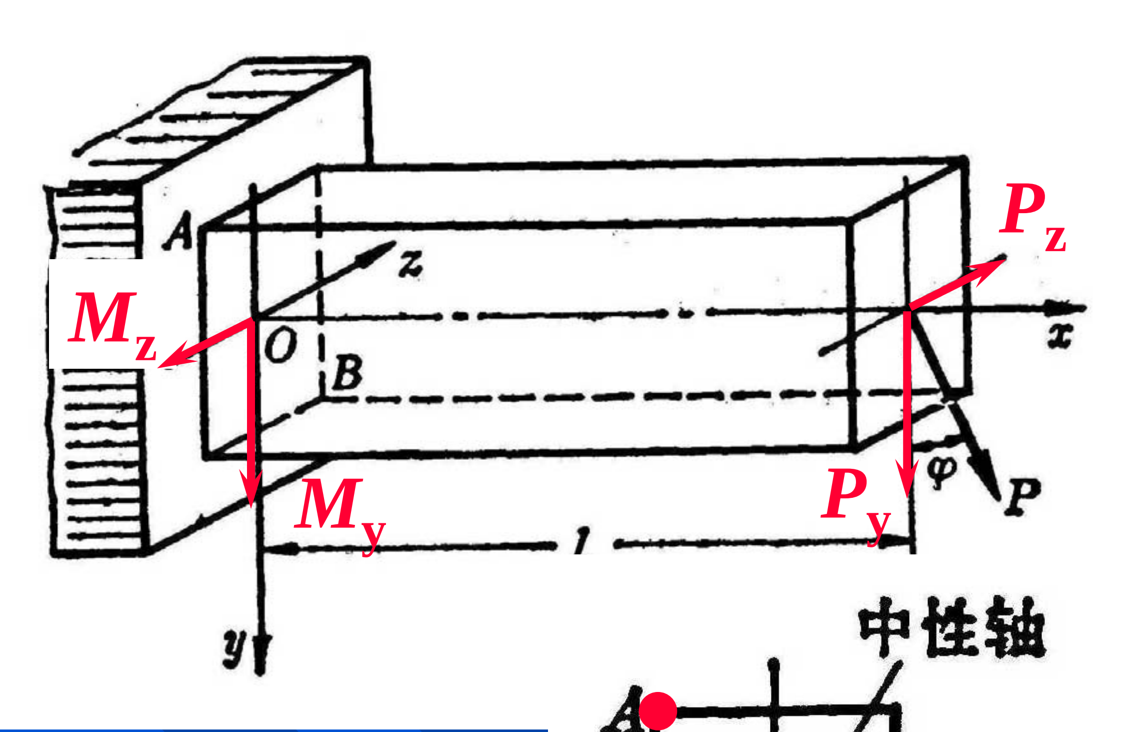
分别判断两个弯矩产生的应力，再叠加。

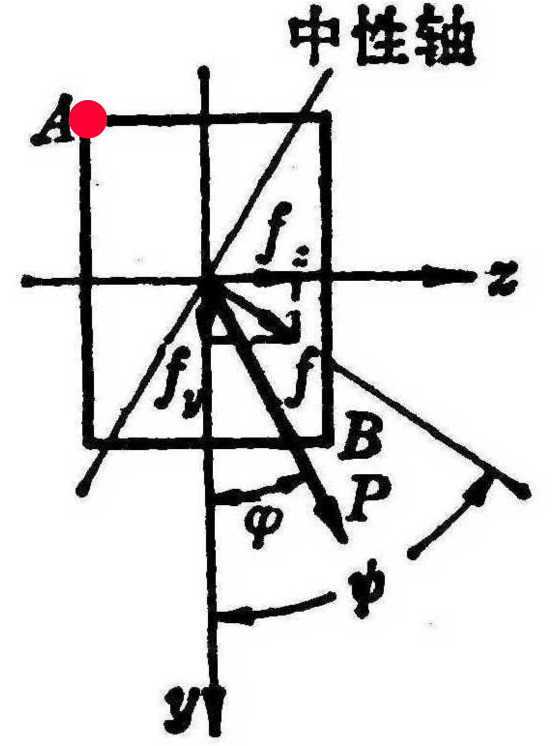
◆ 方法2

通过中性轴来确定。

$$\tan\theta = -\frac{M_z I_y}{M_y I_z} = -\frac{I_y}{I_z}\cot\varphi$$

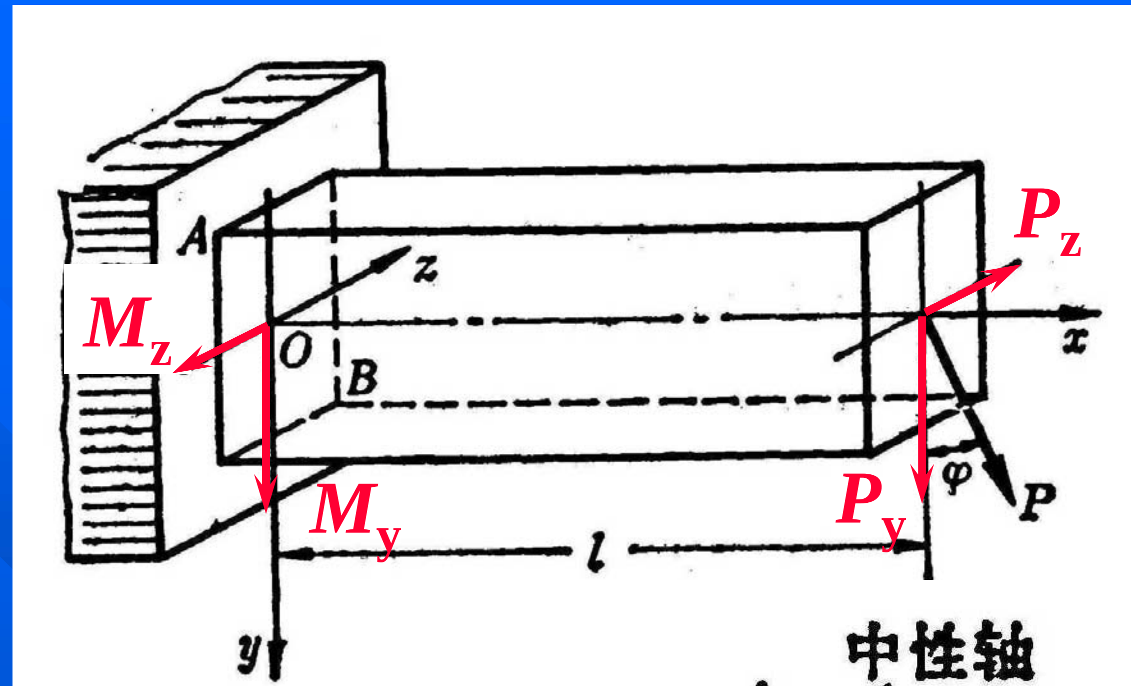
● 最大拉应力发生在A点





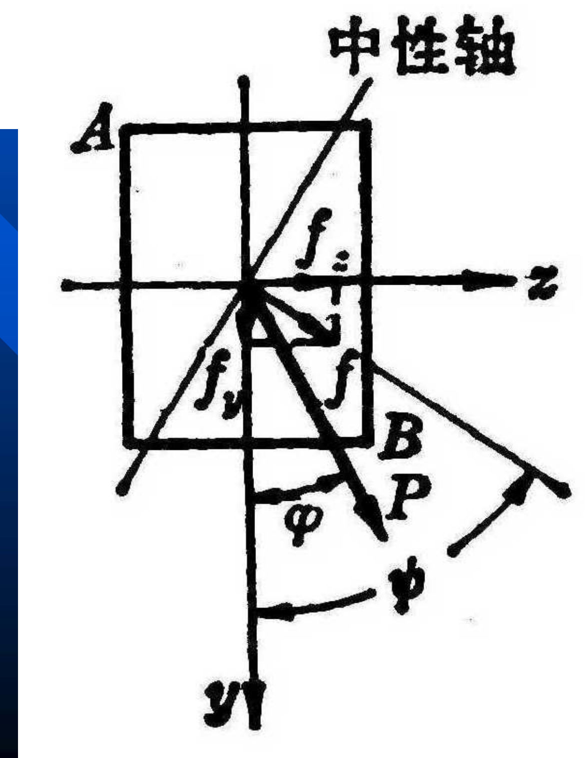
$$\tan\theta = -\frac{M_z I_y}{M_y I_z}$$

$$= -\frac{I_y}{I_z}\cot\varphi$$



- 最大拉应力发生在A点

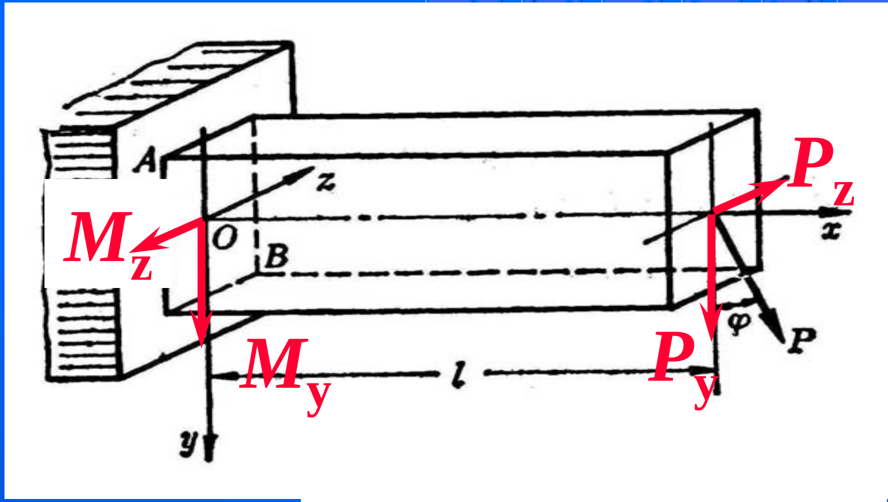
由 $$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$



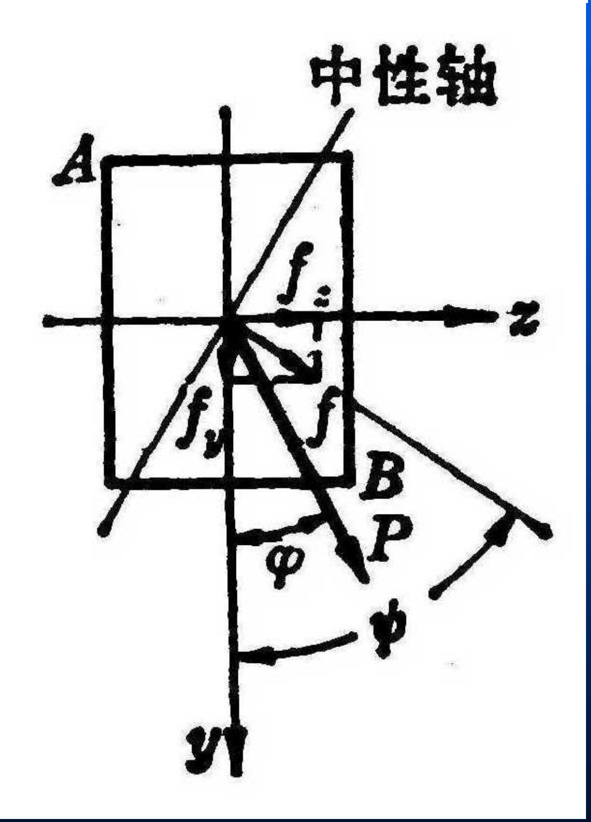
$$\Rightarrow \sigma_A = Pl\left(\frac{|y_{\max}|\cos\varphi}{I_z} + \frac{|z_{\max}|\sin\varphi}{I_y}\right)$$

- 最大拉应力发生在A点

由 $$\sigma=\frac{M_z y}{I_z}+\frac{M_y z}{I_y}$$



$$\sigma_A=Pl\left(\frac{|y_{max}|\cos\varphi}{I_z}+\frac{|z_{max}|\sin\varphi}{I_y}\right)$$



- 自由端的挠度用叠加法

$$f_y=\frac{P_y l^3}{3EI_z}=\frac{Pl^3\cos\varphi}{3EI_z}$$

- 自由端的挠度

用叠加法

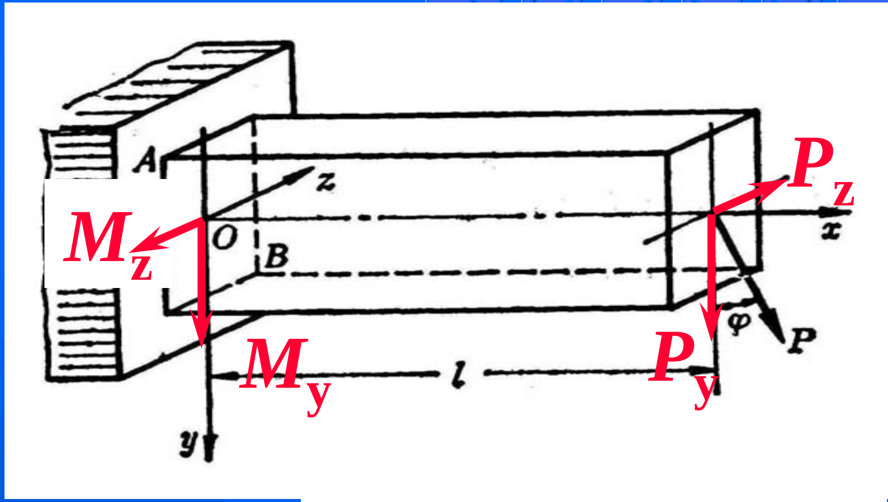
$$f_y = \frac{P_y l^3}{3EI_z} = \frac{Pl^3 \cos\varphi}{3EI_z}$$

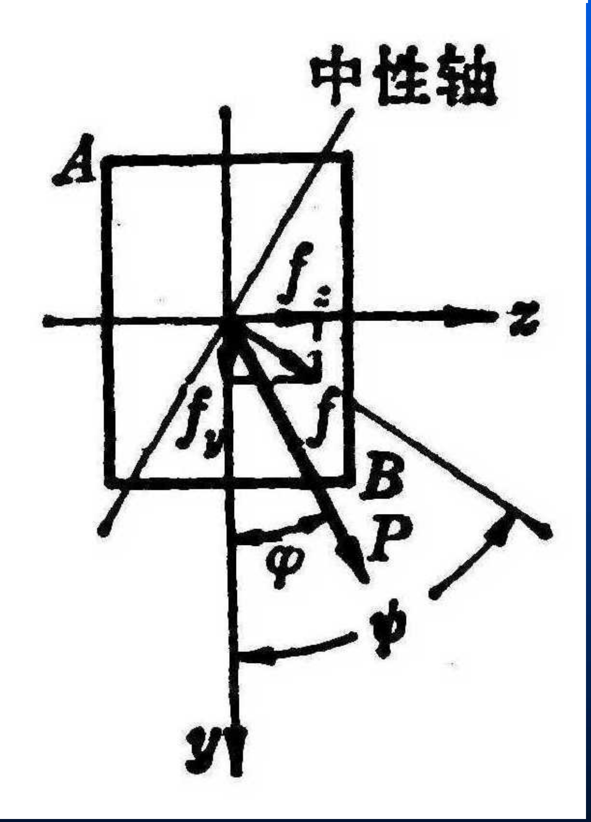
$$f_z = \frac{P_z l^3}{3EI_y} = \frac{Pl^3 \sin\varphi}{3EI_y}$$

总挠度和挠度的方向为

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}$$

$$= \frac{Pl^3}{3E}\sqrt{\left(\frac{\cos\varphi}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{\sin\varphi}{I_y}\right)^2}$$



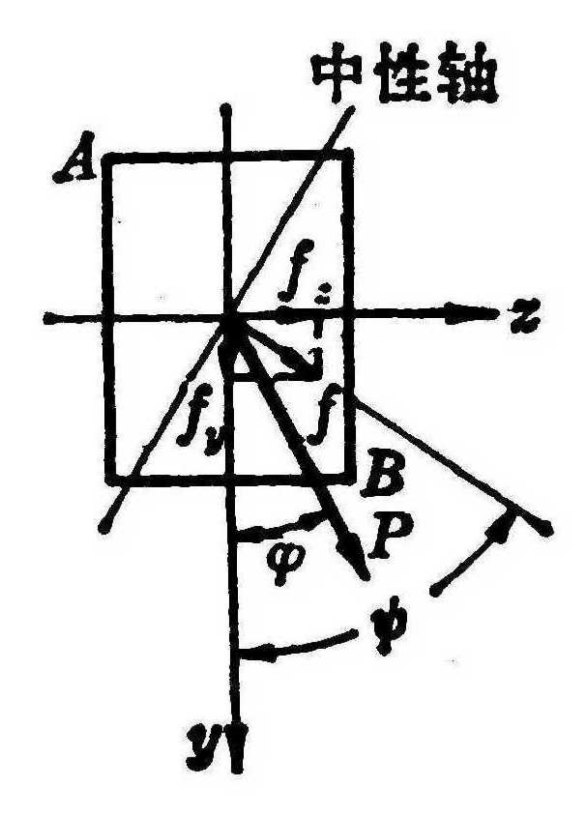


总挠度和挠度的方向为

$$f=\sqrt{f_y^2+f_z^2}$$

$$=\frac{Pl^3}{3E}\sqrt{(\frac{\cos\varphi}{I_z})^2+(\frac{\sin\varphi}{I_y})^2}$$

$$\tan\psi=\frac{f_z}{f_y}=\frac{I_z}{I_y}\tan\varphi$$

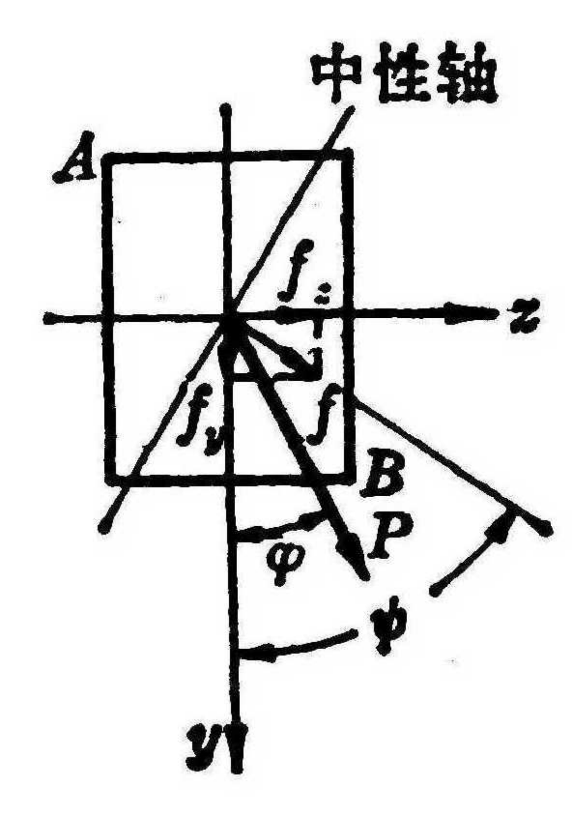


- 几点结论

(1) 当 $I_y \neq I_z$ 时， $\psi \neq \varphi$ 。

即：外力作用面与挠度面不重合。——斜弯曲

$$\tan\psi = \frac{f_z}{f_y} = \frac{I_z}{I_y}\tan\varphi$$



- 几点结论

(1) 当 $I_y \neq I_z$ 时， $\psi \neq \varphi$。

即：外力作用面与挠度面不重合。

——斜弯曲

(2) 当 $I_y = I_z$ 时， $\psi = \varphi$。

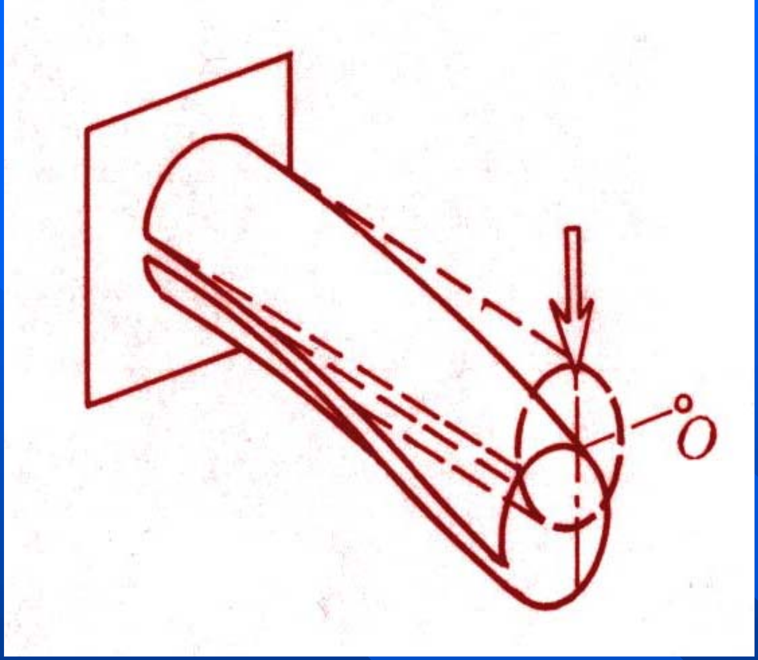
即：外力作用面与挠度面重合。 ——平面弯曲

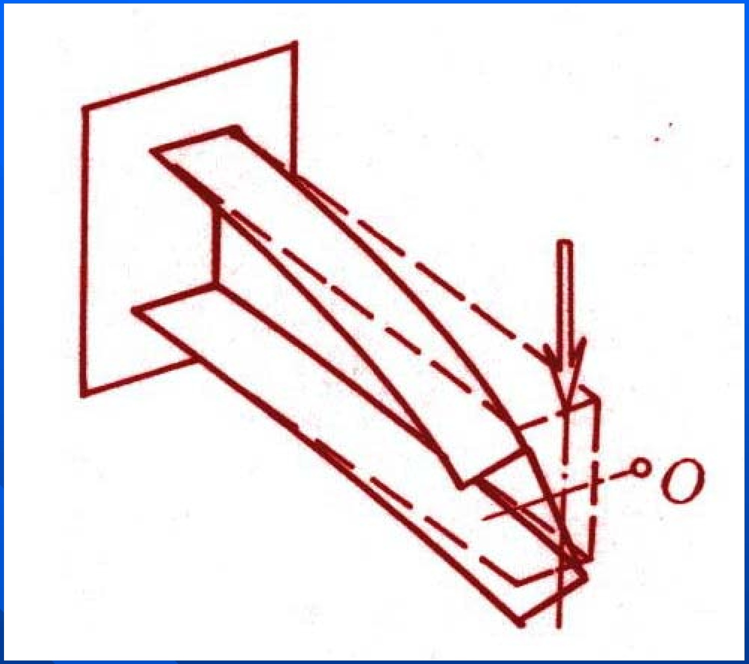
(3) $\tan\theta = -\frac{I_y}{I_z}\cot\varphi \longrightarrow \tan\theta = -\frac{I_y}{I_z}\cdot\frac{I_z}{I_y}\cot\psi = -\cot\psi$

即：中性轴与挠度所在面互相垂直。

§12.2 开口薄壁杆件的切应力、弯曲中心

- 例子





- 可见：

◆ 非对称截面梁的横力弯曲时， 梁不仅产生弯曲，而且产生明显的扭转变形。

◆ 只有横力通过截面上的特定点时，该梁只弯不扭。

弯曲中心。

●可见：

◆ 非对称截面梁的横力弯曲时，梁不仅产生弯曲，而且产生明显的扭转变形。

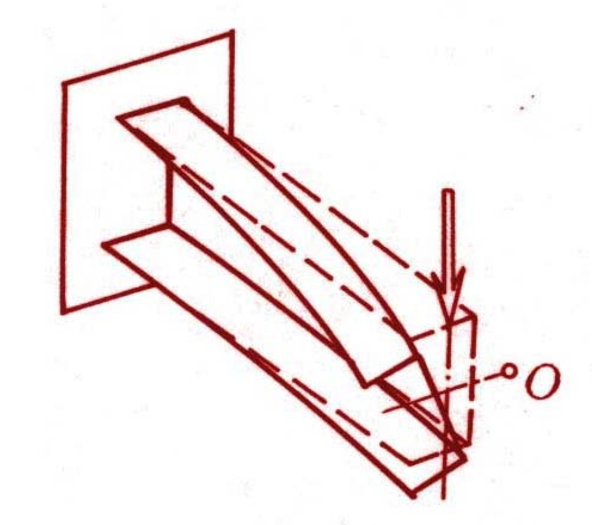
◆ 只有横力通过截面上的特定点，且平行于形心主惯性轴时，该梁只弯不扭。弯曲中心。

确定弯曲中心有重要的工程意义。

怎样确定弯曲中心？

通过分析横截面上的弯曲切应力。

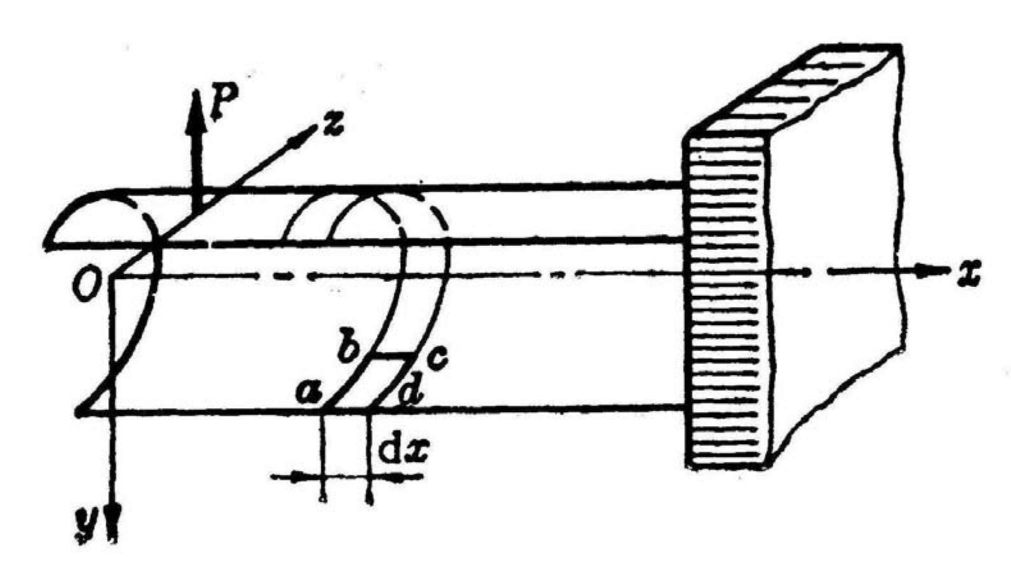
1. 弯曲切应力



1. 弯曲切应力

如图，设P力通过弯曲中心。

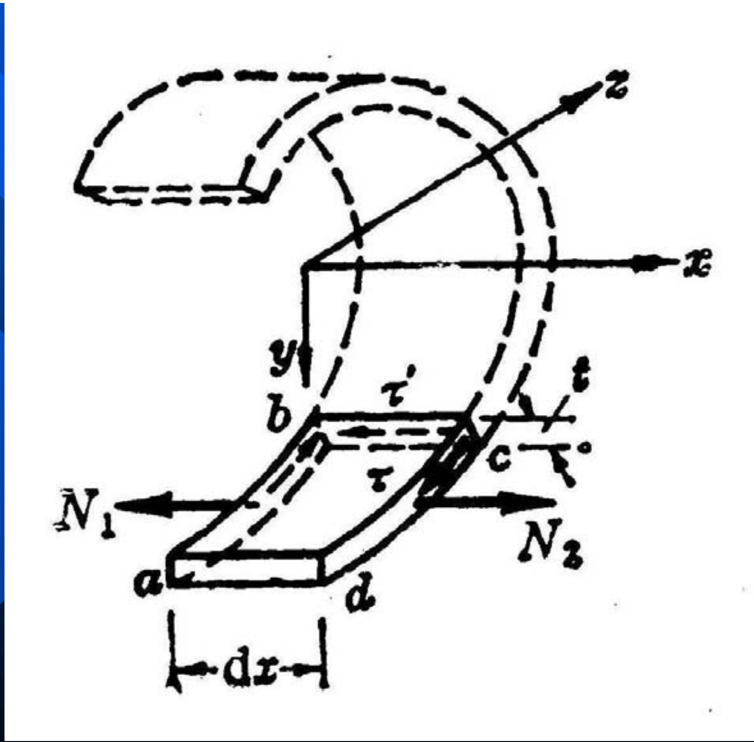
则薄壁杆件只弯不扭。横截面上只有弯曲正应力和弯曲切应力，没有扭转切应力。



- 与推导矩形截面梁的弯曲切应力的方法相同。

取$abcd$为研究对象。

设切应力沿壁厚均匀分布。

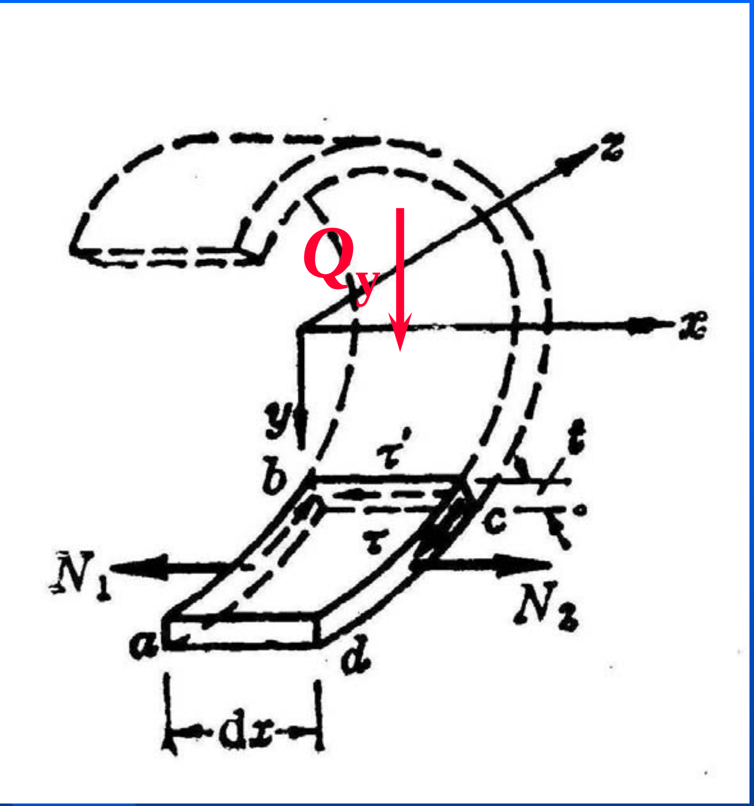


取$abcd$为研究对象。

设切应力沿壁厚均匀分布。

$$\sum X=0 \quad N_2-N_1-\tau' t\,\mathrm{d}x=0$$

设y, z轴为形心主惯性轴，P力平行于y轴，即P的作用面平行于形心主惯性平面xy。



由上节的结果，有：$\sigma=\dfrac{M_z y}{I_z}$

所以：$N_2=\dfrac{(M_z+\mathrm{d}M_z)}{I_z}S_z^*$　其中：$S_z^*=\int_{A_1} y\,\mathrm{d}A$

所以: $N_2=\dfrac{(M_z+\mathrm{d}M_z)}{I_z}S_z^*$

其中: $S_z^*=\int_{A_1} y\,\mathrm{d}A$

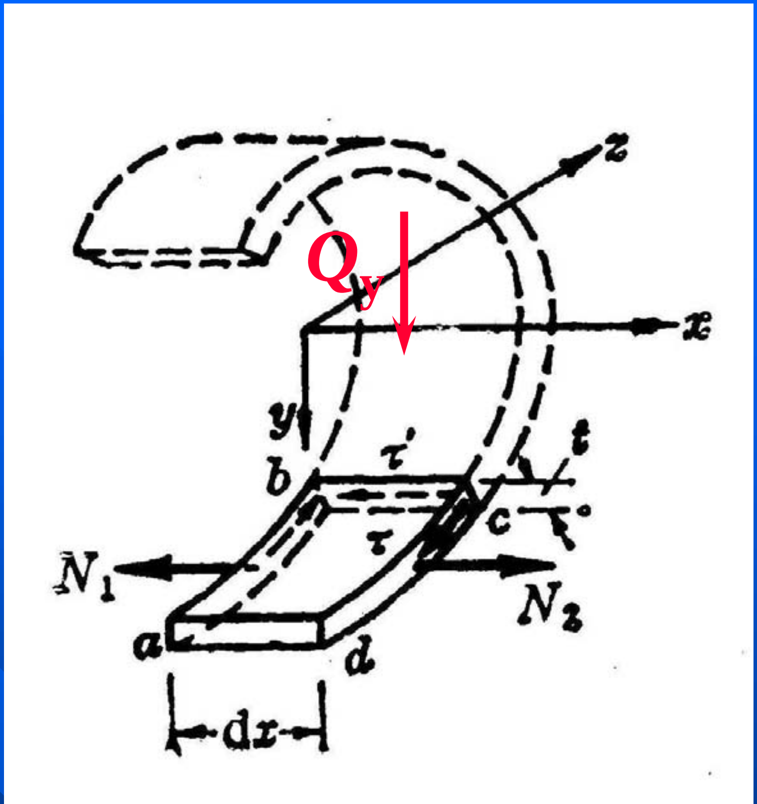
同理: $N_1=\dfrac{M_z}{I_z}S_z^*$

代入平衡方程:

$$N_2-N_1-\tau' t\,\mathrm{d}x=0$$

$$\Longrightarrow \tau'=\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x}\frac{S_z^*}{I_z t}=\frac{Q_y S_z^*}{I_z t}$$

即: $\boxed{\tau=\dfrac{Q_y S_z^*}{I_z t}}$



方向如图

即：$\boxed{\tau = \dfrac{Q_y S_z^*}{I_z t}}$ 方向如图

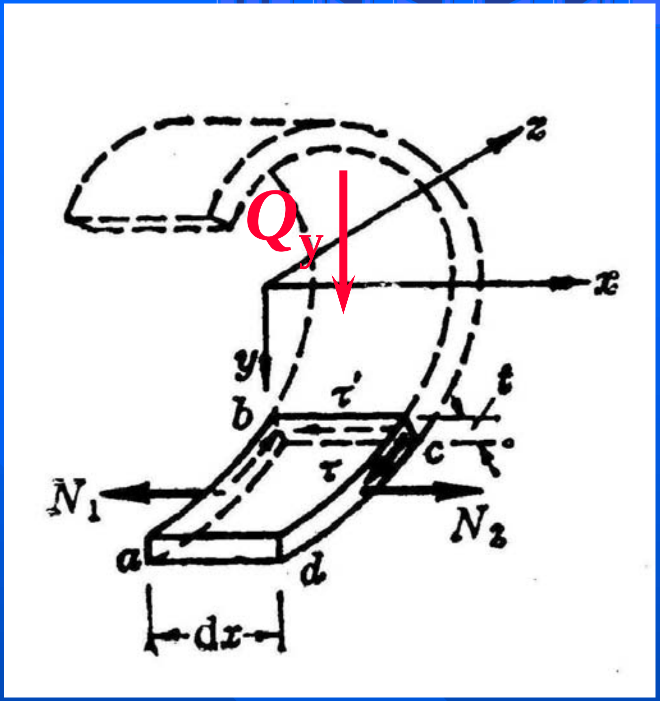
- 确定弯曲中心的位置(*A*点)

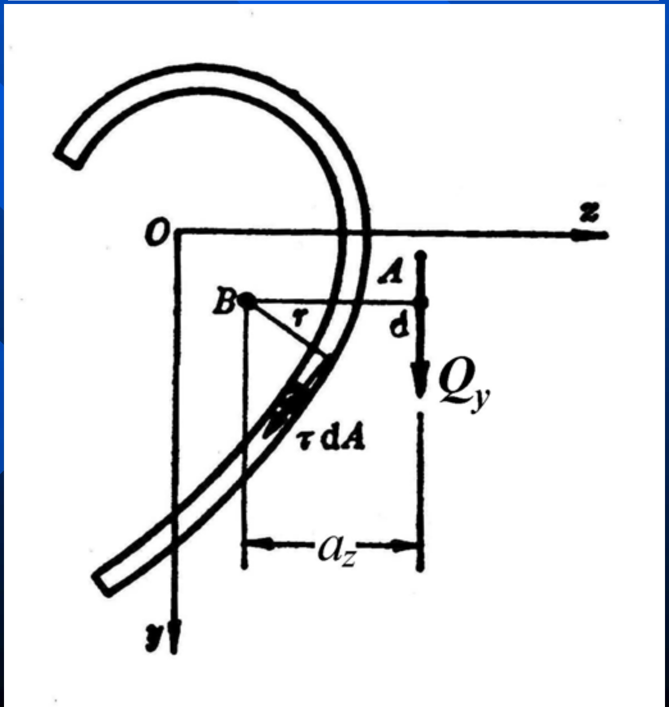
由合力矩定理，对任选的*B*点，有：

$$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0$$

$$Q_y a_z = \int_A \tau \, \mathrm{d} A \cdot r \longrightarrow a_z$$

- 剪力Q_y的作用线应当通过弯曲中心，否则会产生扭转。





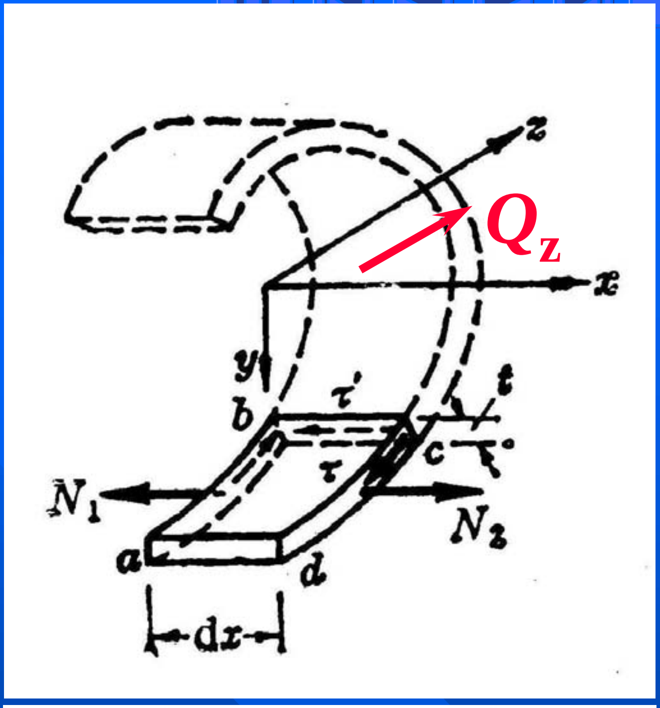
- 当P力平行于z轴，即P 的作用面平行于形心主惯性平面xz时

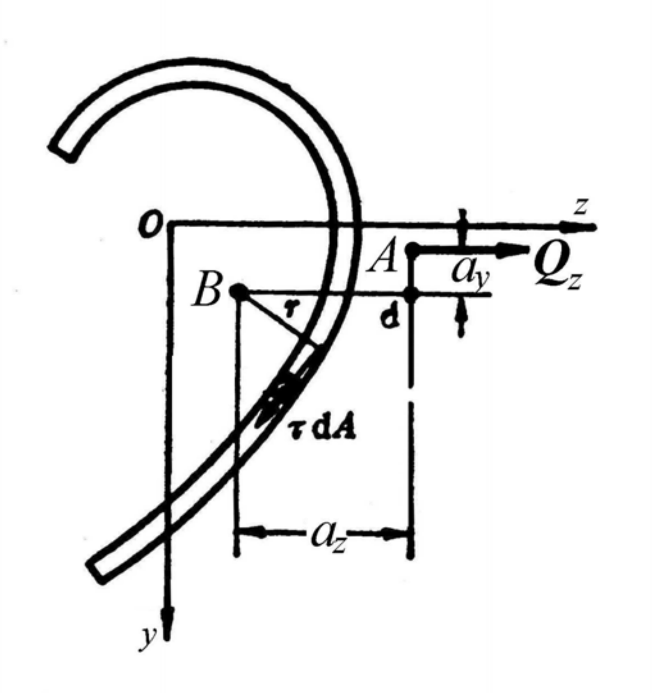
同理可得：
$$\tau = \frac{Q_z S_y^*}{I_y t}$$

$$Q_z a_y = \int_A \tau \, \mathrm{d} A \cdot r$$

由a_y, a_z可以确定弯曲中心的位置。

- 实心截面和闭口截面梁的弯曲中心通常在形心的附近。





例 1 (书例7.3)

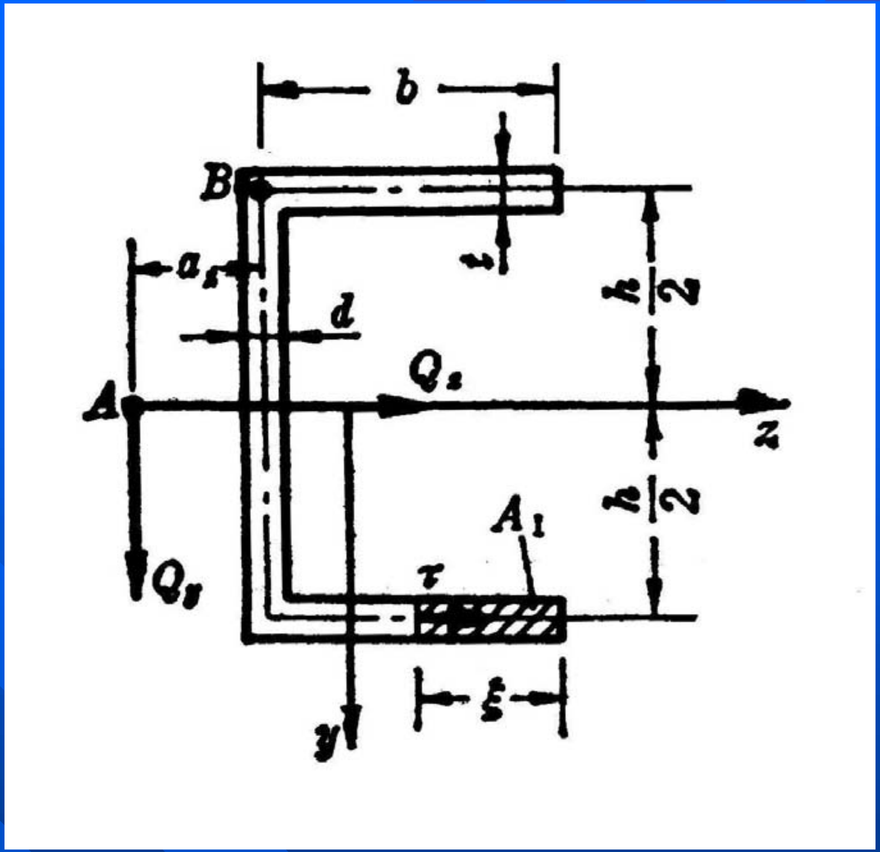
已知：槽形截面如图。

求：弯曲中心。

解：取对称轴为 z轴，

y轴通过形心。

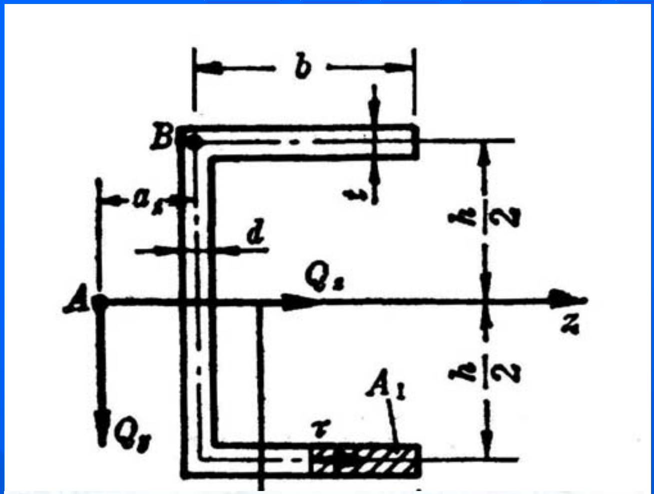
y轴和z轴为形心主惯性轴。

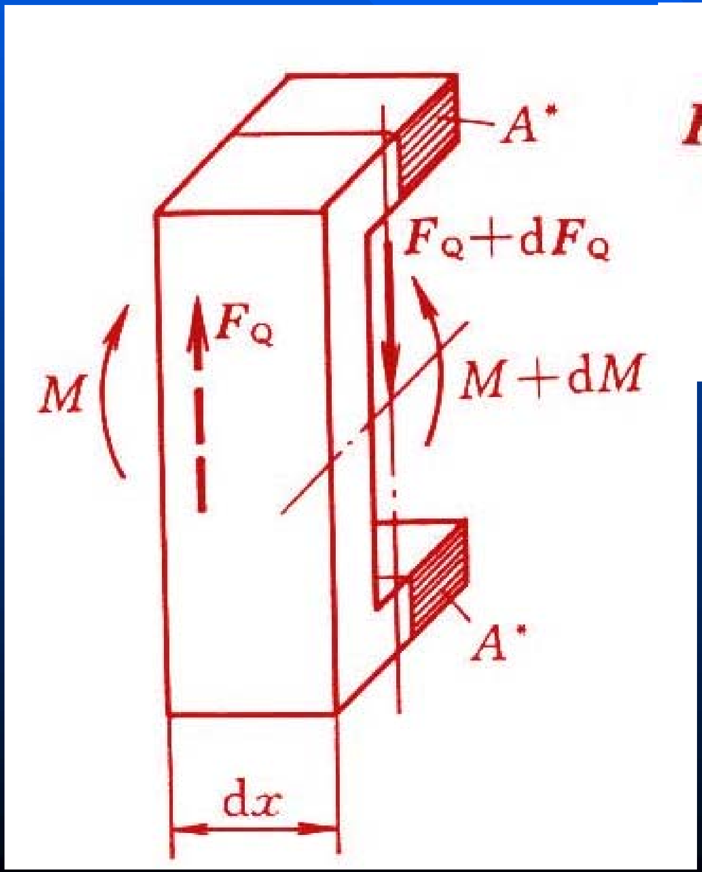


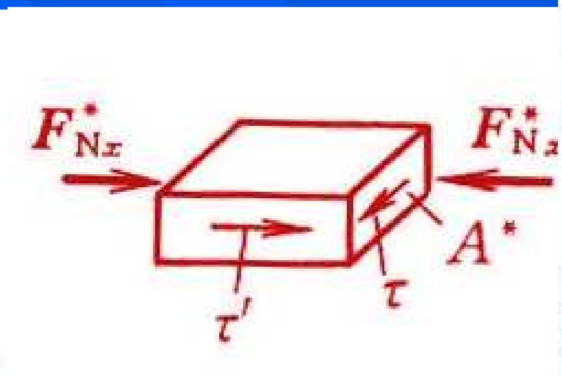
- 确定a_z
- 设剪力Q_y通过弯曲中心
- 切应力的分布情况

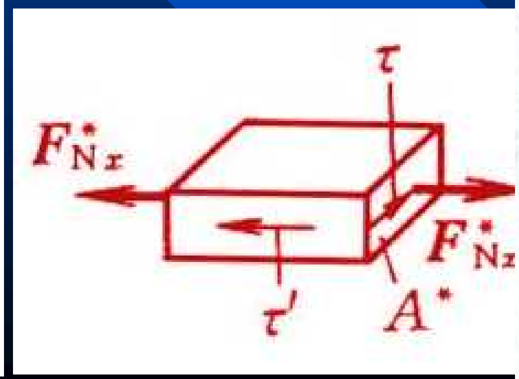
  切应力流

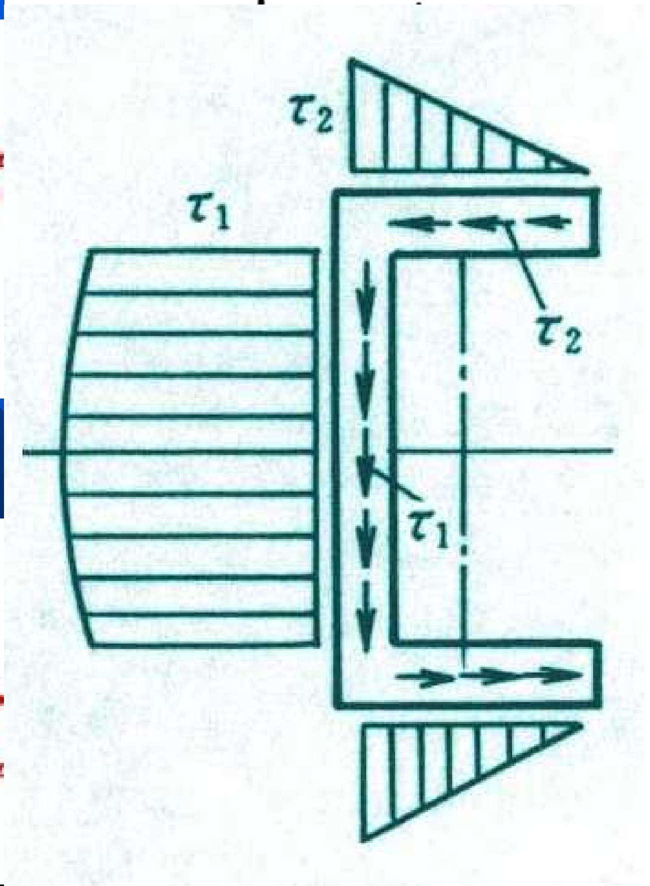
- 设剪力Q_y通过弯曲中心
- 切应力的分布情况 切应力流



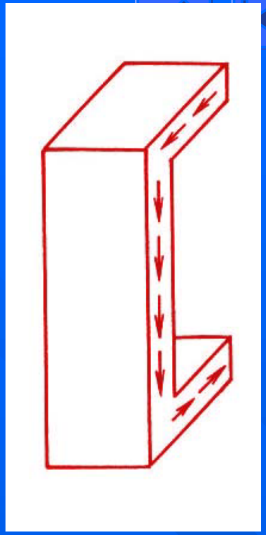






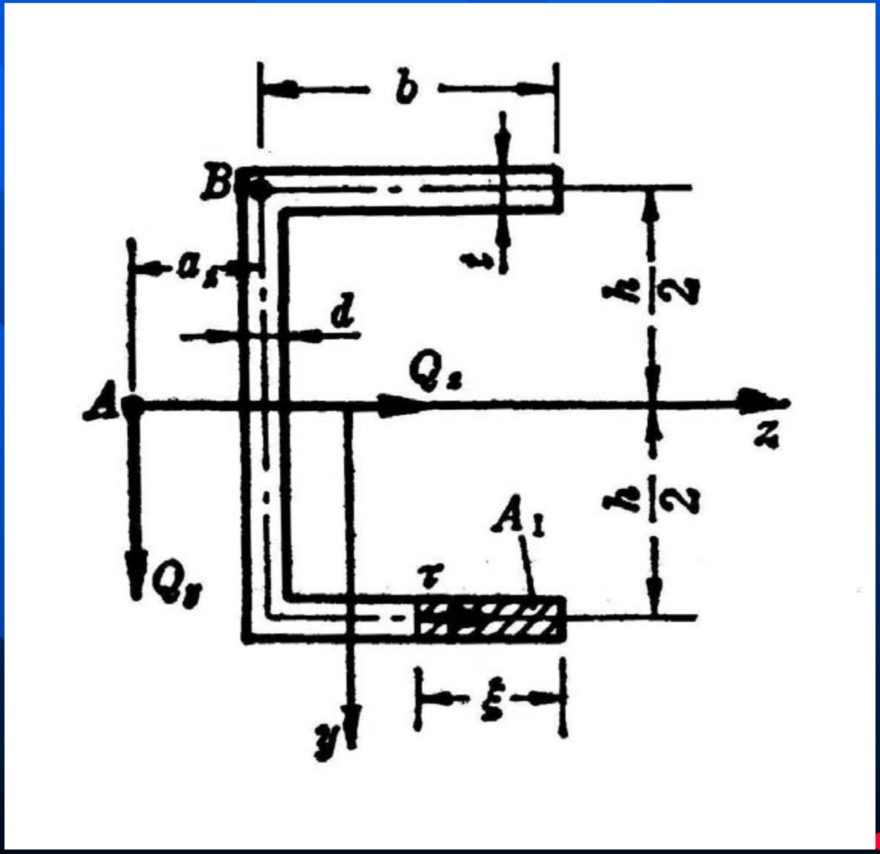


- 切应力的分布情况 切应力流
- 为求 a_z，可以B为矩心
- 下翼缘 ξ 处的切应力：



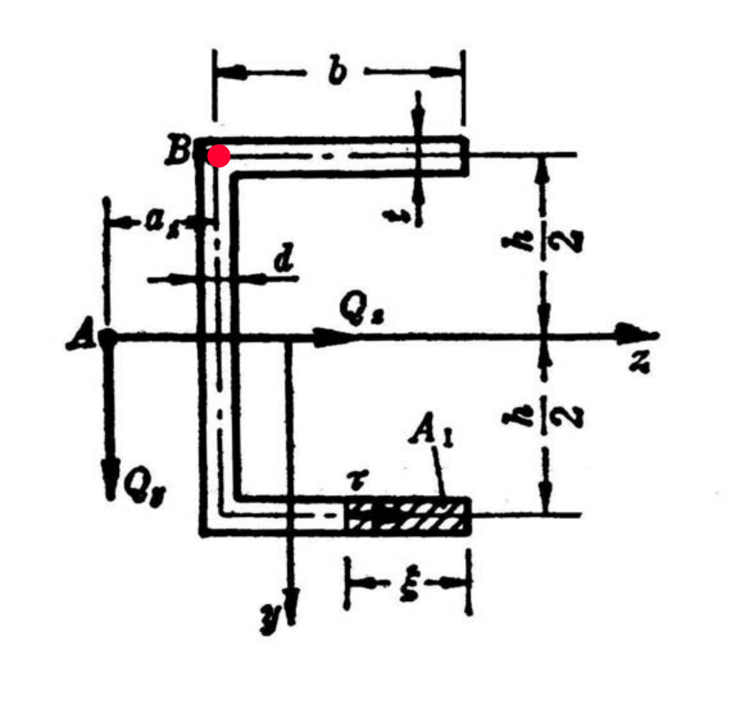
- 切应力公式 $\tau = \dfrac{Q_y S_z^*}{I_z t}$
- A_1的静矩 $S_z^* = \xi t \cdot \dfrac{h}{2}$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{Q_y \xi h}{2 I_z}$$



◆ 计算a_z

$$\tau=\frac{Q_y\xi h}{2I_z}$$



$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0$$

$$Q_y a_z=\int_A \tau \,\mathrm{d}A\cdot r$$

$$=\int_0^b h\cdot\frac{Q_y\xi h}{2I_z}t\,\mathrm{d}\xi=\frac{Q_y h^2 b^2 t}{4I_z}$$

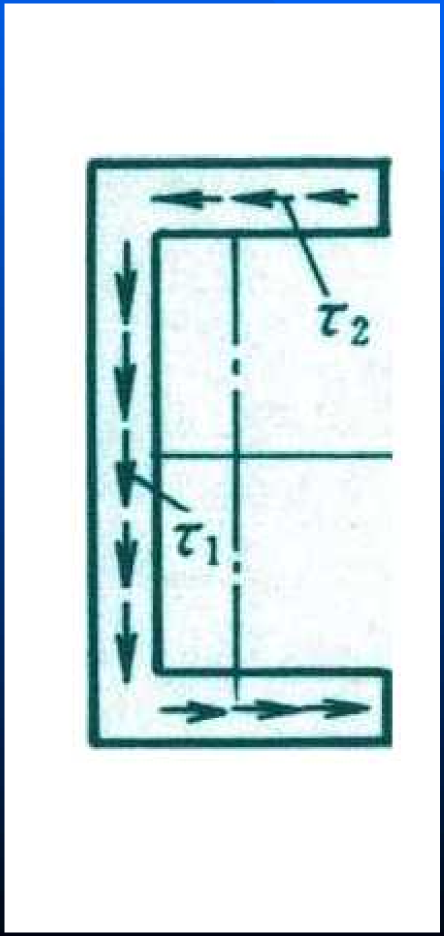
$$\longrightarrow \quad a_z=\frac{h^2b^2t}{4I_z}$$

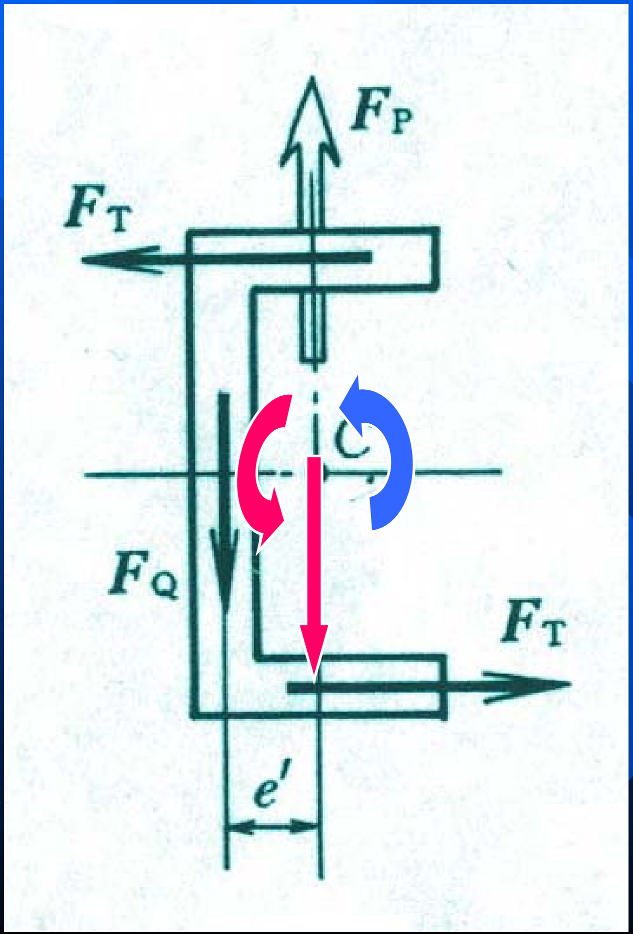
- 又，弯曲中心必在对称轴上。⟶ A为弯曲中心
- 弯曲中心的位置与材料性质及外载荷无关

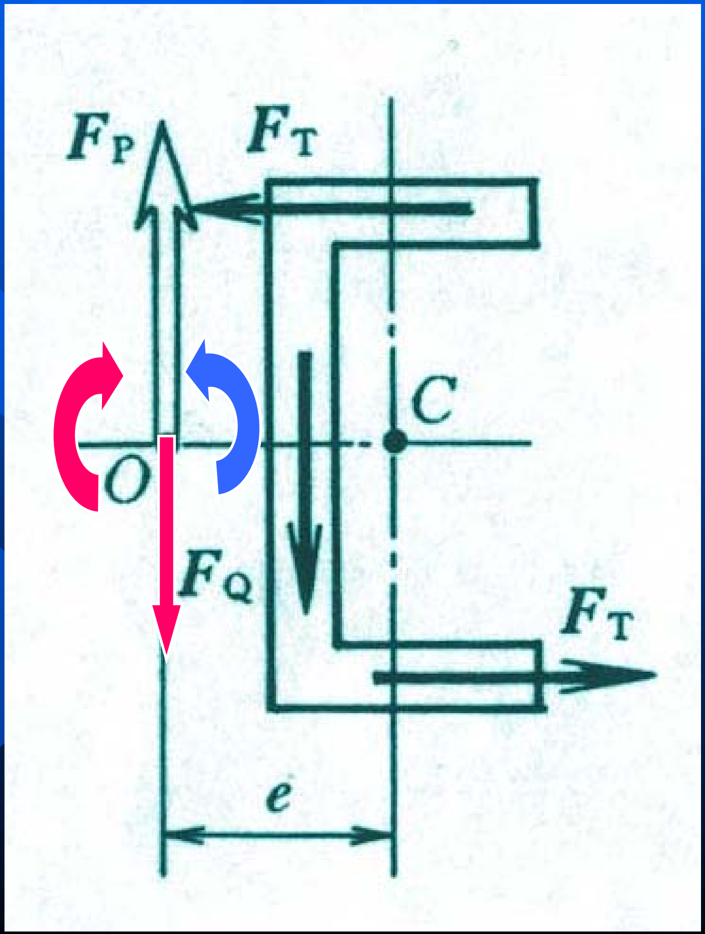
所以，弯曲中心是截面的一个几何性质。

◆ 从本例看，为什么当剪力Q的作用线不通过弯曲中心，就会产生扭转。

◆向形心简化　◆向弯曲中心简化







谢 谢 大 家！