

材料力学

第七章

应力和应变分析 强度理论

南京航空航天大学
陶秋帆等

第七章 应力和应变分析 强度理论

本章内容:

- 1 应力状态概述
- 2 二向和三向应力状态的实例
- 3 二向应力状态分析 —— 解析法
- 4 二向应力状态分析 —— 图解法
- 5 三向应力状态
- 6 位移与应变分量
- 7 平面应变状态分析
- 8 广义胡克定律

- 3 二向应力状态分析 —— 解析法
- 4 二向应力状态分析 —— 图解法
- 5 三向应力状态
- 6 位移与应变分量
- 7 平面应变状态分析
- 8 广义胡克定律
- 9 复杂应力状态的变形比能
- 10 强度理论概述
- 11 四种常用强度理论
- 12 莫尔强度理论
- 13 构件含裂纹时的断裂准则

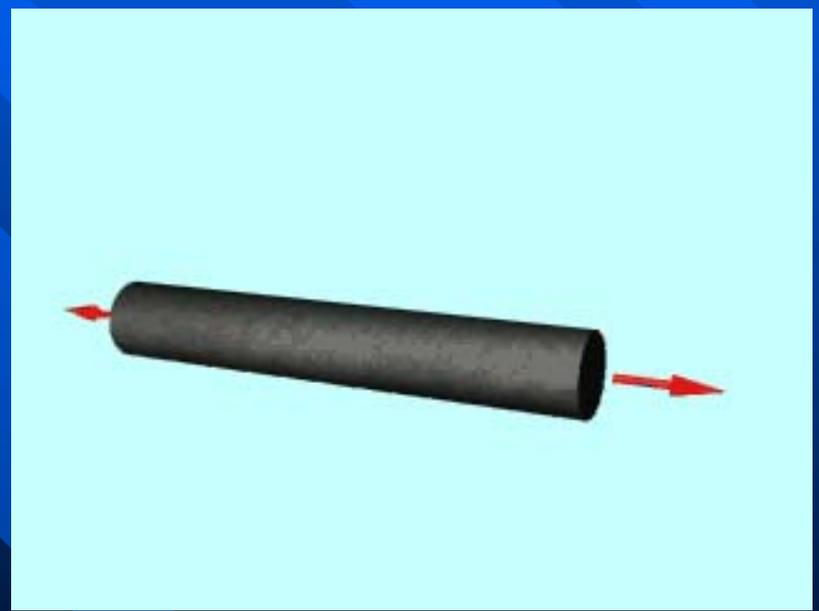
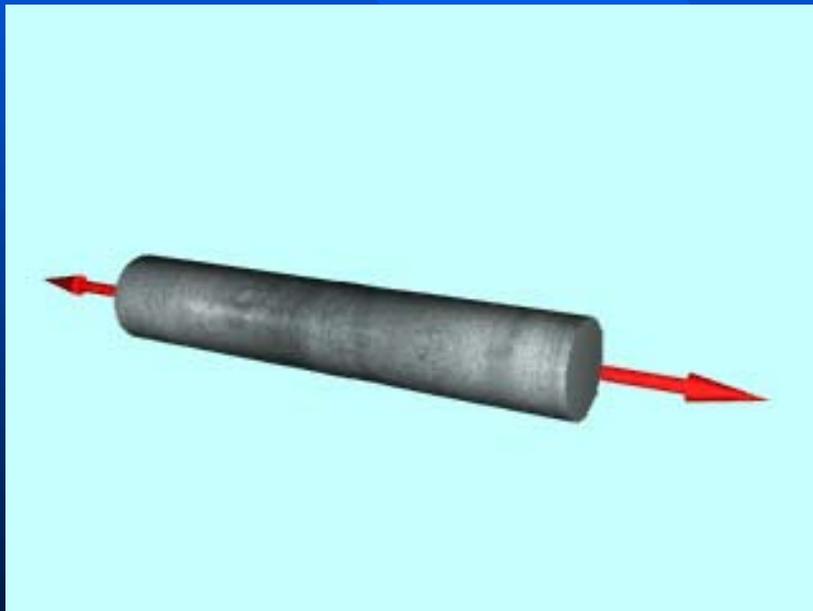
§ 7.1 应力状态概述

1 问题的提出

- 低碳钢和铸铁的拉伸实验

 - ◆ 低碳钢的拉伸实验

 - ◆ 铸铁的拉伸实验

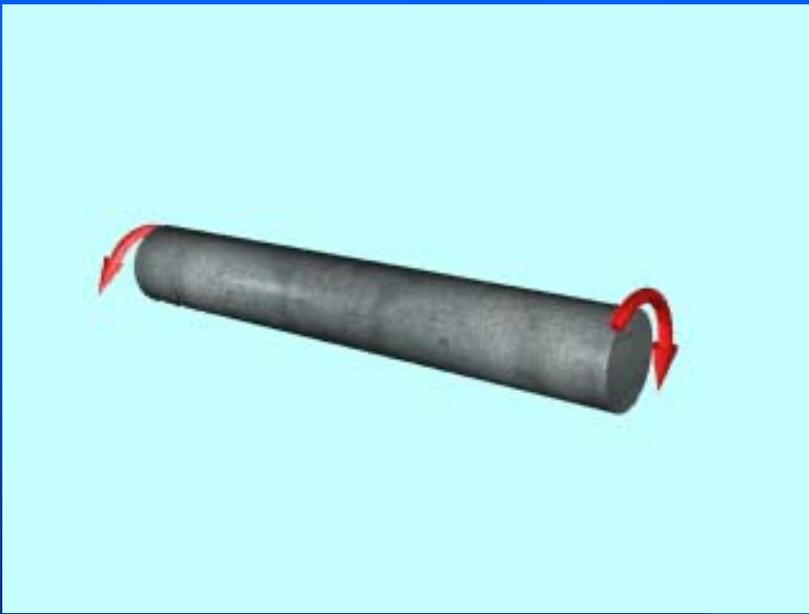


问题：为什么低碳钢拉伸时会出现 45° 滑移线？

- 低碳钢和铸铁的扭转实验

- ◆ 低碳钢的扭转实验

- ◆ 铸铁的扭转实验



问题：为什么铸铁扭转时会沿 45° 螺旋面断开？
所以，不仅要研究横截面上的应力，而且也要研究斜截面上的应力。

2 应力的三个重要概念

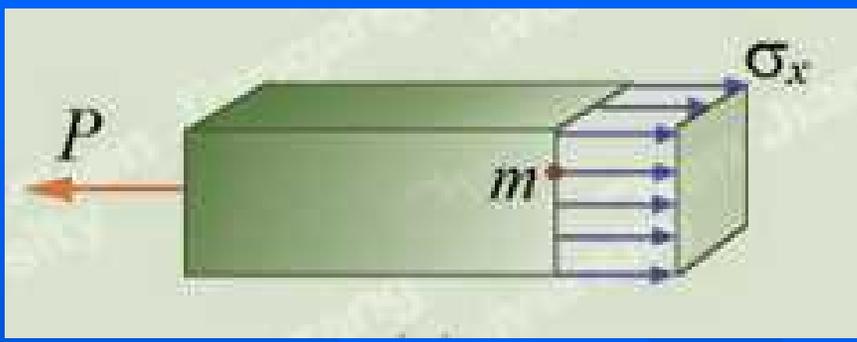
- 应力的点的概念



同一物体内不同点的应力各不相同，此即应力的点的概念。

- 应力的面的概念

- 应力的面的概念



过同一点的不同方向的截面上的应力各不相同，此即应力的面的概念。

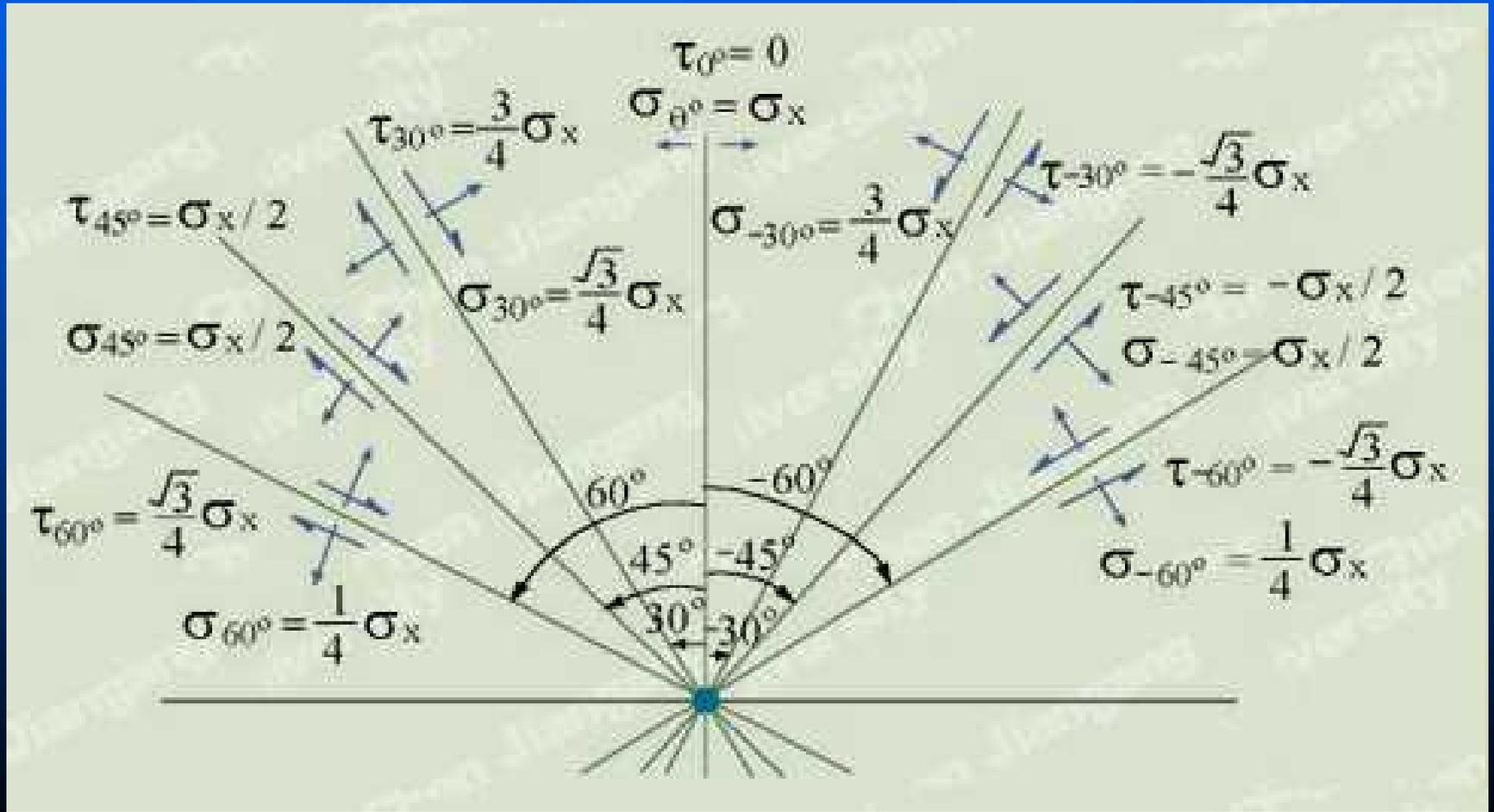
所以，讲到应力，应指明是哪一点在哪一方向面上的应力。

- 应力状态的概念

过一点的不同方向面上的应力的集合，称为这一点的应力状态。

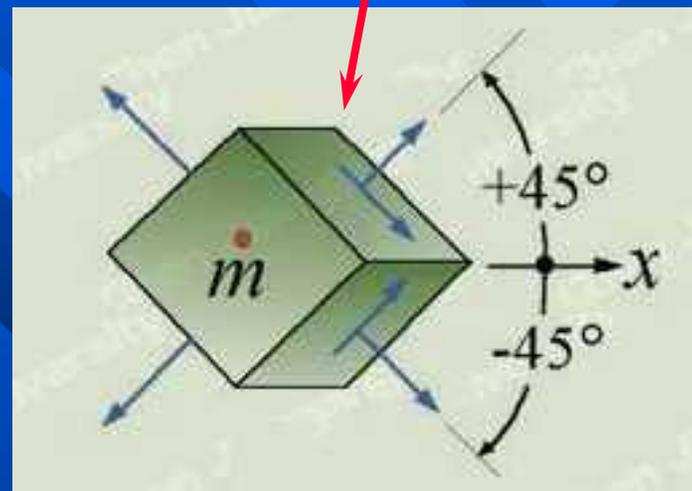
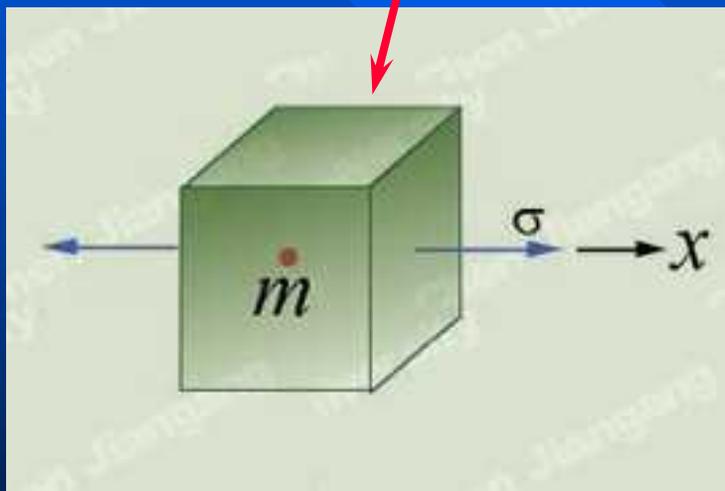
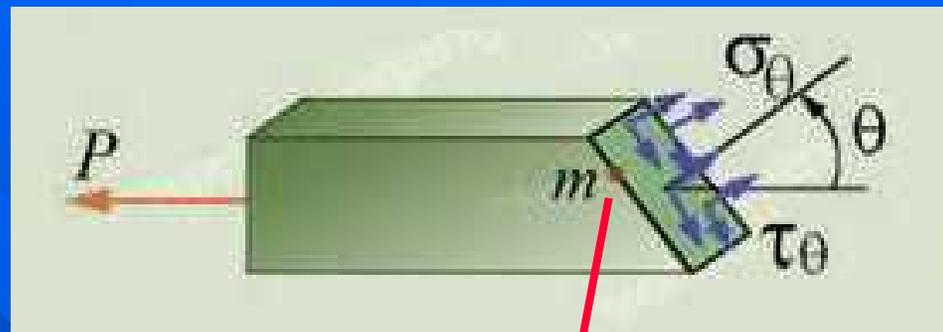
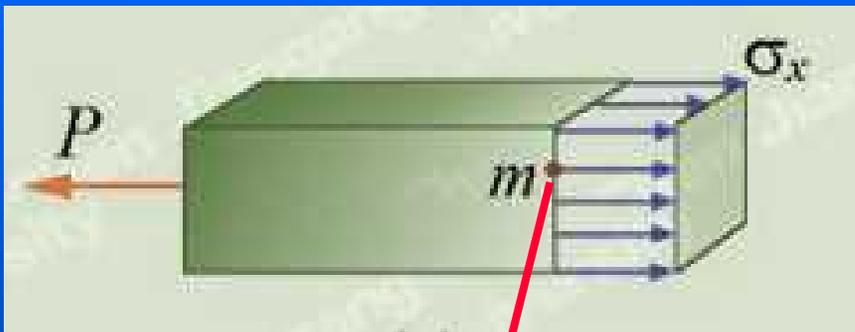
- 应力状态的概念

过一点的不同方向面上的应力的集合，称为这一点的应力状态。



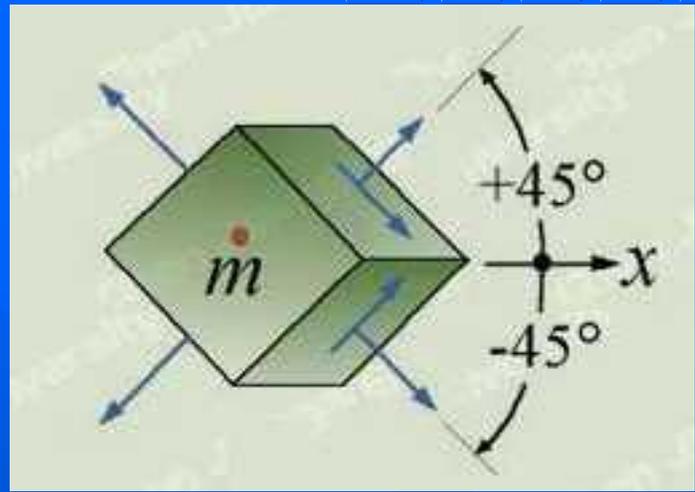
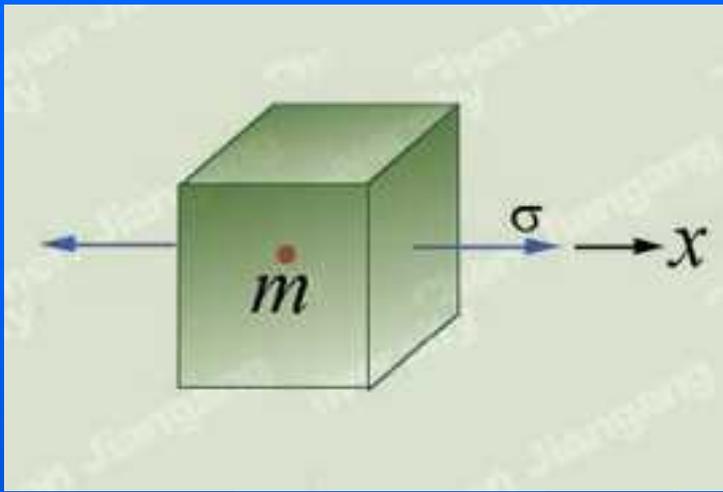
3 一点应力状态的描述

- 单元体



- 单元体的特点

- ◆ 单元体的边长 dx, dy, dz 均为无穷小量;



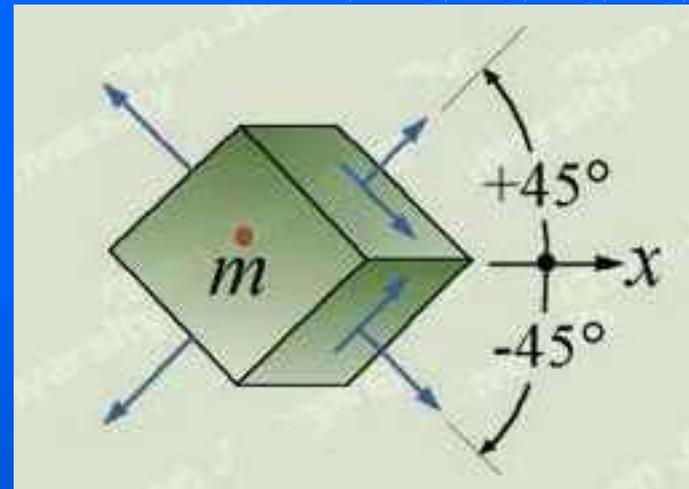
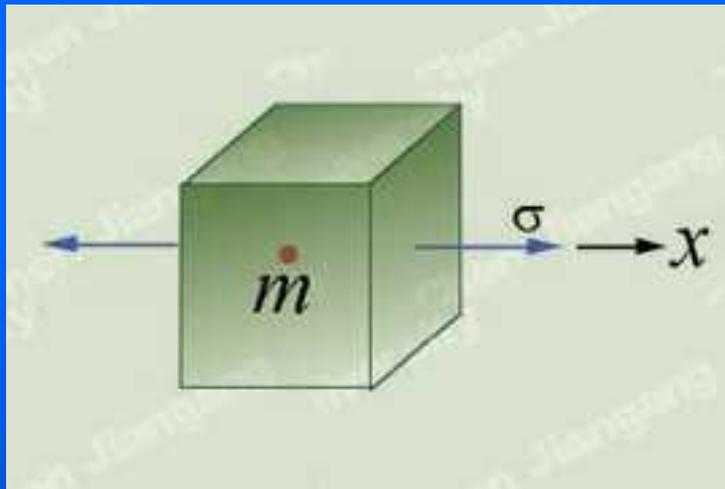
● 单元体的特点

- ◆ 单元体的边长 dx, dy, dz 均为无穷小量;
- ◆ 单元体的每一个面上, 应力均匀分布;
- ◆ 单元体中相互平行的两个面上, 应力相同。

4 主应力及应力状态的分类

● 主应力和主平面

切应力全为零时的正应力称为主应力;



4 主应力及应力状态的分类

- 主应力和主平面

切应力全为零时的正应力称为主应力；

主应力所在的平面称为主平面；

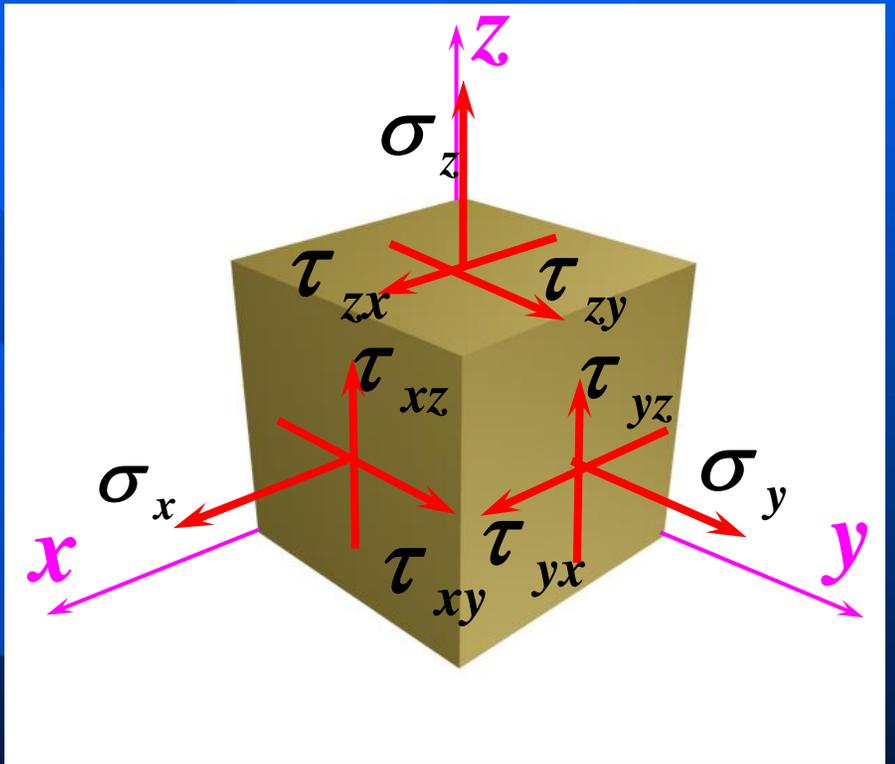
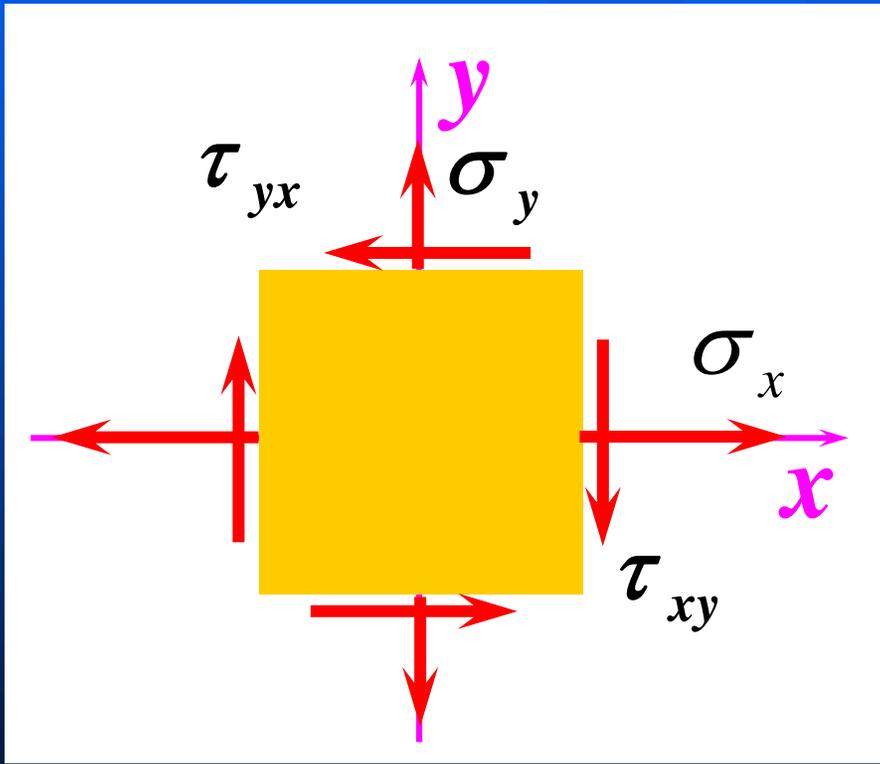
主平面的外法线方向称为主方向。

主应力用 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 表示 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$)。

- 应力状态分类

- ◆ 单向应力状态

- 应力状态分类
 - ◆ 单向应力状态
 - ◆ 二向应力状态(平面应力状态)
 - ◆ 三向应力状态(空间应力状态)



- ◆ 简单应力状态
- ◆ 复杂应力状态

§ 7.2 二向和三向应力状态的实例

1 二向应力状态的实例

- 薄壁圆筒

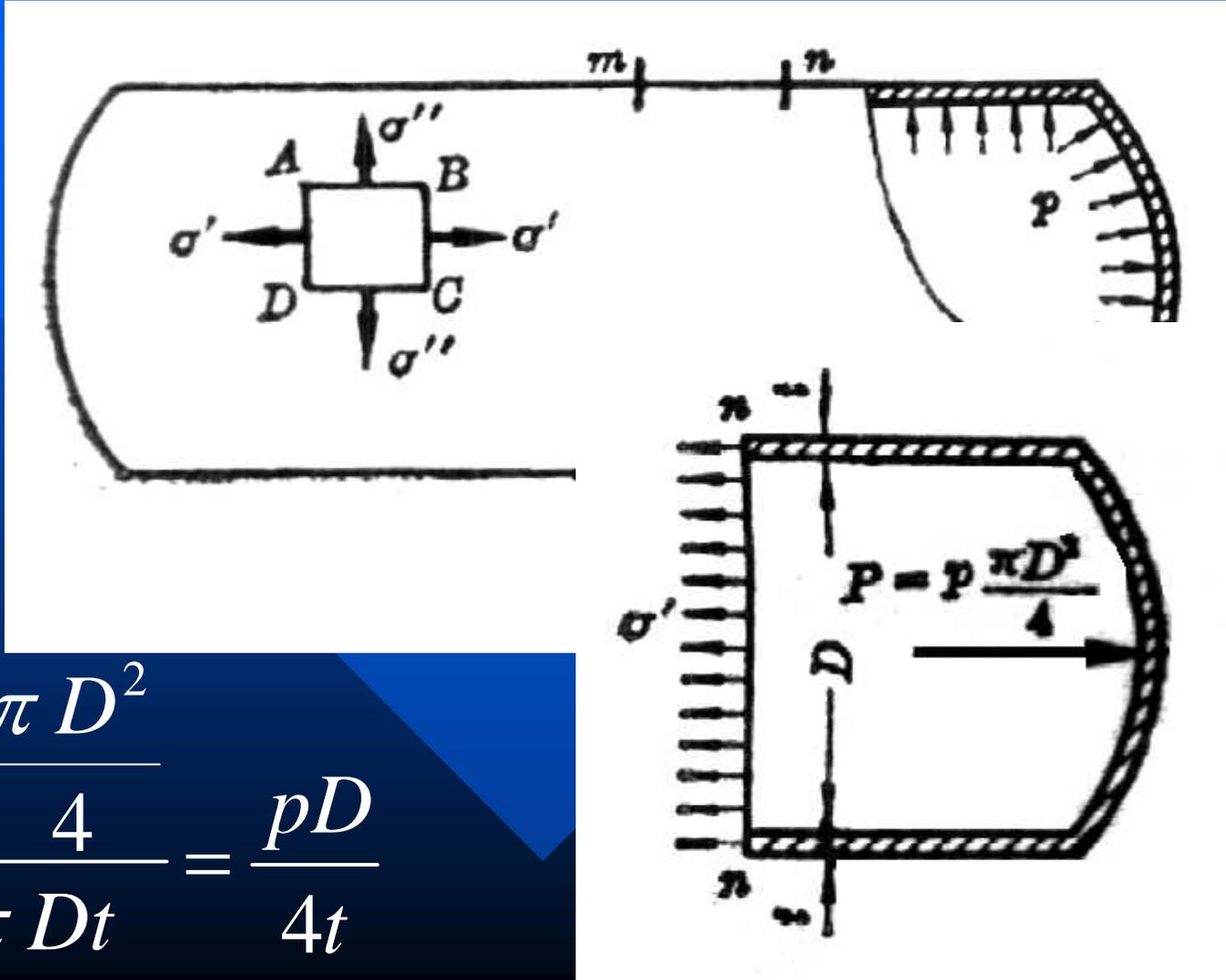
已知: $p, D,$
 $t。$

◆ 求 σ'

端部总压力

$$P = p \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\sigma' = \frac{P}{A} = \frac{p \frac{\pi D^2}{4}}{\pi D t} = \frac{p D}{4 t}$$

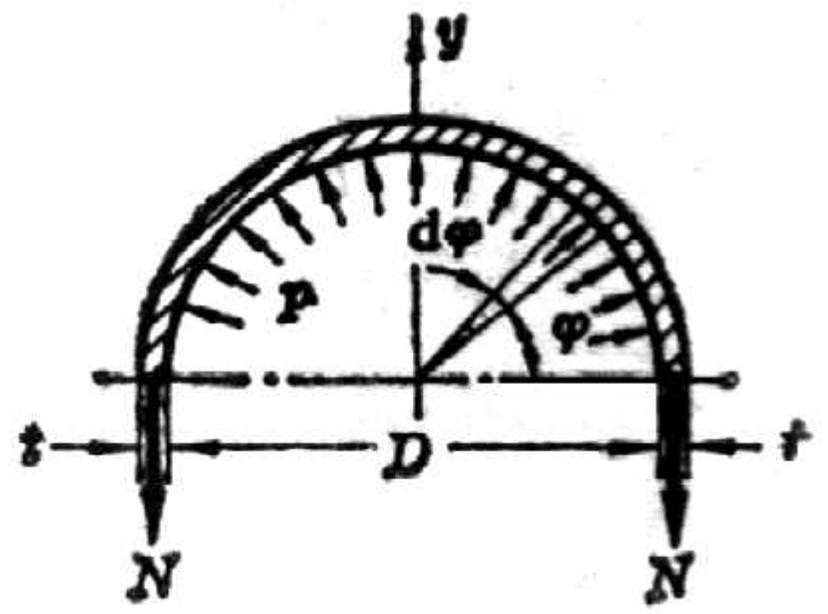
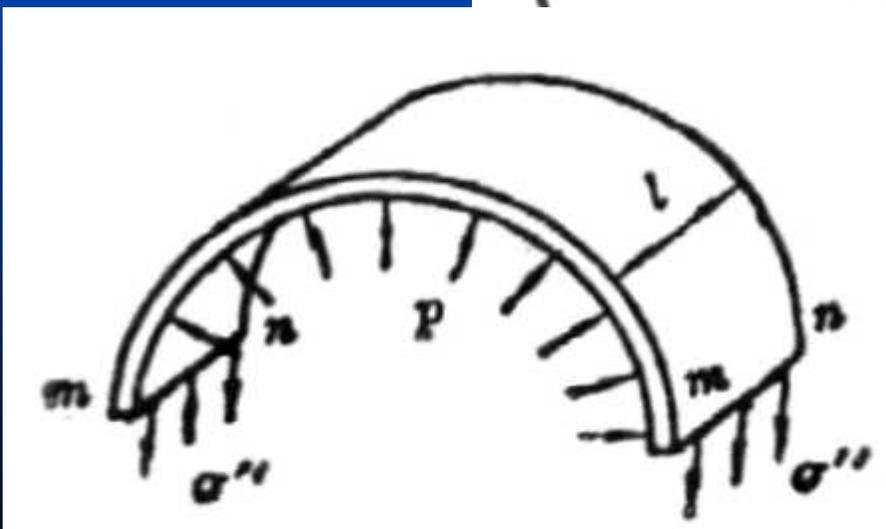
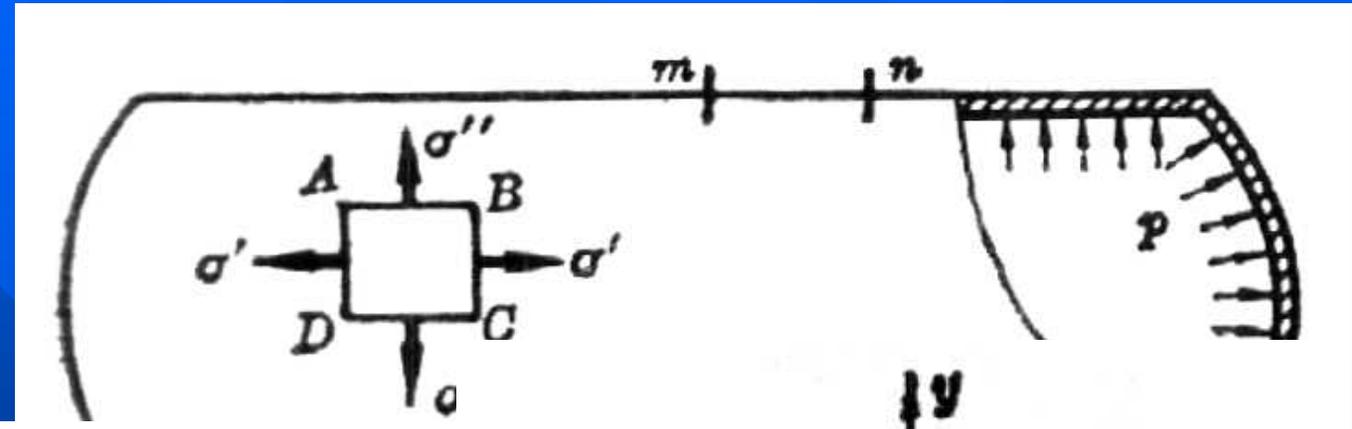


◆ 求 σ'

$$\sigma' = \frac{P}{A} = \frac{p \frac{\pi D^2}{4}}{\pi D t} = \frac{p D}{4 t}$$

◆ 求 σ''

取研究对象
如图。



◆ 求 σ''

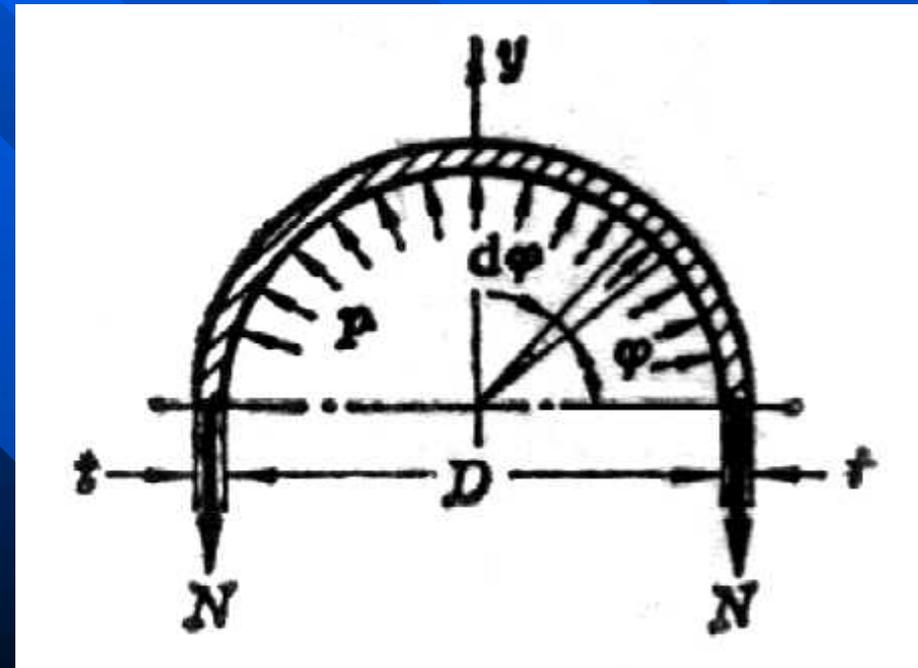
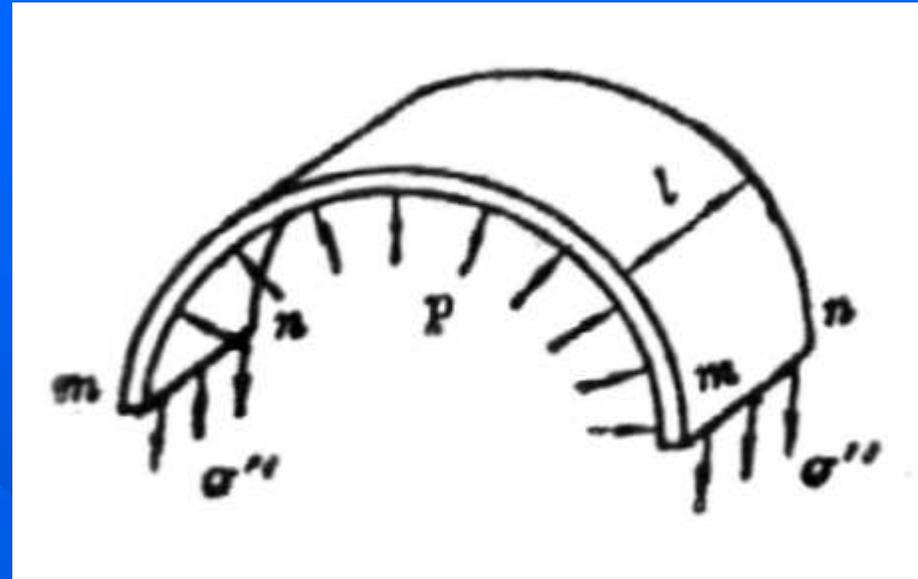
计算 N 力

$$\sum Y = 0$$

$$2N = \int_0^\pi p \cdot l \frac{D}{2} d\varphi \cdot \sin \varphi$$
$$= plD$$

即：内压力在 y 方向的投影等于内压乘以投影面积。

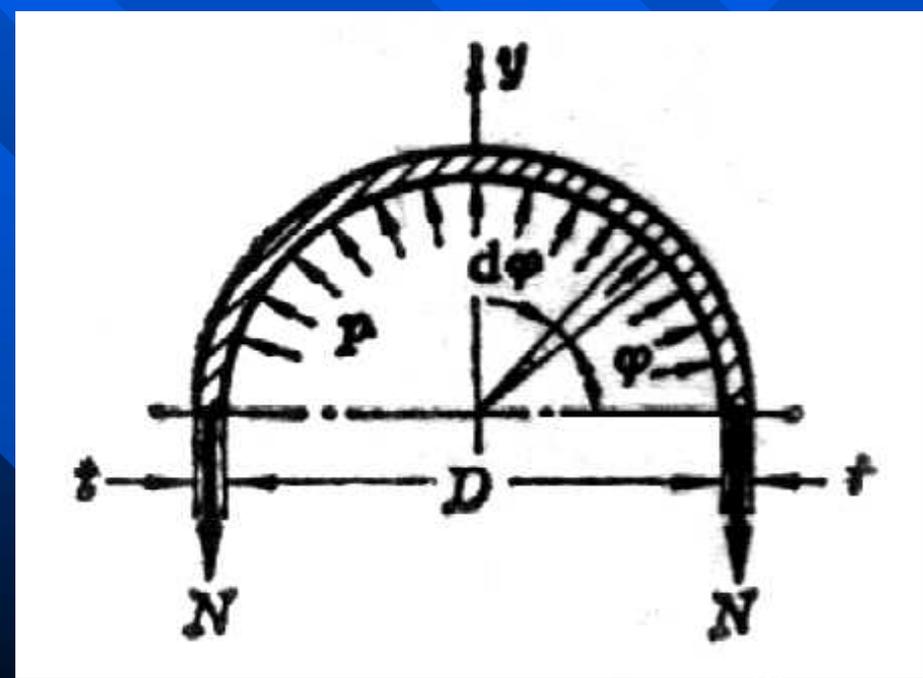
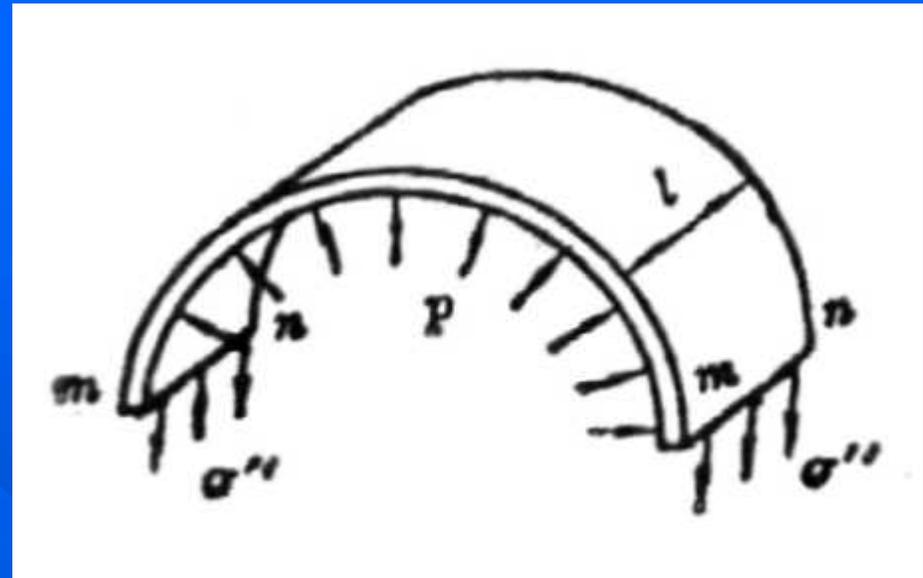
→ $N = \frac{plD}{2}$



→
$$N = \frac{plD}{2}$$

所以
$$\sigma'' = \frac{N}{A} = \frac{N}{t \cdot l}$$

→
$$\sigma'' = \frac{pD}{2t}$$



$$\sigma' = \frac{pD}{4t}, \quad \sigma'' = \frac{pD}{2t}$$

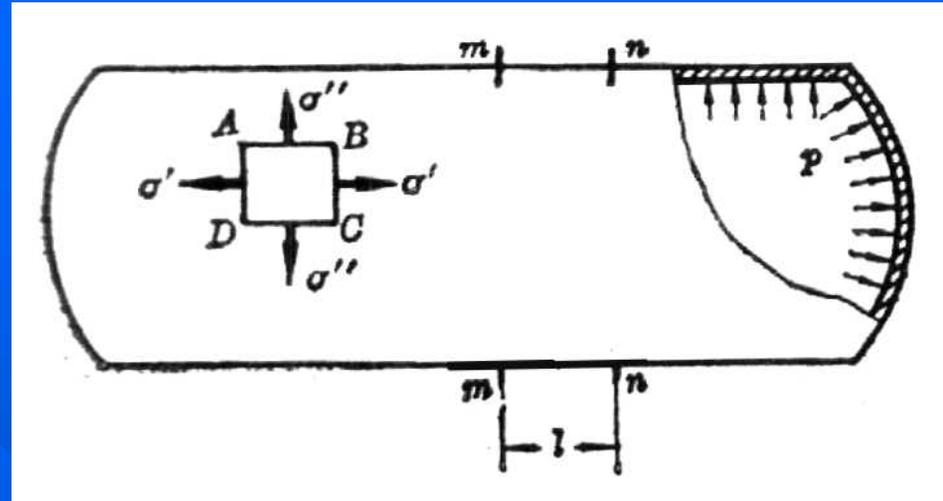
可以看出：轴向应力 σ' 是环向应力 σ'' 的一半。

对于薄壁圆筒，有：

$$t < \frac{D}{20}$$

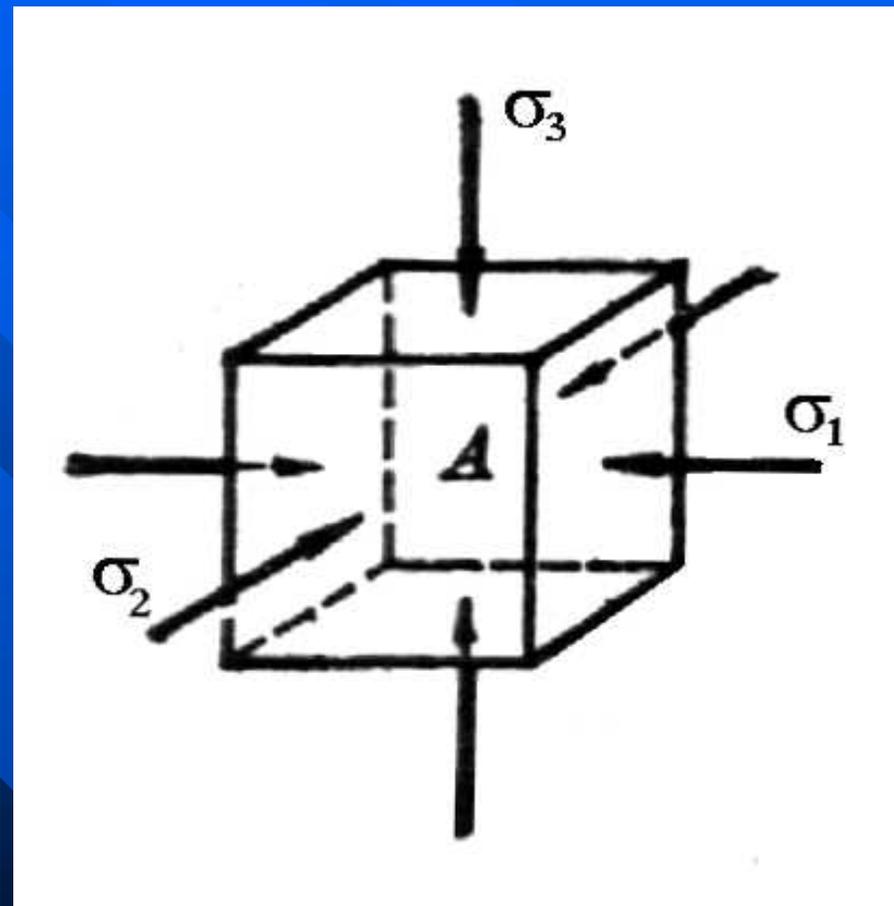
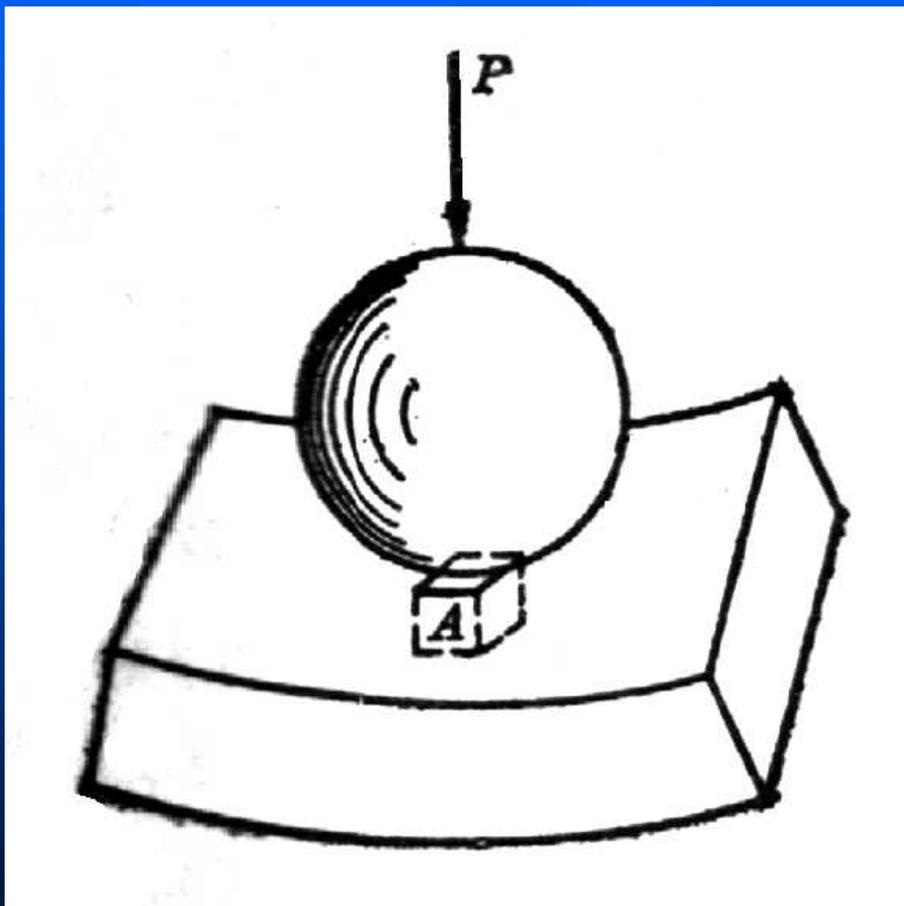
$$\rightarrow \sigma' > 5p, \quad \sigma'' > 10p$$

所以，可以忽略内表面受到的内压 p 和外表面受到的大气压强，近似作为二向应力状态处理。



2 三向应力状态的实例

- 滚珠轴承



例 2 (书例8.1)

已知：蒸汽锅炉，
 $t=10\text{mm}$, $D=1\text{m}$,
 $p=3\text{MPa}$ 。

求：三个主应力。

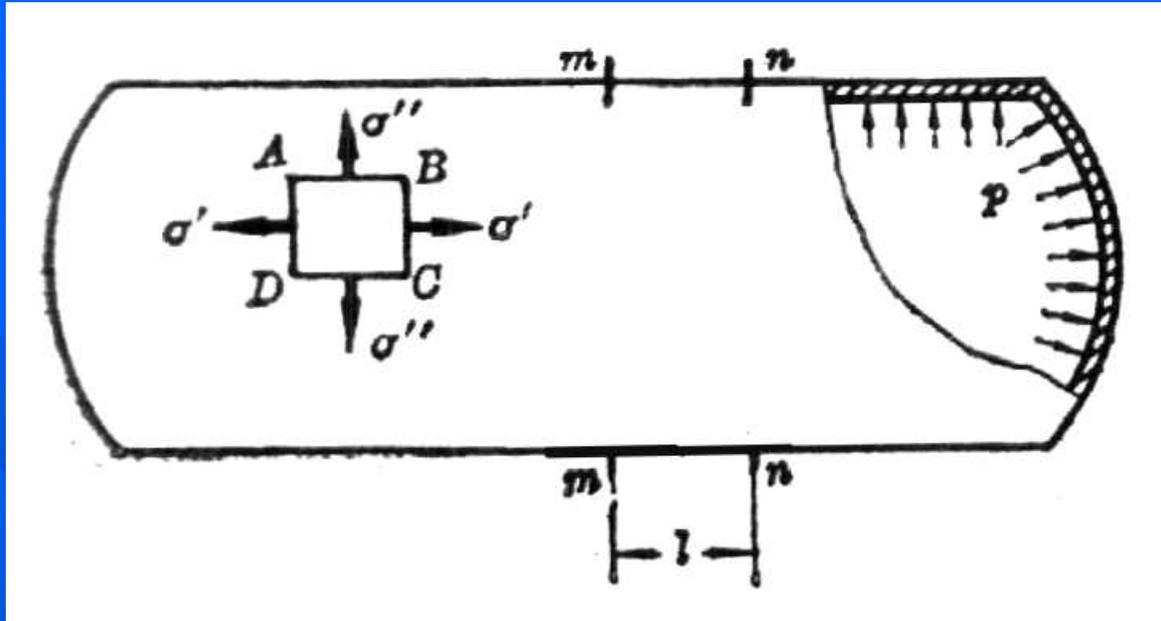
解：

前面已得到

$$\sigma' = \frac{pD}{4t} = 75 \text{ MPa},$$

$$\sigma'' = \frac{pD}{2t} = 150 \text{ MPa}$$

→ $\sigma_1 = \sigma'' = 150 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = \sigma' = 75 \text{ MPa}$, $\sigma_3 \approx 0$



例 3 (书例8.2)

已知：球形容器， t ， D ， p 。

求：容器壁内的应力。

解：取研究对象如图。

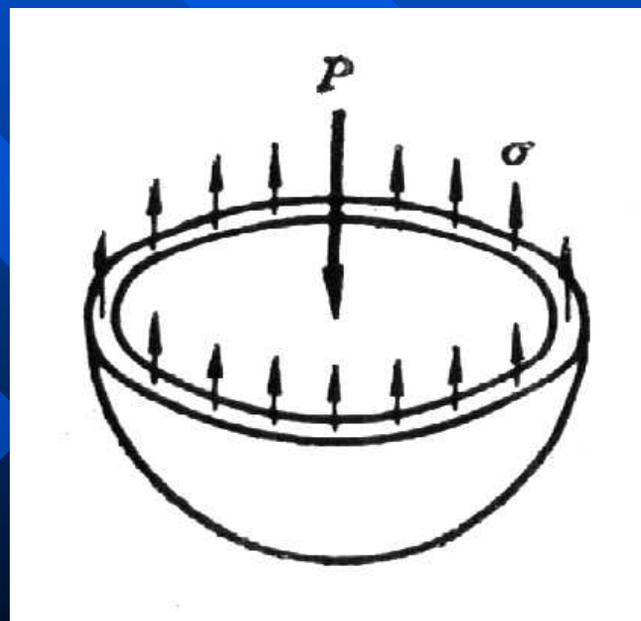
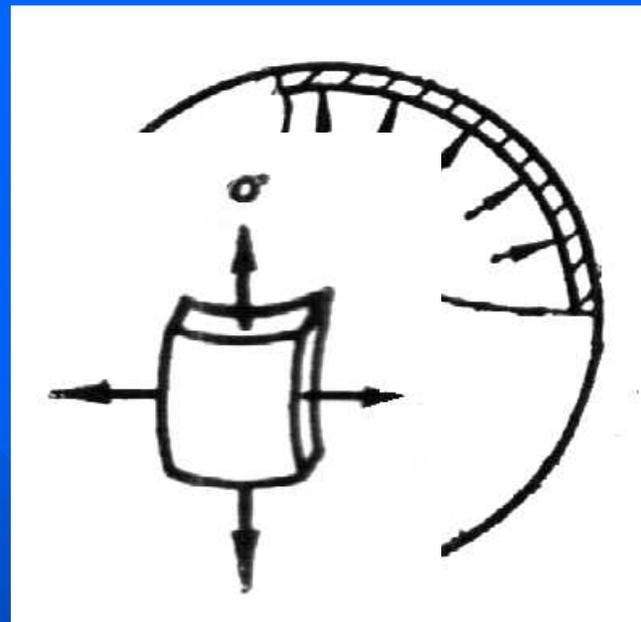
与薄壁圆筒的情况类似，有：

$$P = p \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\sum Y = 0 \quad \sigma \cdot \pi D t = P = p \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\rightarrow \quad \sigma = \frac{pD}{4t}$$

所以： $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ， $\sigma_3 \approx 0$



§ 7.3 二向应力状态分析 —— 解析法

- 应力状态分析

在已知过一点的某些截面上的应力时，求出过该点的任一截面上的应力，从而求出主应力和主平面。

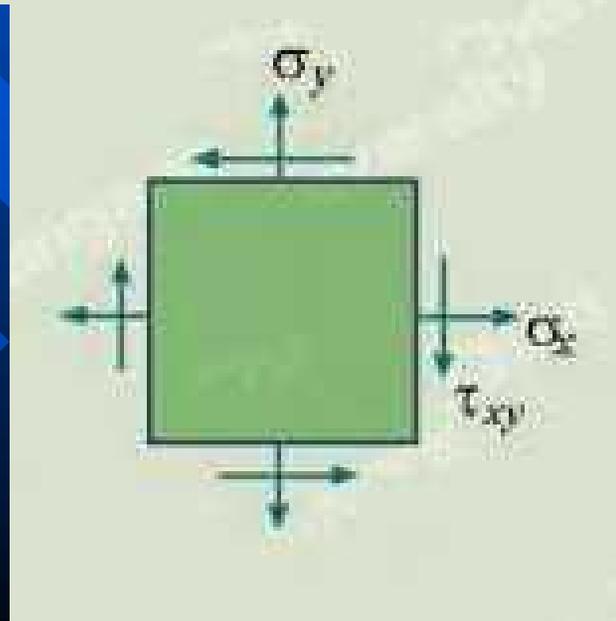
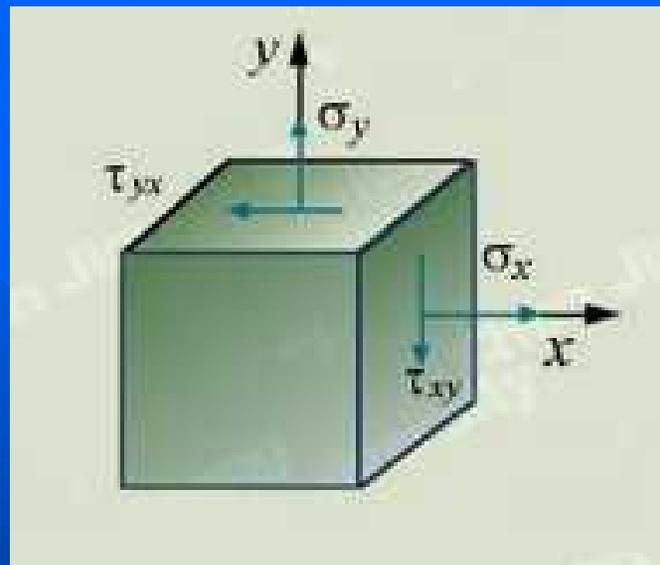
- 二向应力状态的表示

- ◆ 切应力的下标 τ_{xy}



作用面的法线

切应力的方向

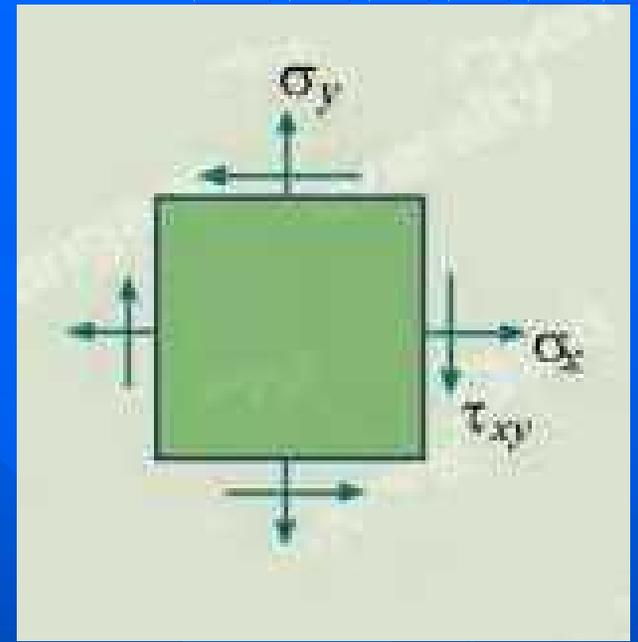


● 二向应力状态的表示

◆ 切应力的下标 τ_{xy}

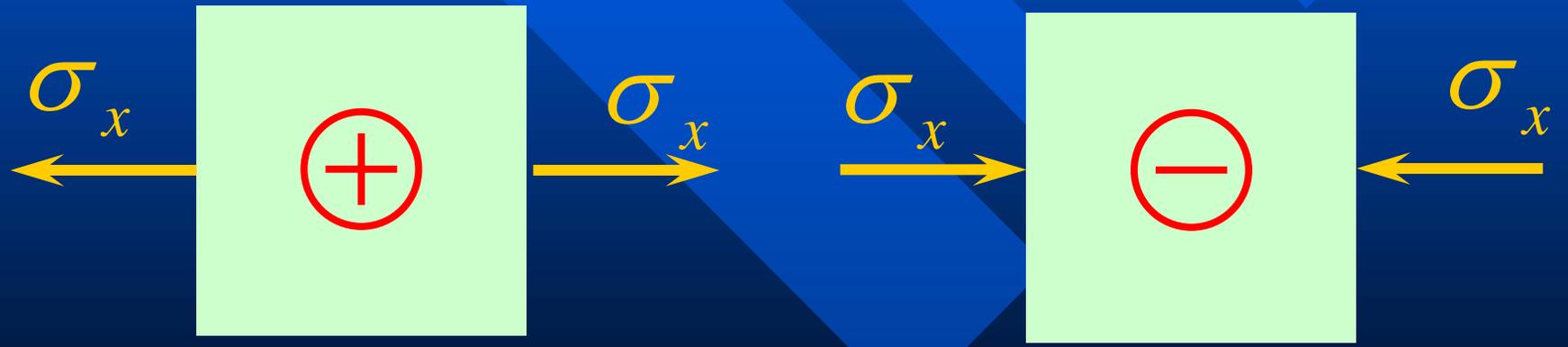
作用面的法线

切应力的方向



◆ 正负号规定

♂ 正应力



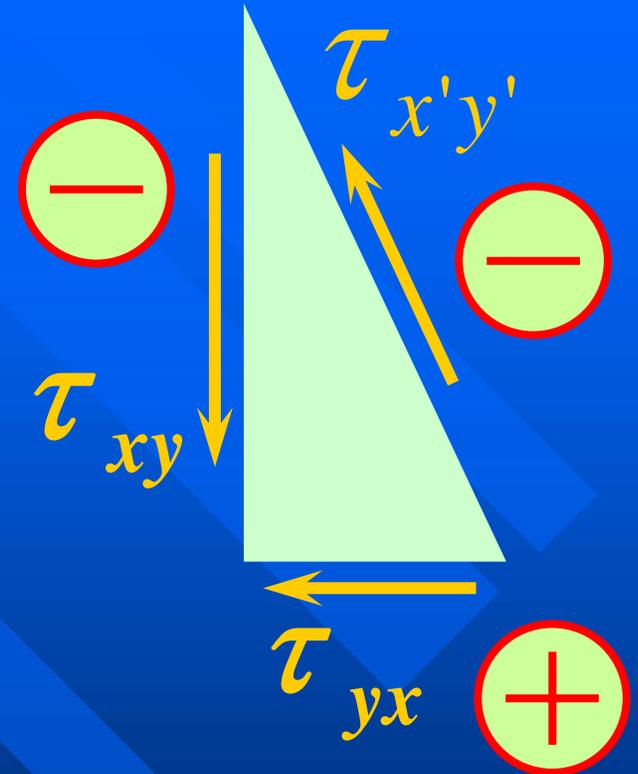
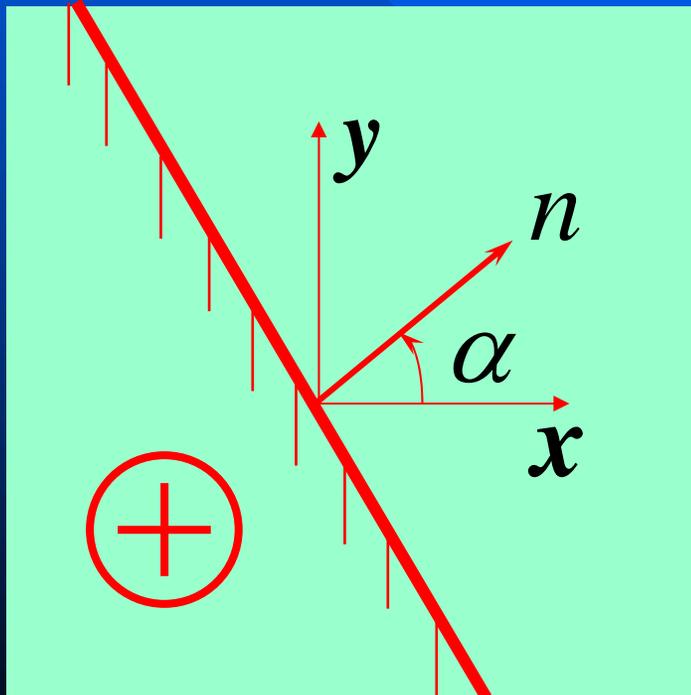
拉为正

压为负

剪应力

使单元体顺时针方向转动为正；反之为负。

截面的方向角



由x正向逆时针转到截面的外法线n的正向的 α 角为正；反之为负。

- 方向角为 α 的截面上的应力以单元体的一部分为研究对象。

由平衡条件

$$\sum F_n = 0$$

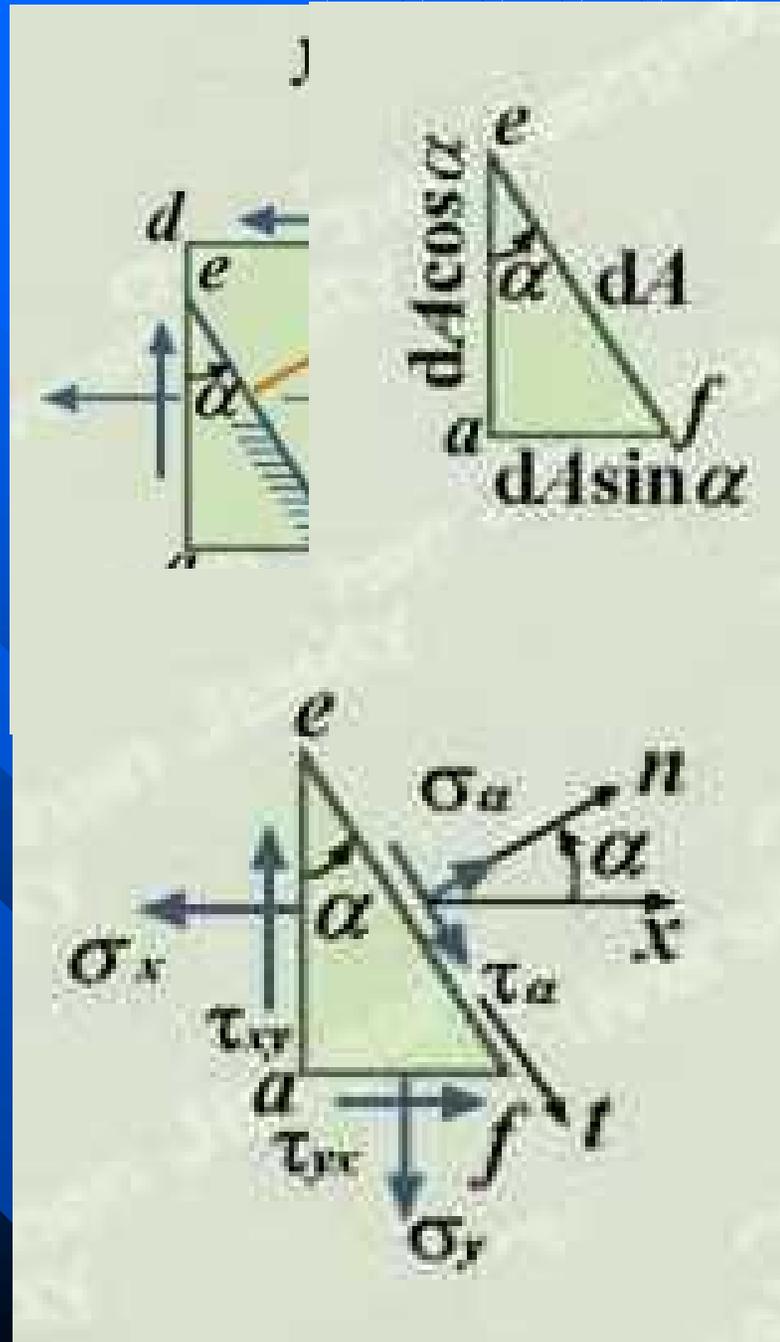
$$\sigma_\alpha dA + (\tau_{xy} dA \cos \alpha) \sin \alpha$$

$$- (\sigma_x dA \cos \alpha) \cos \alpha$$

$$+ (\tau_{yx} dA \sin \alpha) \cos \alpha$$

$$- (\sigma_y dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_t = 0$$

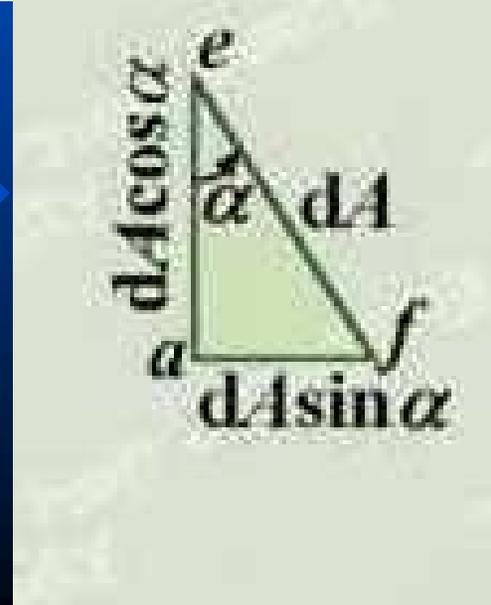
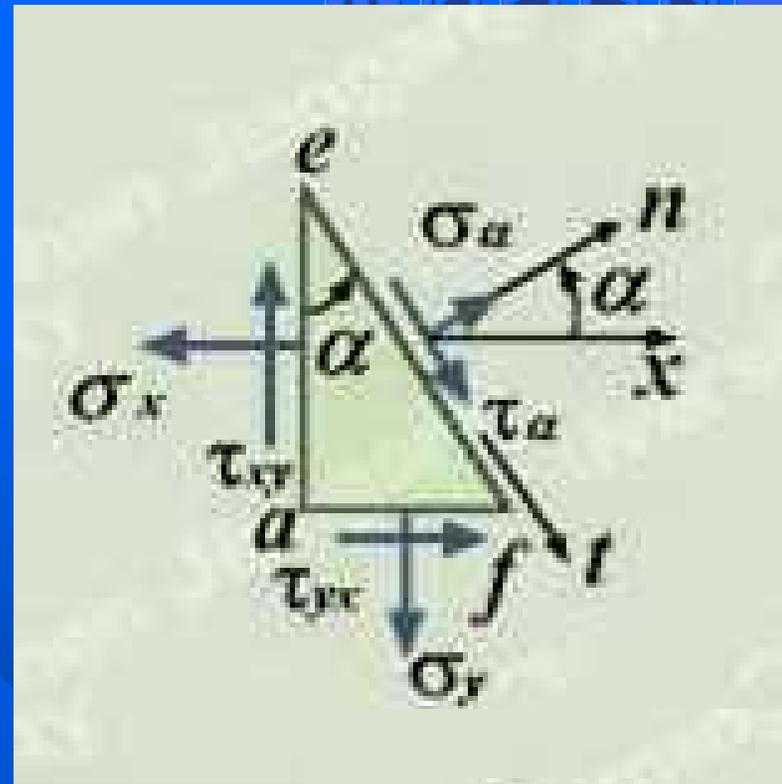


$$\sum F_n = 0$$

$$\begin{aligned} & \sigma_\alpha dA + (\tau_{xy} dA \cos \alpha) \sin \alpha \\ & - (\sigma_x dA \cos \alpha) \cos \alpha \\ & + (\tau_{yx} dA \sin \alpha) \cos \alpha \\ & - (\sigma_y dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

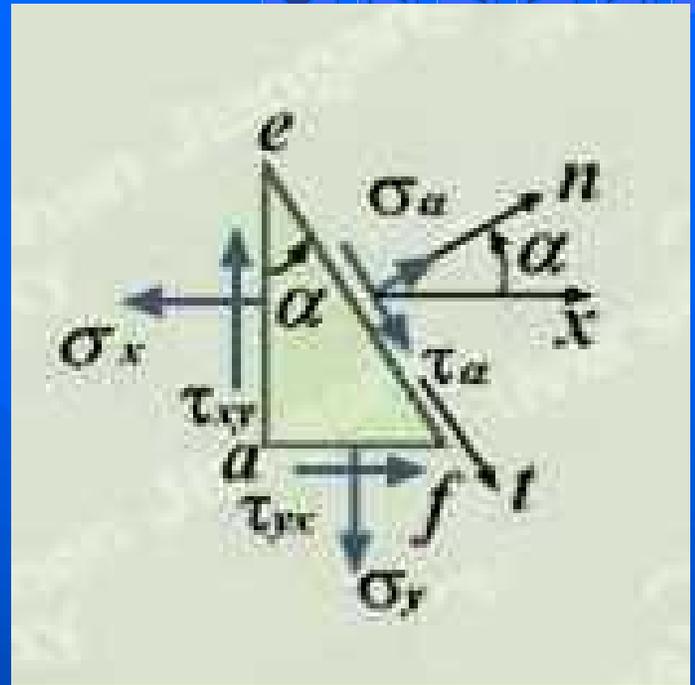
$$\sum F_t = 0$$

$$\begin{aligned} & \tau_\alpha dA - (\tau_{xy} dA \cos \alpha) \cos \alpha \\ & - (\sigma_x dA \cos \alpha) \sin \alpha \\ & + (\sigma_y dA \sin \alpha) \cos \alpha \\ & + (\tau_{yx} dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$



$$\sum F_t = 0$$

$$\begin{aligned} & \tau_\alpha dA - (\tau_{xy} dA \cos \alpha) \cos \alpha \\ & - (\sigma_x dA \cos \alpha) \sin \alpha \\ & + (\sigma_y dA \sin \alpha) \cos \alpha \\ & + (\tau_{yx} dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$



由切应力互等定理， τ_{xy} 与 τ_{yx} 大小相等。

$$\rightarrow \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

- 最大正应力和最小正应力

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha\right) = -2\tau_{\alpha}$$

令: $\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 0 \quad \longrightarrow \quad \tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

可以看出: 当 $\alpha = \alpha_0$ 时, $\tau_{\alpha} = 0$

\longrightarrow 取极值的正应力为主应力。

$$\text{令: } \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0 \quad \longrightarrow \quad \tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

可以看出: 当 $\alpha = \alpha_0$ 时, $\tau_\alpha = 0$

→ 取极值的正应力为主应力。

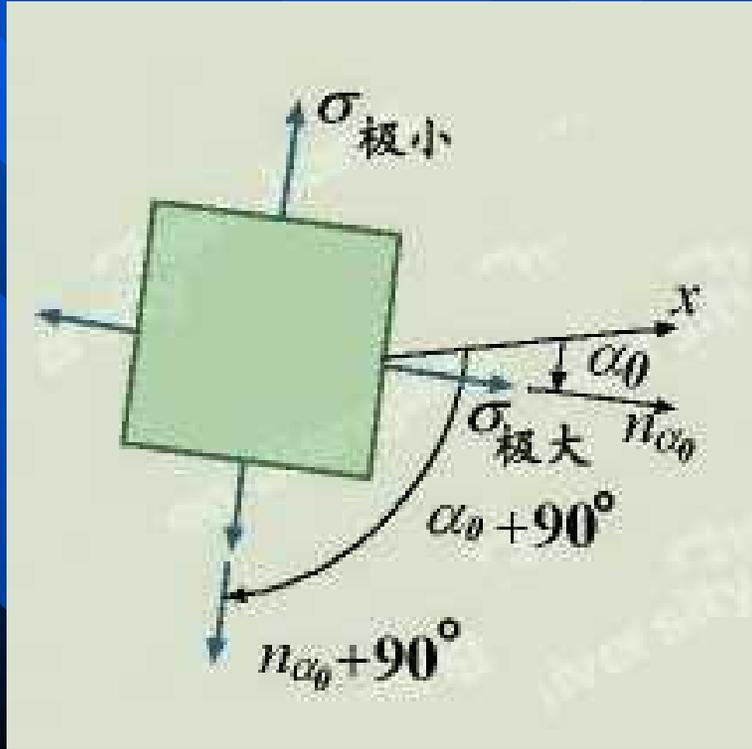
若 α_0 满足上式, 则 $\alpha_0 + 90^\circ$ 也满足上式, 代入公式可得:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

若 α_0 满足上式，则 $\alpha_0 + 90^\circ$ 也满足上式，代入公式可得：

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- 正应力的不变量



- 正应力的不变量

α 截面上的正应力为:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$\alpha + 90^\circ$ 截面上的正应力为:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha+90^\circ} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha + \pi) - \tau_{xy} \sin(2\alpha + \pi) \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned}$$



$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y$$

任意两个互相垂直的截面上的正应力之和为**常数**.

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

- 最大切应力和最小切应力

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha$$

令: $\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$

若 α_1 满足上式, 则 $\alpha_1 + 90^\circ$ 也满足上式, 代入公式可得:

$$\left. \begin{matrix} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

若 α_1 满足上式，则 $\alpha_1 + 90^\circ$ 也满足上式，代入公式可得：

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{array} \right\} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

- ◆ 切应力的极值称为主切应力
- ◆ 主切应力所在的平面称为主剪平面
- ◆ 主剪平面上的正应力

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

- ◆ 切应力的极值称为主切应力
- ◆ 主切应力所在的平面称为主剪平面
- ◆ 主剪平面上的正应力

将 α_1 和 $\alpha_1 + 90^\circ$ 代入公式可得：

$$\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_1 + 90^\circ} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) = \bar{\sigma}$$

即：主剪平面上的正应力为平均正应力。

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad \tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

将 α_1 和 $\alpha_1 + 90^\circ$ 代入公式可得：

$$\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_1 + 90^\circ} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) = \bar{\sigma}$$

即：主剪平面上的正应力为平均正应力。

● 主平面与主剪平面的关系

由 α_0 和 α_1 的公式可得： $\tan 2\alpha_0 \cdot \tan 2\alpha_1 = -1$

$$\rightarrow 2\alpha_1 = 2\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \alpha_1 = \alpha_0 \pm \frac{\pi}{4}$$

即：主平面与主剪平面的夹角为45°。

例 4 (书例8.3)

已知：圆轴受扭转。

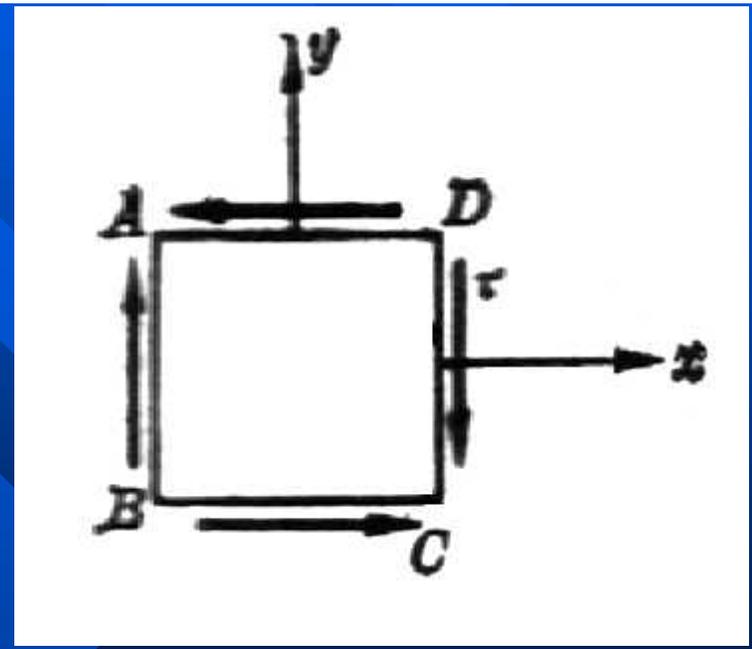
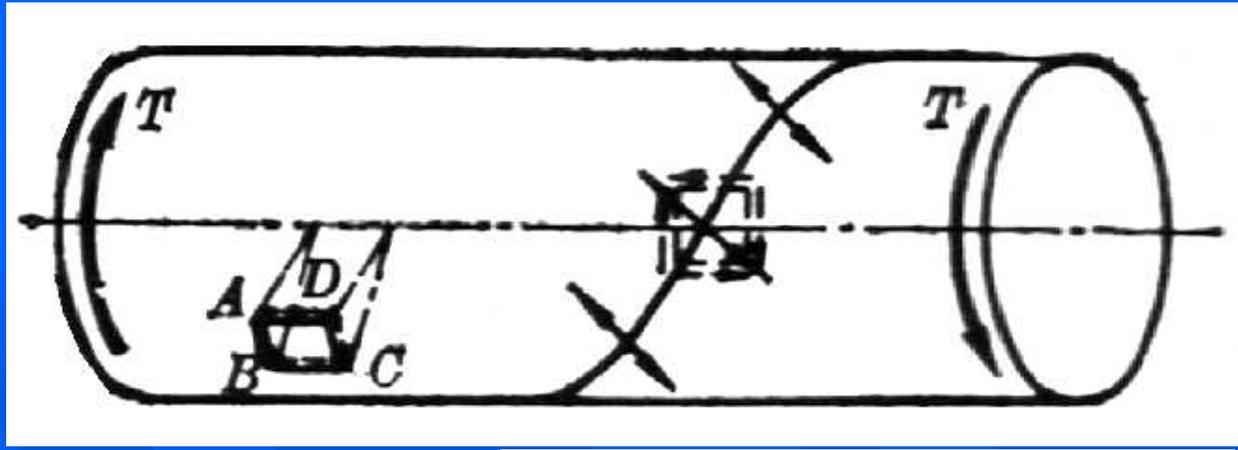
求：应力状态及分析铸铁件受扭时的破坏现象。

解：

◆ 最大切应力 $\tau = \frac{T}{W_t}$

◆ 取单元体 ABCD

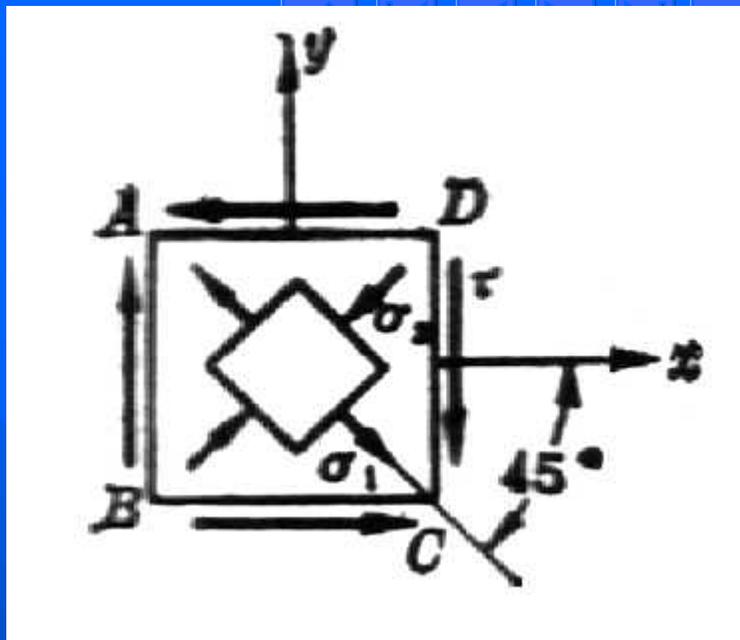
纯切应力状态 $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau$



◆ 取单元体 $ABCD$

纯切应力状态

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau$$



◆ 主应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \tau$$

◆ 主方向

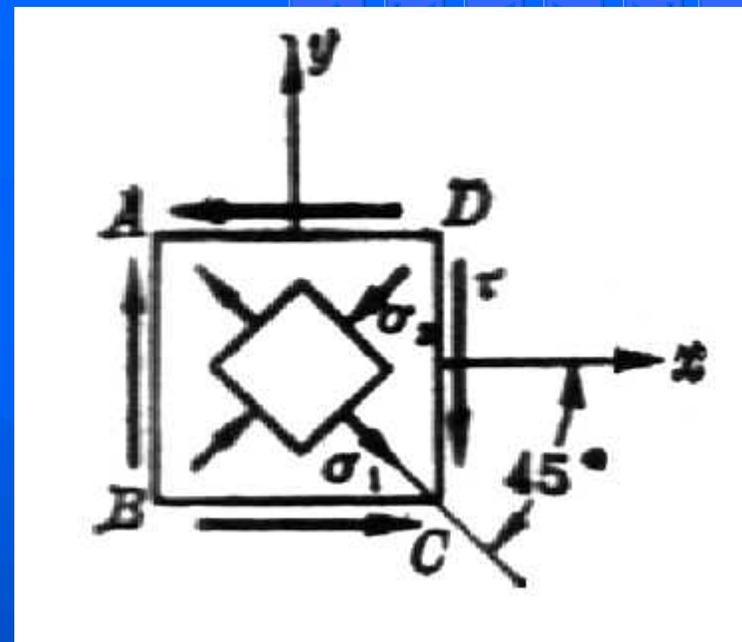
$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\infty$$



$$\alpha_0 = -45^\circ \quad \text{或} \quad \alpha_0 = -135^\circ$$

◆ 主应力 $\left. \begin{matrix} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{matrix} \right\} = \pm \tau$

◆ 主方向 $\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$
 $= -\infty$

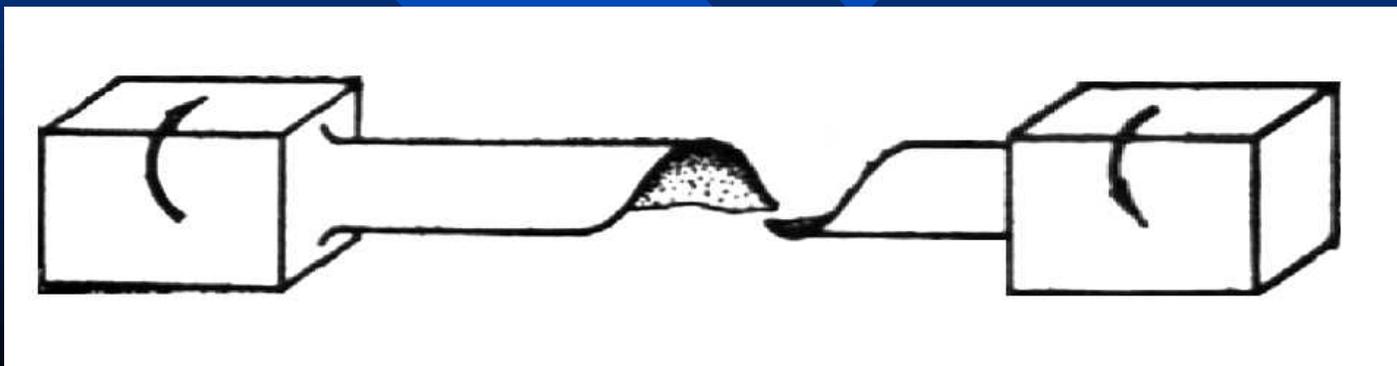


→ $\alpha_0 = -45^\circ$ 或 $\alpha_0 = -135^\circ$

◆ 主应力排序

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_{\min} = -\tau$$

◆ 铸铁件破坏现象



例 5 (书例8.4)

已知: A点应力

$$\sigma = -70\text{MPa},$$

$$\tau = 50\text{MPa}.$$

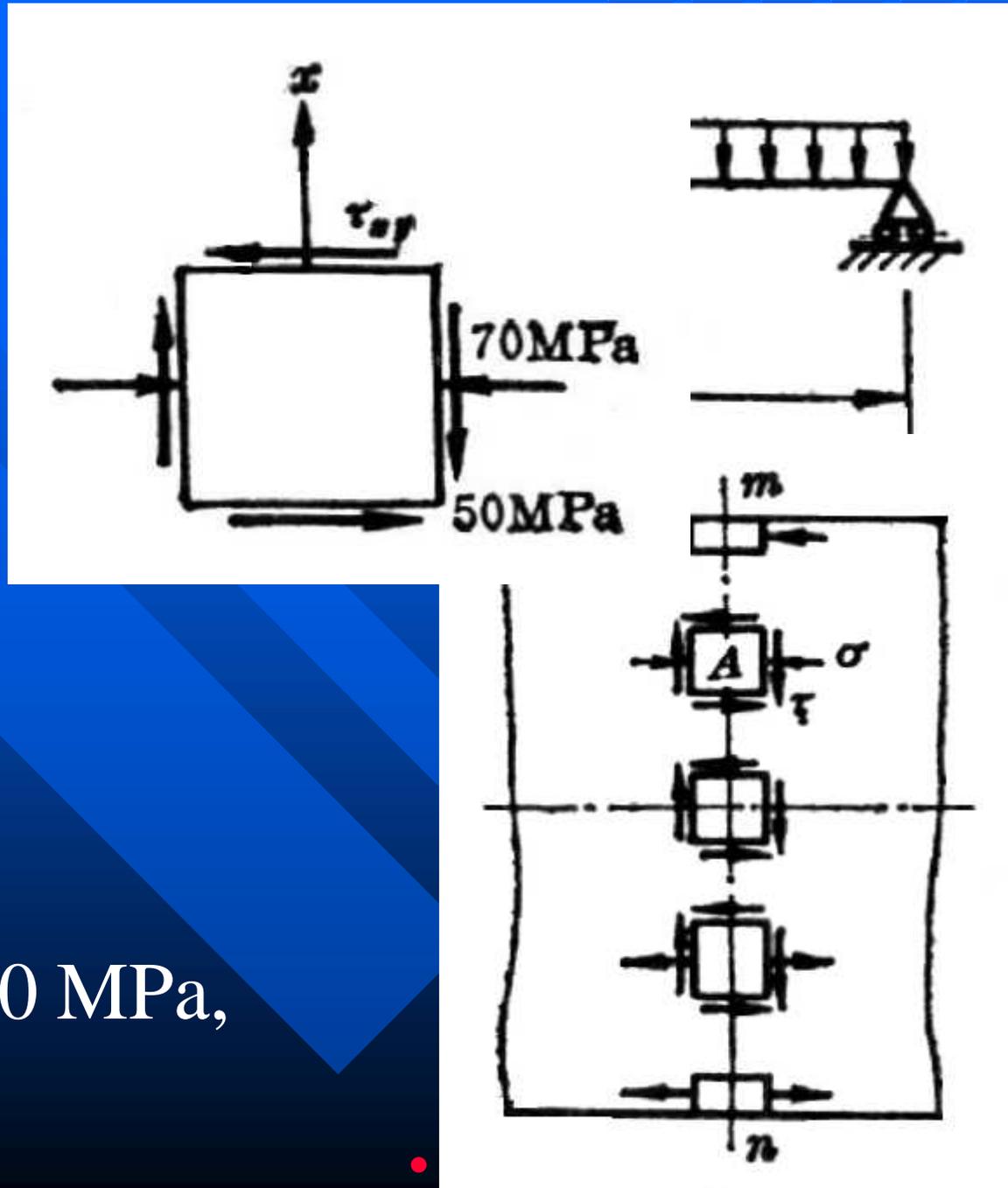
求: A点主应力和主平面, 及其它点的应力状态。

解: ◆ A点单元体

◆ 取 x 轴向上为正

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -70\text{ MPa},$$

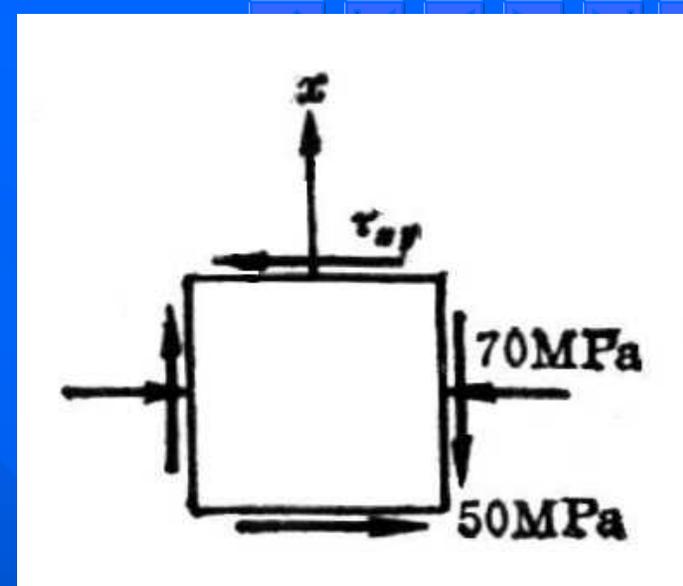
$$\tau_{xy} = -50\text{ MPa}$$



◆ 取 x 轴向上为正

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -70 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$$



◆ 主应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= \frac{0 + (-70)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - (-70)}{2} \right)^2 + (-50)^2}$$

→ $\sigma_{\max} = 26 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\min} = -96 \text{ MPa}$

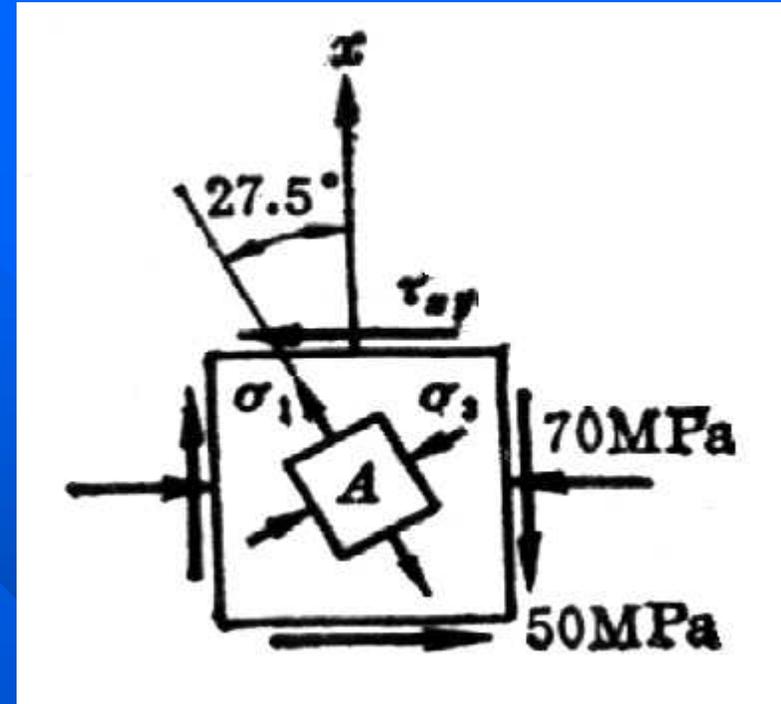
◆ 主应力

$$\sigma_{\max} = 26\text{MPa},$$

$$\sigma_{\min} = -96\text{MPa}$$

→ $\sigma_1 = 26\text{MPa}, \quad \sigma_2 = 0,$

$$\sigma_3 = -96\text{MPa}$$



◆ 主方向

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-50)}{0 - (-70)} = 1.429$$

→ $\alpha_0 = 27.5^\circ$ 或 $\alpha_0 = 117.5^\circ$

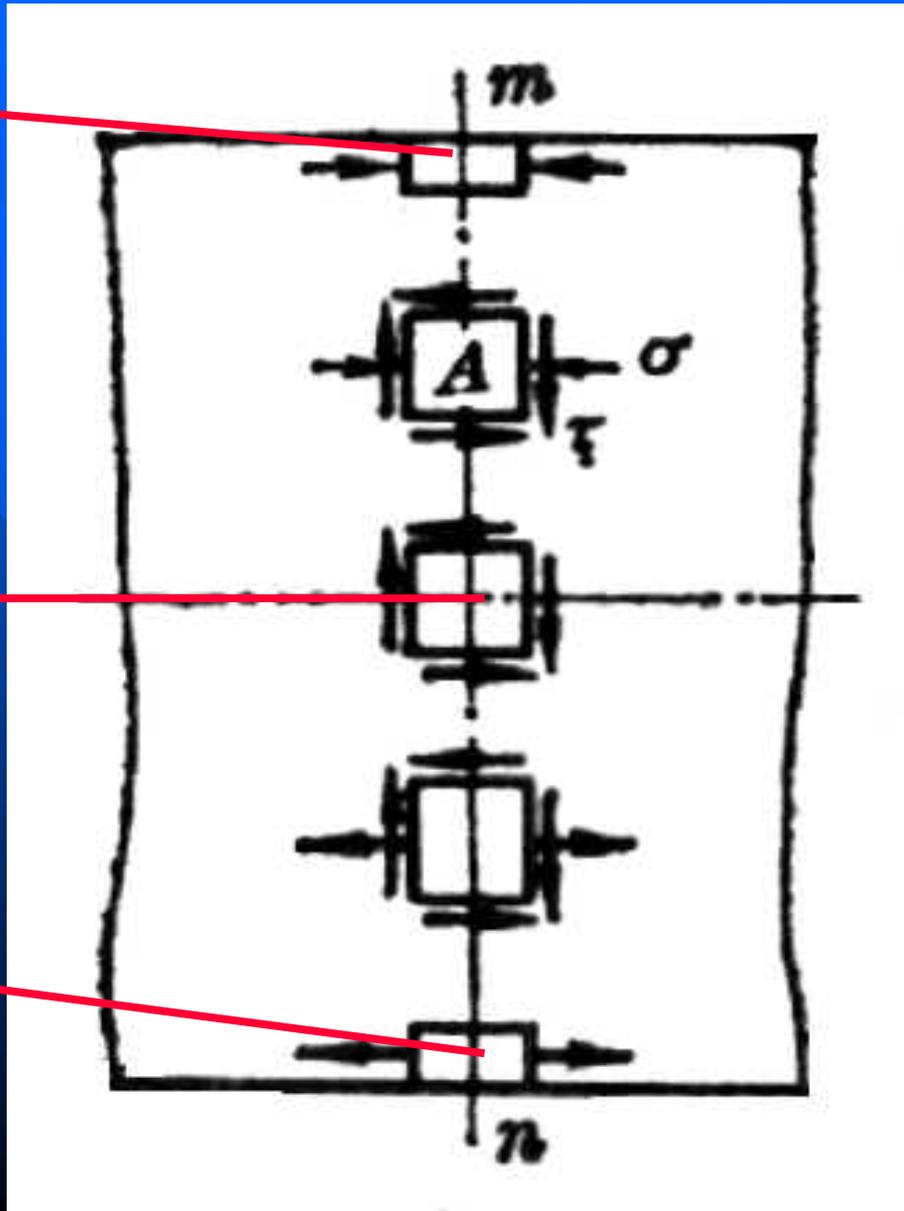
◆ 其它几点的应力状态

◆ 其它几点的应力状态

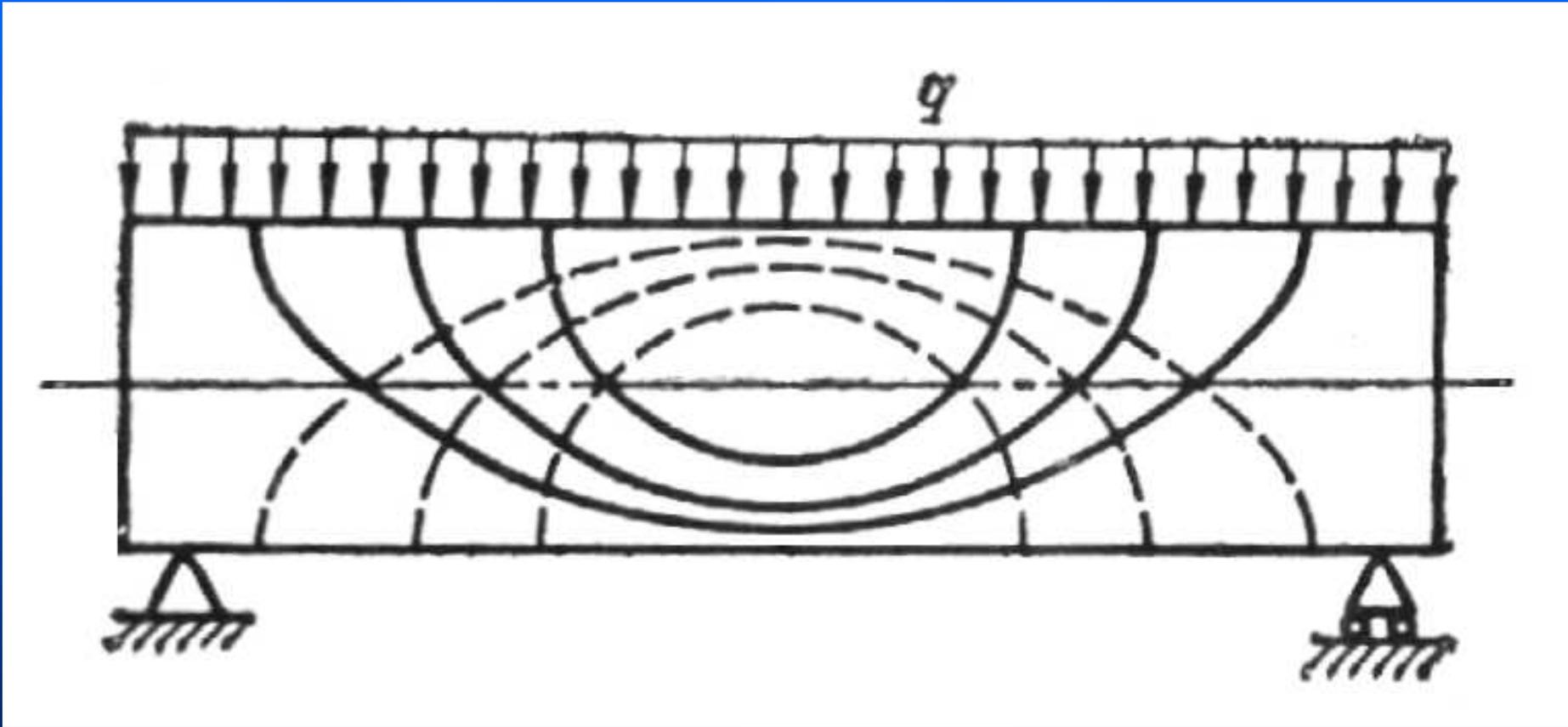
单向拉伸

纯剪切

单向压缩



◆ 主应力迹线



—— 主拉应力 σ_1 迹线
- - - - 主压应力 σ_3 迹线

§ 7.4 二向应力状态分析 —— 图解法

1 应力圆 (莫尔圆) 方程

由公式 $\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$

→ $\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$

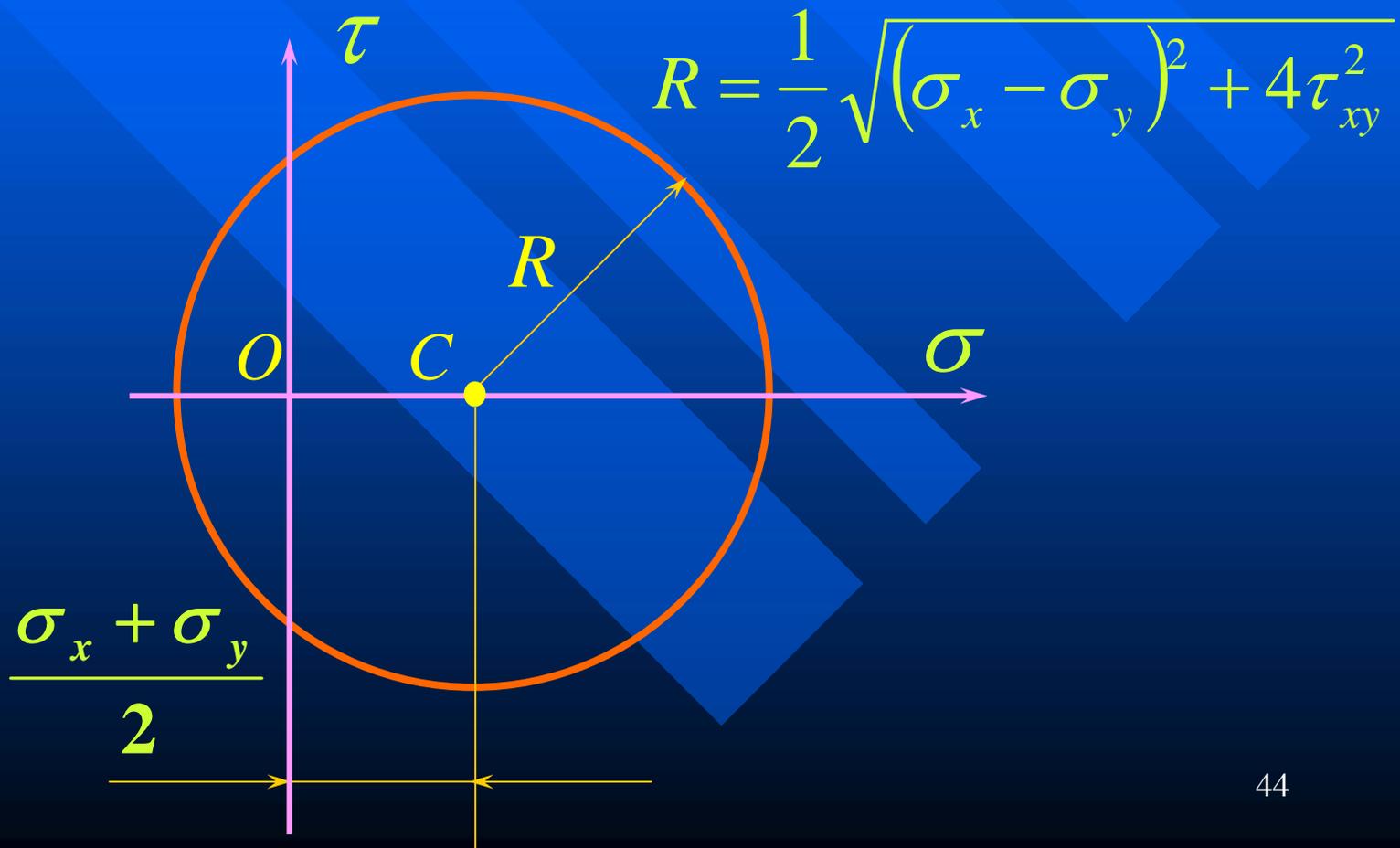
$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

平方相加, 得

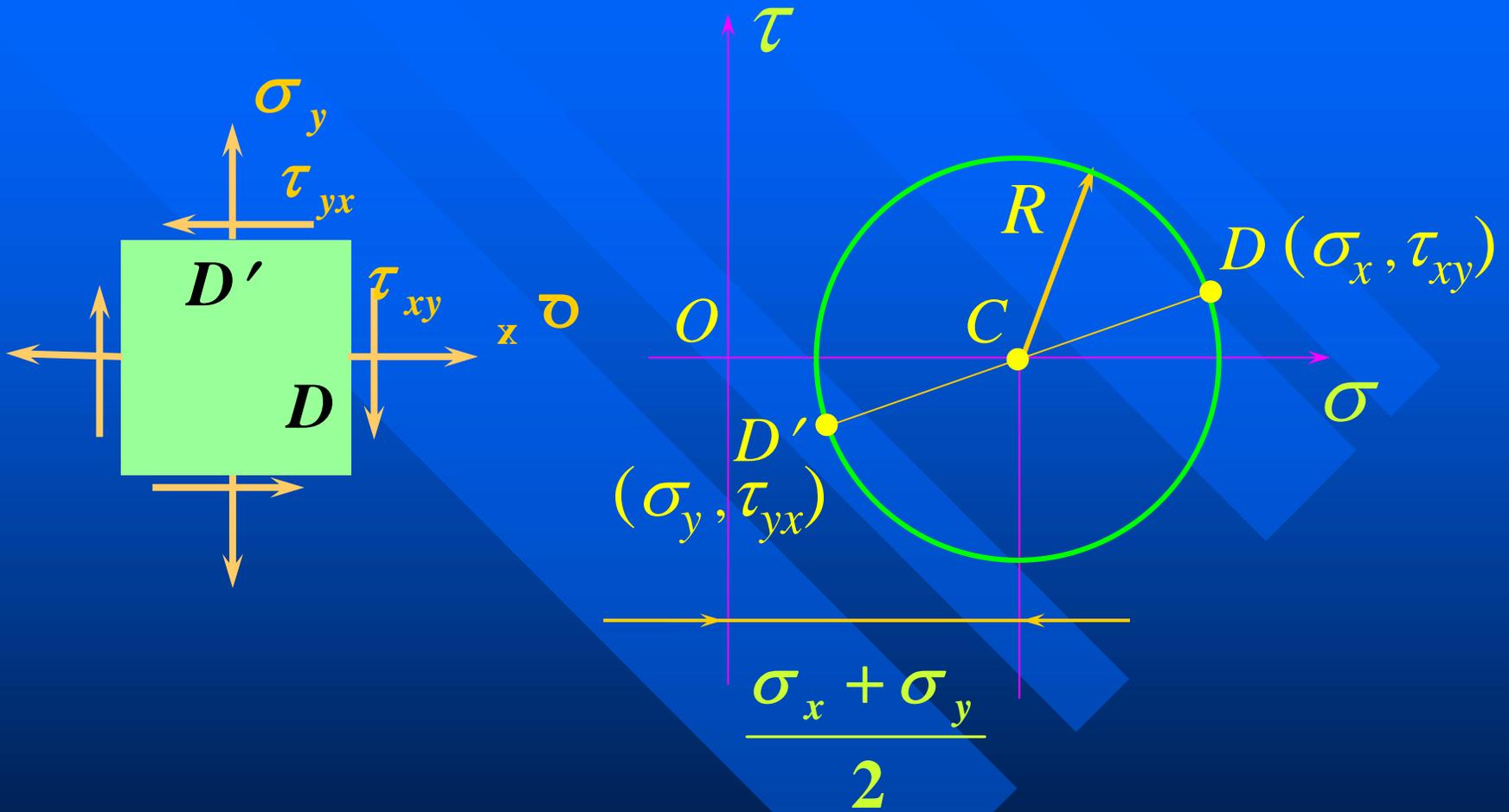
$$\left(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

这是以 σ_α 、 τ_α 为变量的圆的方程。



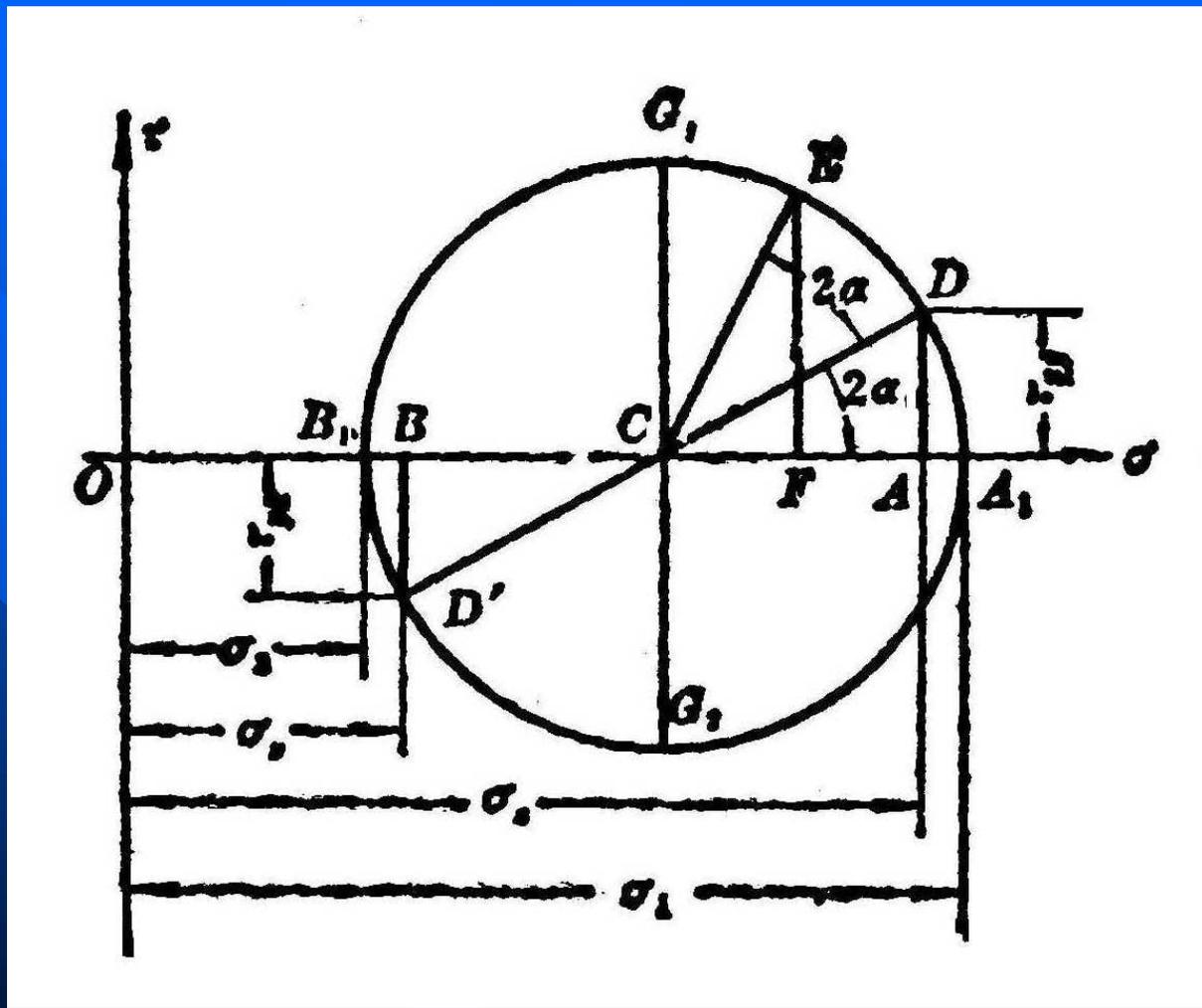
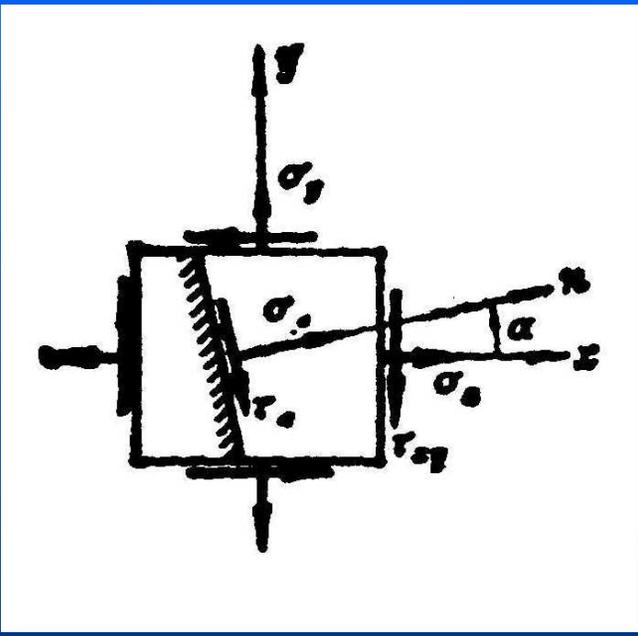
2 应力圆的画法



$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

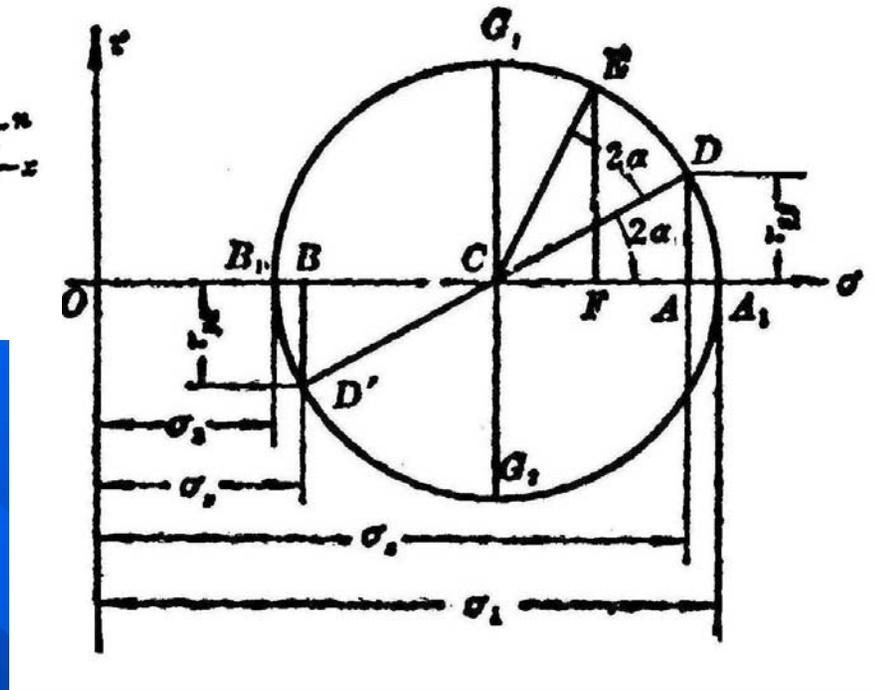
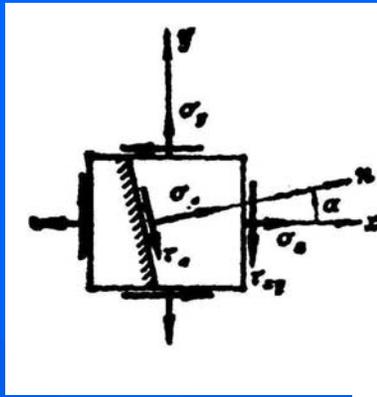
3 应力圆上的点与单元体面上的应力的对应关系

(1) 点面对应



应力圆上某一点的坐标值对应着单元体某一方向面上的正应力和切应力；

(2) 基准相当

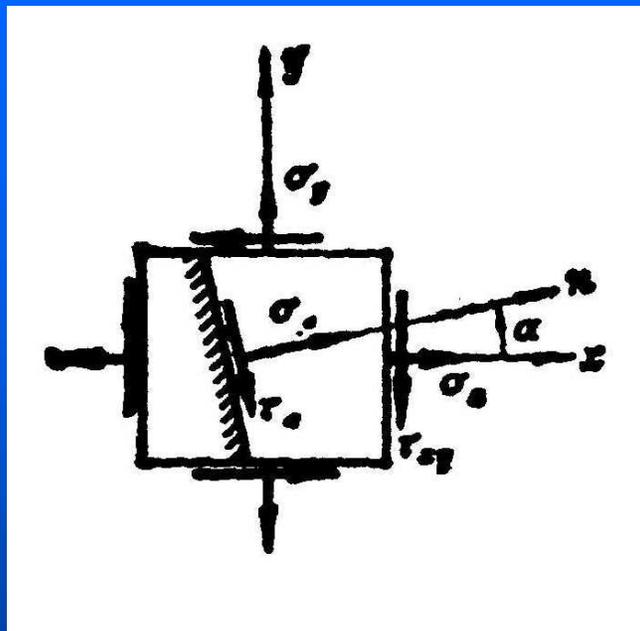


D点和x面是基准;

(3) 转向一致

半径旋转方向与方向面法线旋转方向一致;

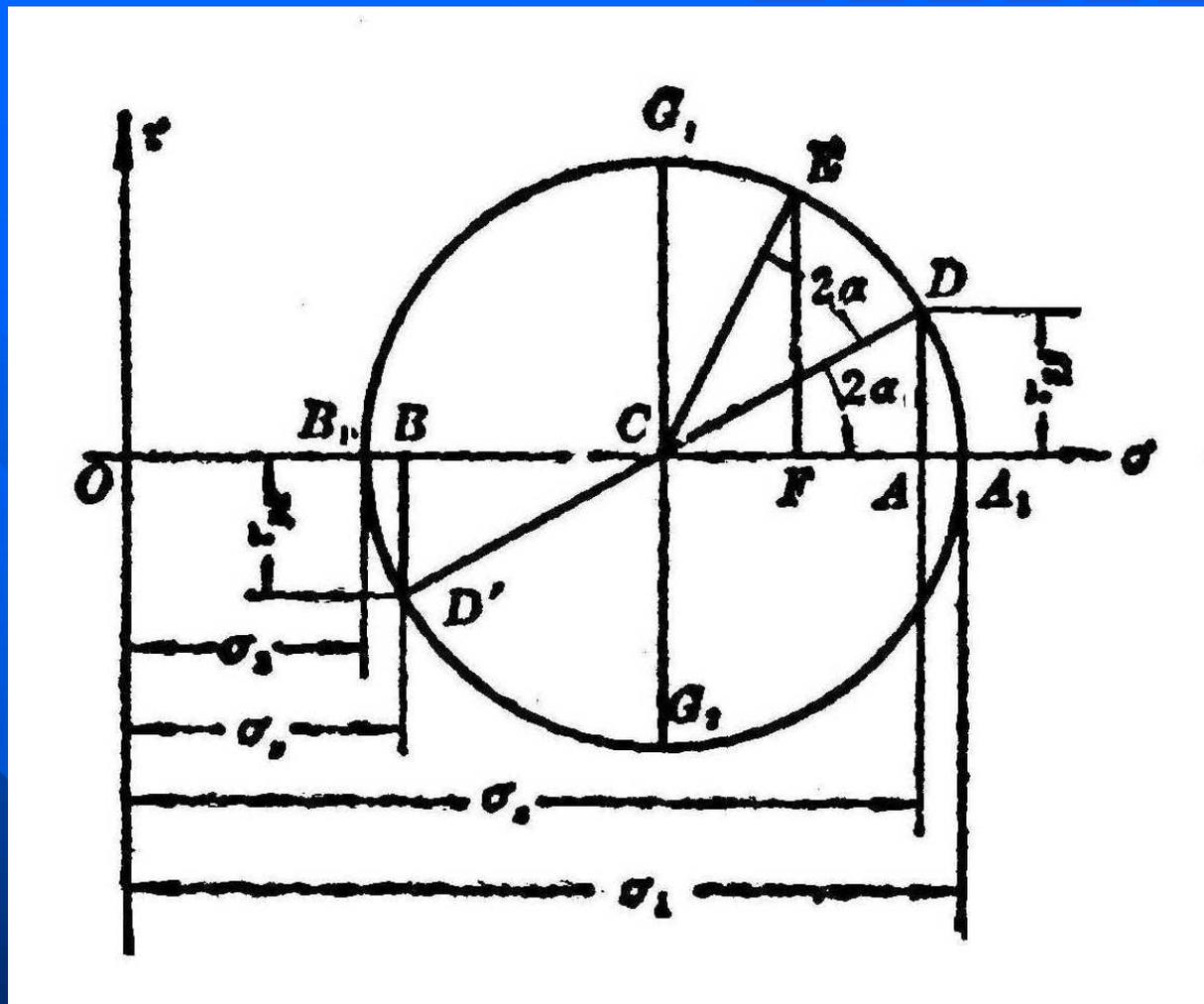
(3) 转向一致



半径旋转方向与
方向面法线旋转
方向一致；

(4) 角度成双

半径转过的角度是方向面法线旋转角度的两倍。



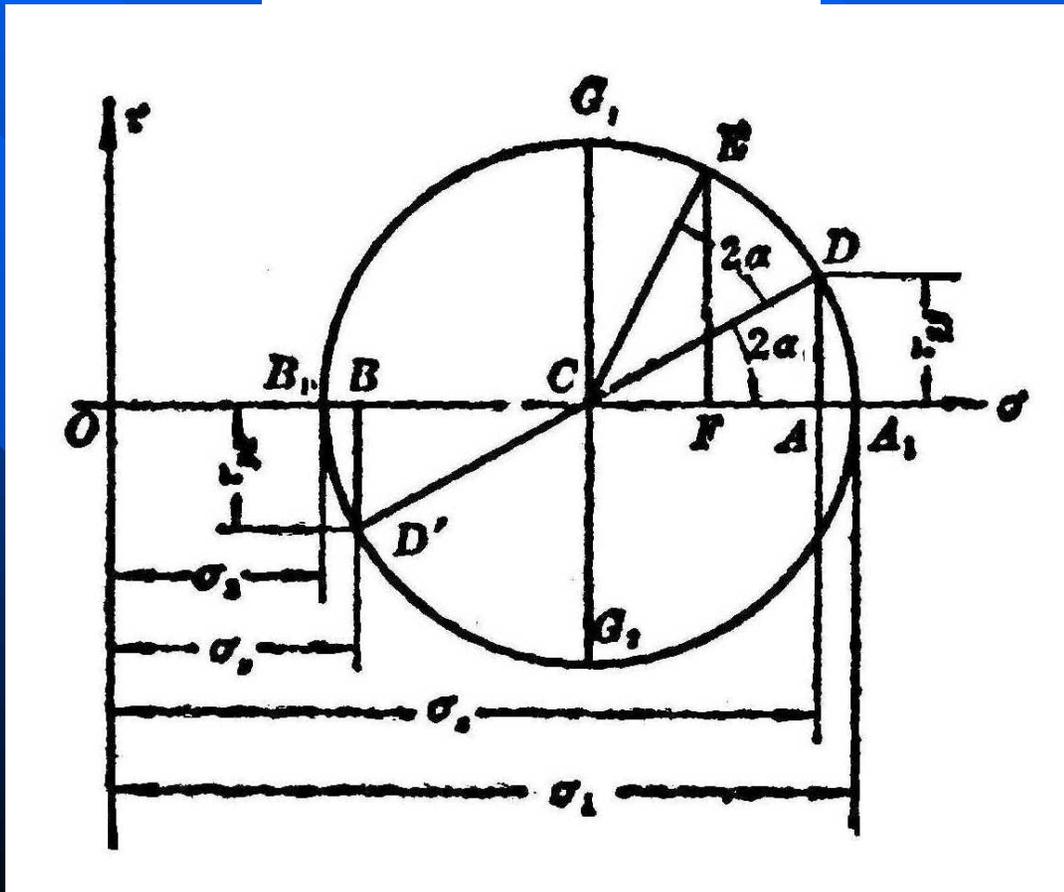
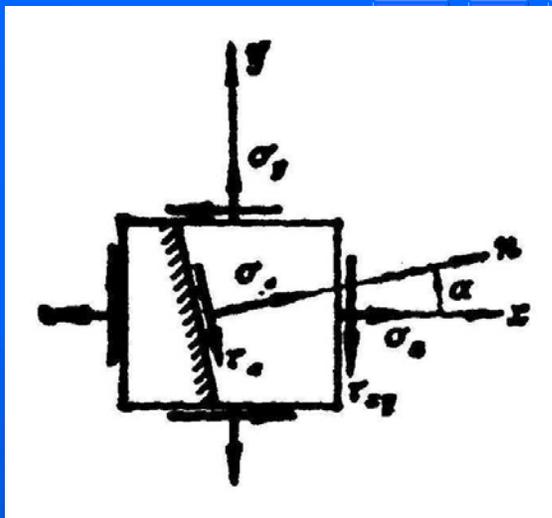
4 应力圆的应用

- 确定主应力、主方向

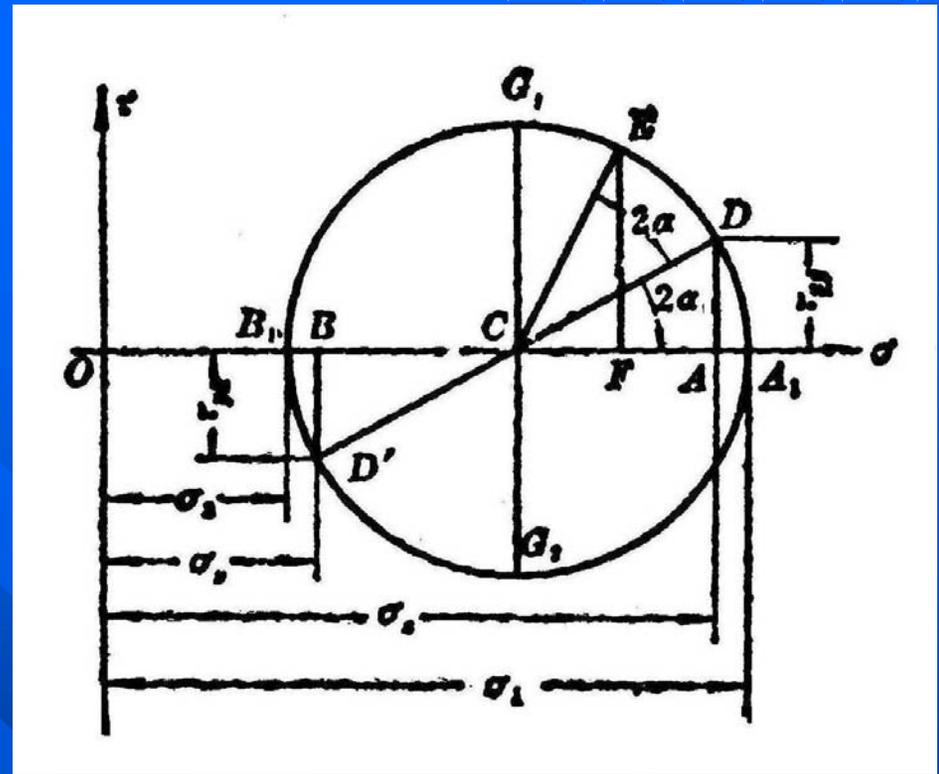
应力圆与横轴的交点 A_1 、 B_1 处，剪应力为零。

它们的横坐标即为主应力。

从半径 CD 转到 CA_1 的角度即为从 x 轴转到主平面的角度的两倍。



◆ 主应力
 即为 A_1, B_1 处的正应力。



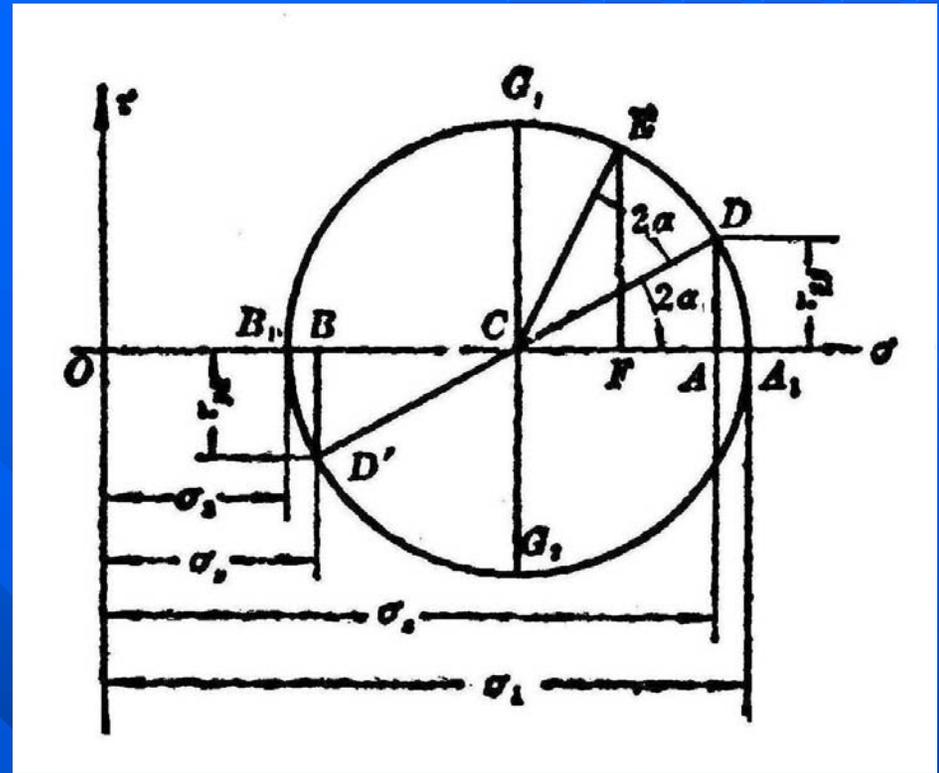
$$\left. \begin{matrix} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

↓
 圆心坐标

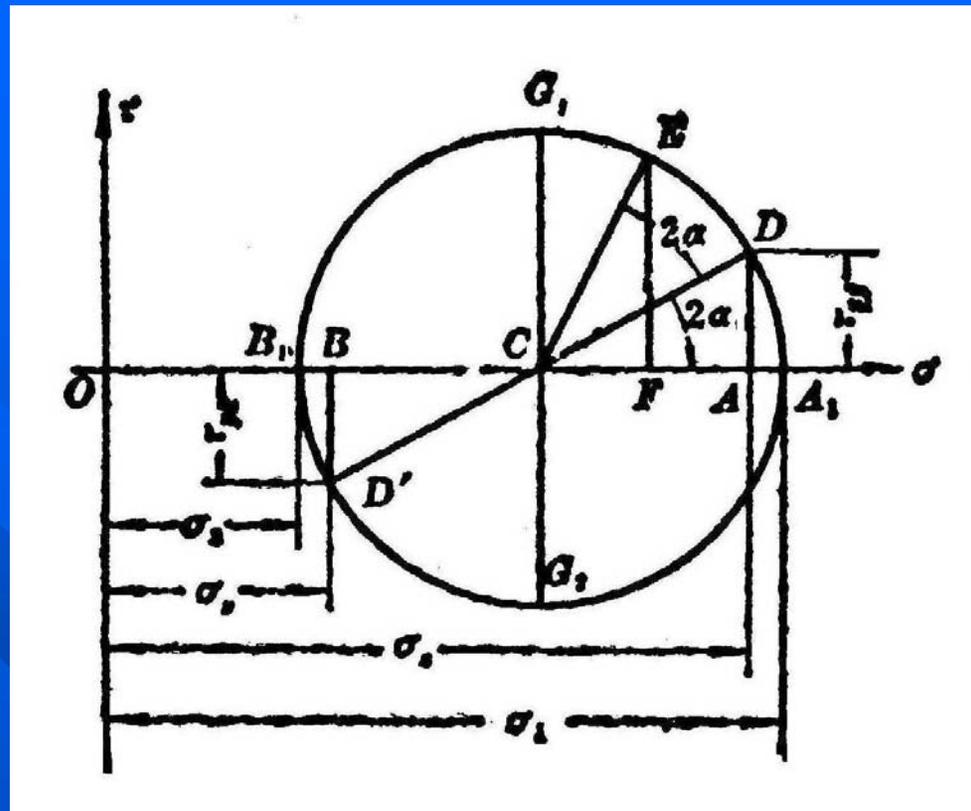
↓
 应力圆半径

◆ 主方向

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha_0 &= -\frac{DA}{CA} \\ &= -\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \\ &= -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \end{aligned}$$

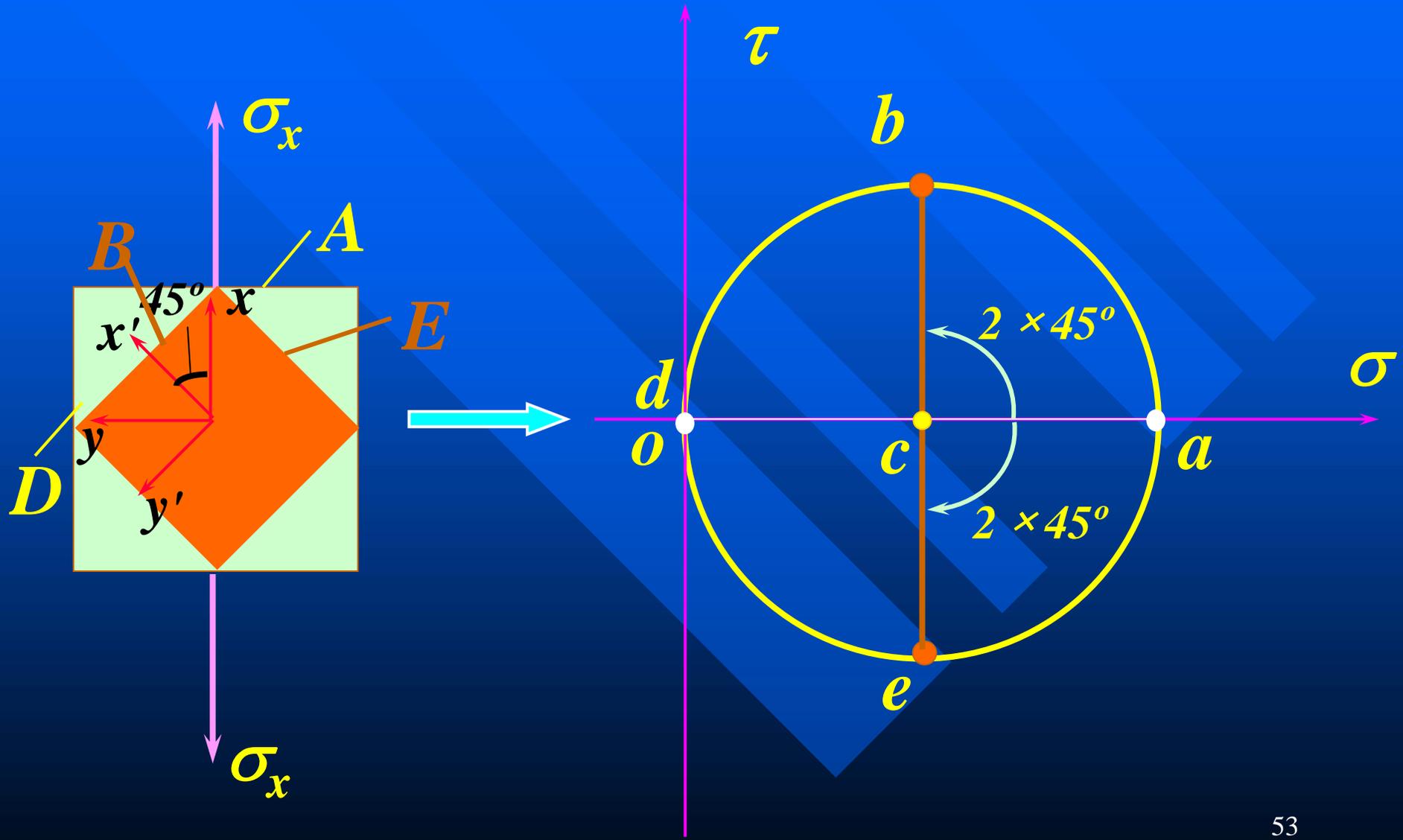


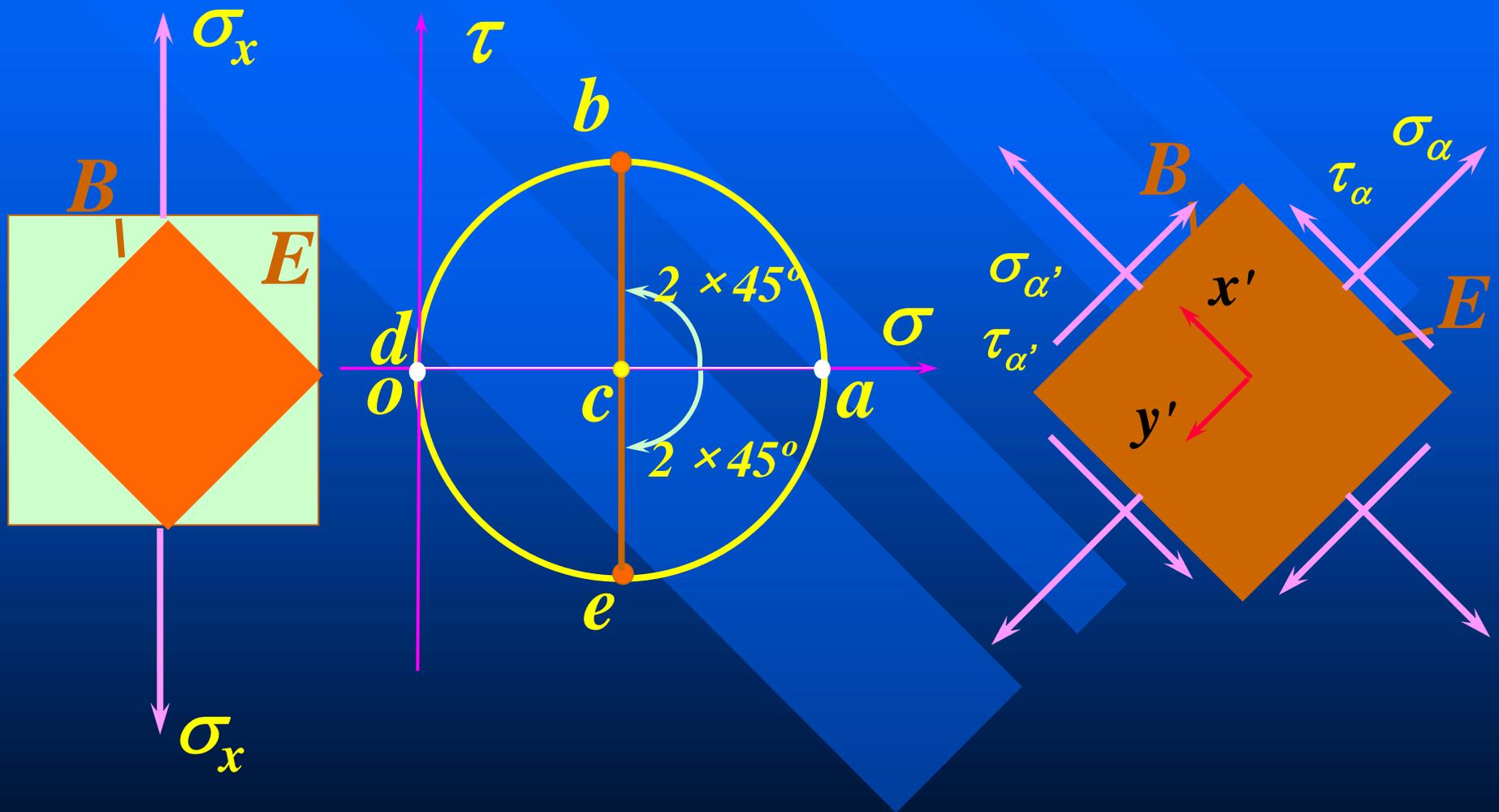
- 确定面内最大切应力
主剪面对应于应力圆上的 G_1 和 G_2 点。
面内最大切应力的值
等于应力圆的半径。



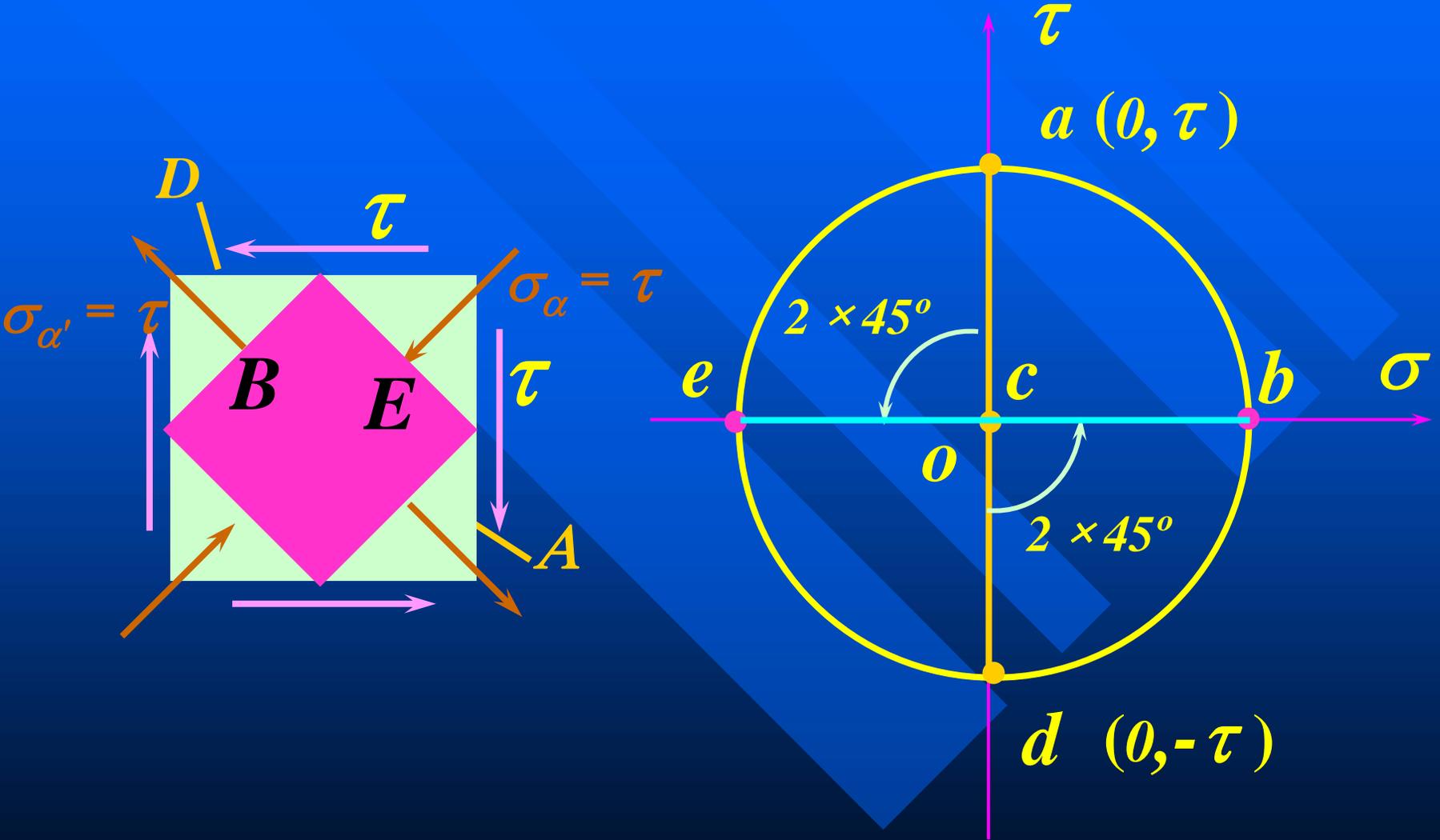
$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

● 单向应力状态的应力圆





- 纯切应力状态的应力圆



例 3 (书例8.5)

已知: $\sigma_x = 80\text{MPa}$, $\sigma_y = -40\text{MPa}$, $\tau_{xy} = -60\text{MPa}$, $\tau_{yx} = 60\text{MPa}$ 。

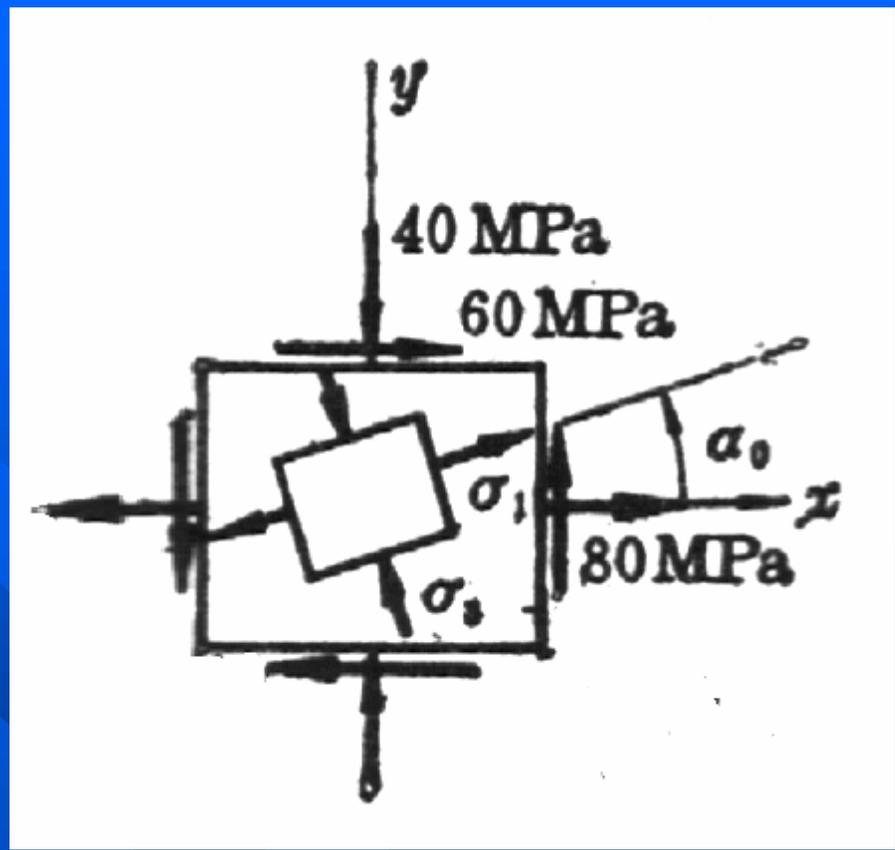
求: 用应力圆求主应力和主方向。

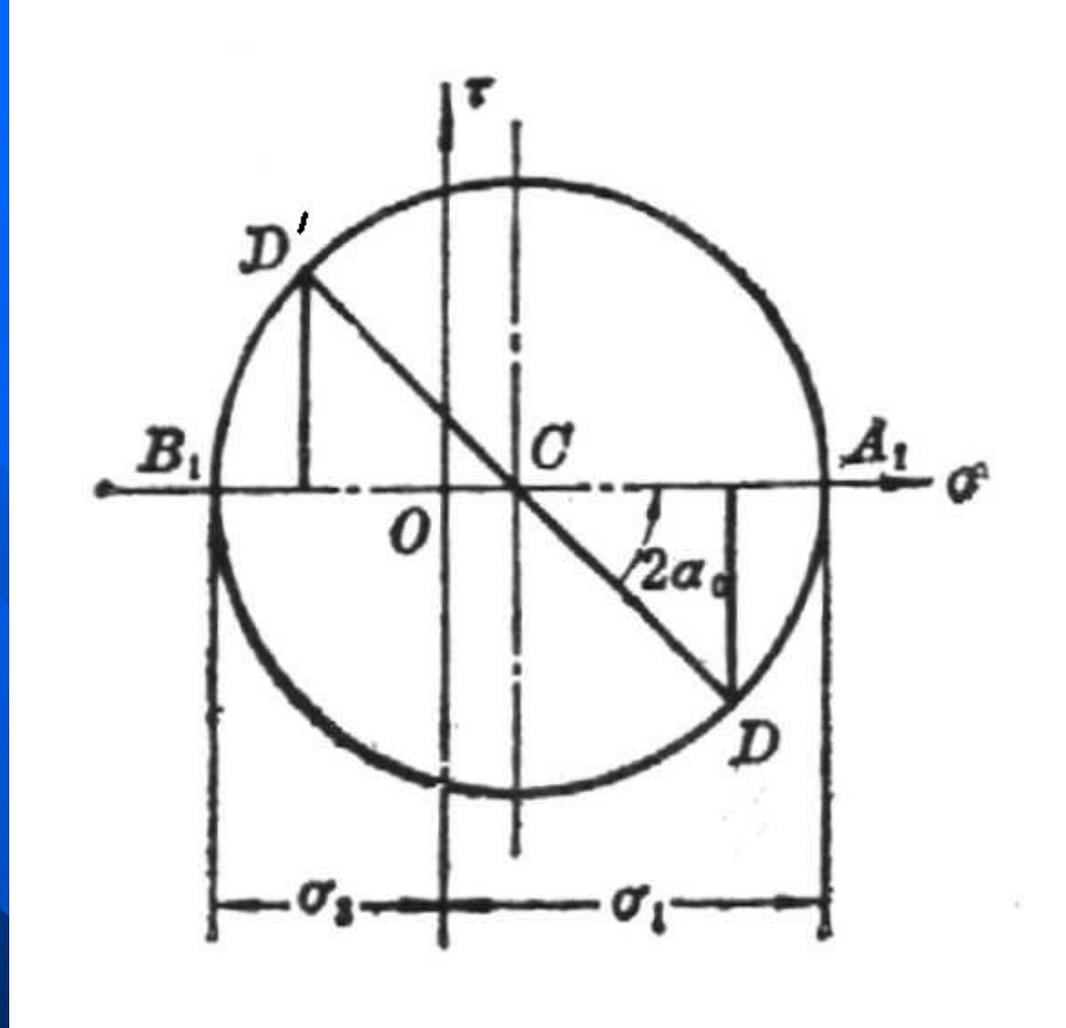
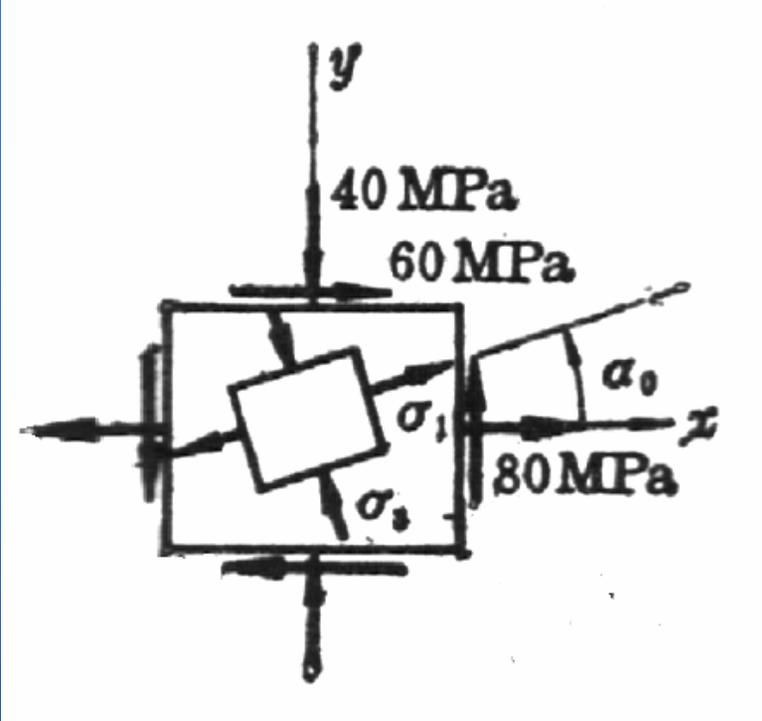
解: 作应力圆:

由 $\sigma_x = 80$, $\tau_{xy} = -60 \rightarrow D$ 点

由 $\sigma_y = -40$, $\tau_{yx} = 60 \rightarrow D'$ 点

\rightarrow 画出应力圆





由 $\sigma_x = 80, \tau_{xy} = -60$

→ D点

由 $\sigma_y = -40, \tau_{yx} = 60$

→ D'点

→ 画出应力圆

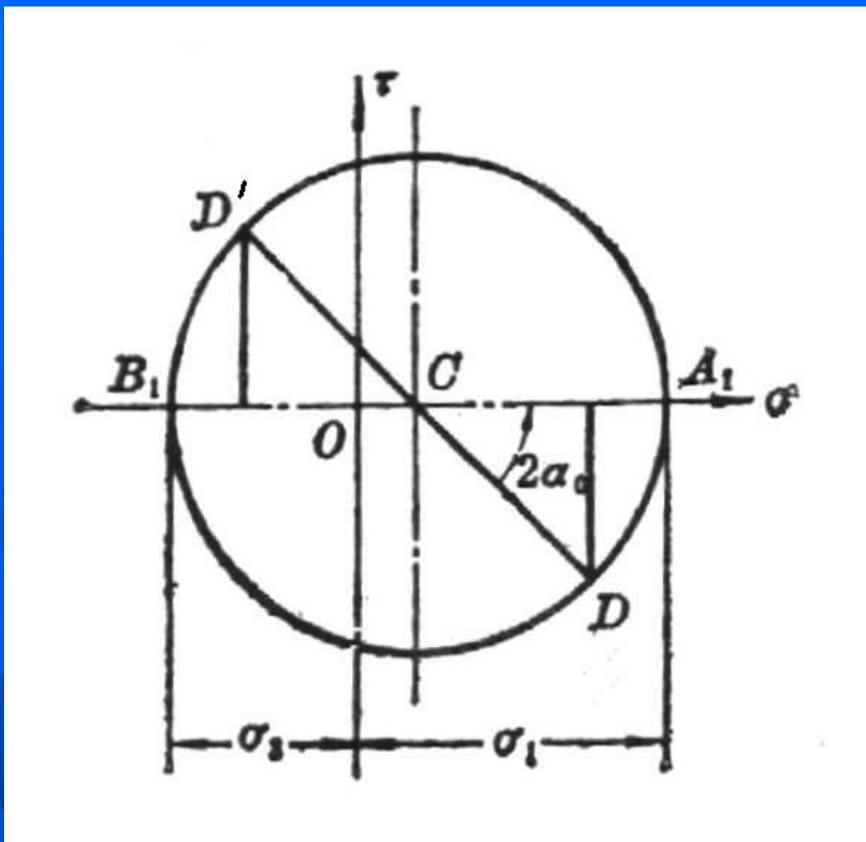
◆ 圆心坐标

$$OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{80 + (-40)}{2} = 20$$

◆ 半径

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{80 - (-40)}{2}\right)^2 + (-60)^2} = 84.85 \approx 85$$



◆ 圆心坐标 $OC = 20$

◆ 半径 $R = 85$

→ $\sigma_1 = OA_1 = OC + R = 105 \text{ MPa}$

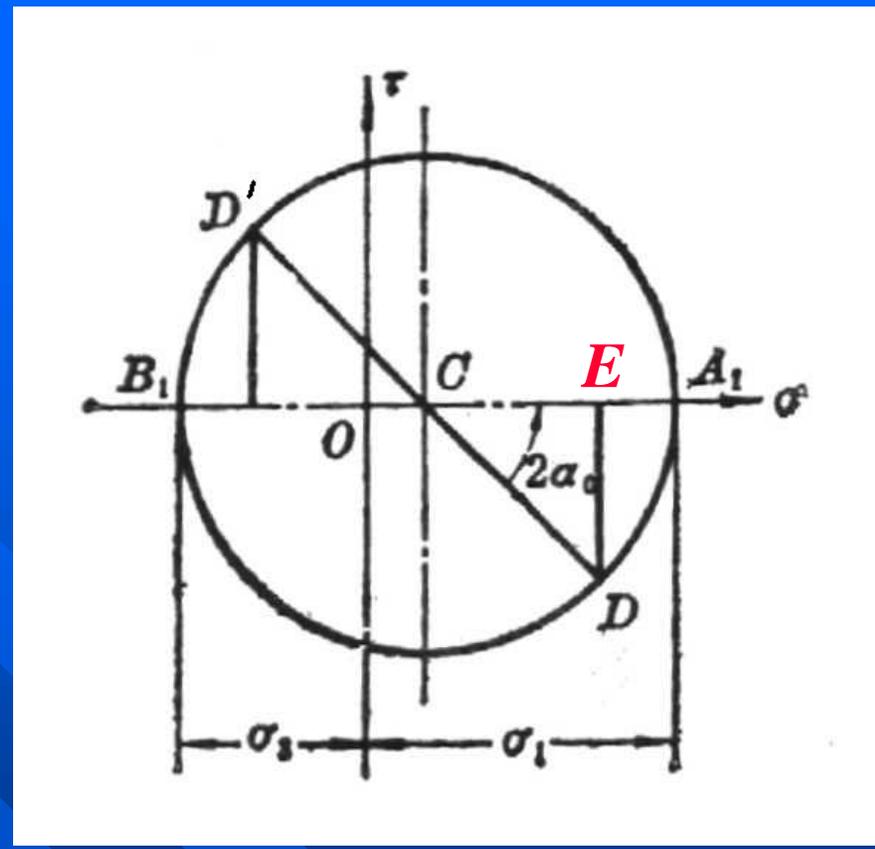
$\sigma_3 = OC - R = -65 \text{ MPa}$

◆ 主平面

由几何关系 $CE = \underline{OE} - OC = 80 - 20 = 60$

$ED = |\tau_{xy}| = 60 \rightarrow 2\alpha_0 = 45^\circ$

从D点(x轴)逆时针转 45° 至 A_1 点, $\alpha_0 = 22.5^\circ$

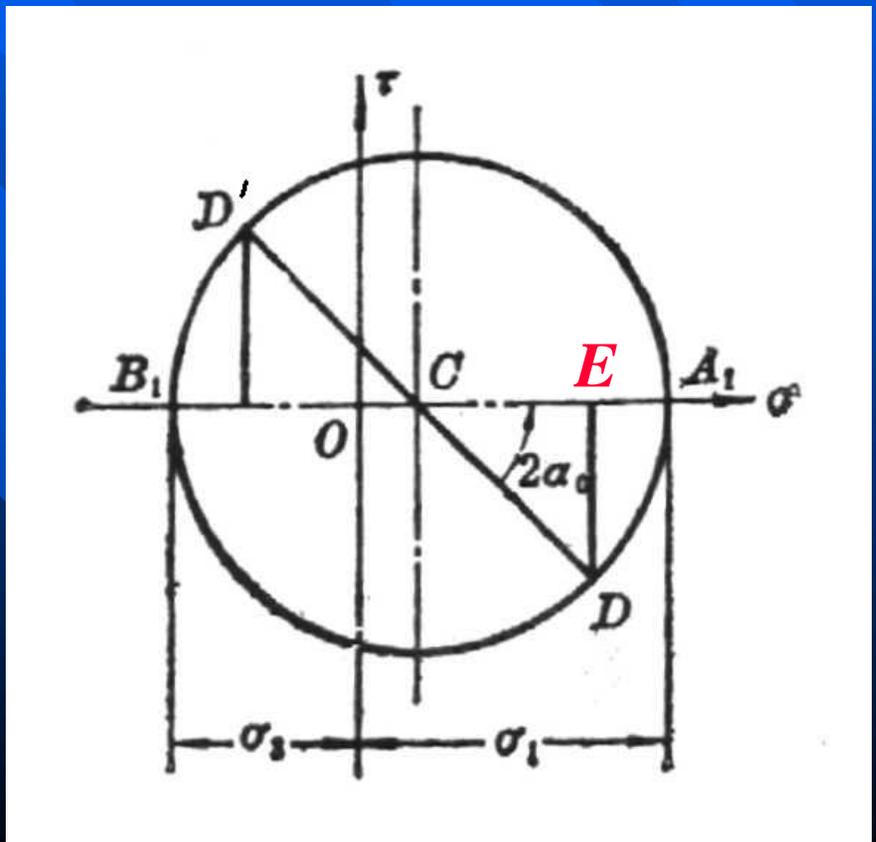
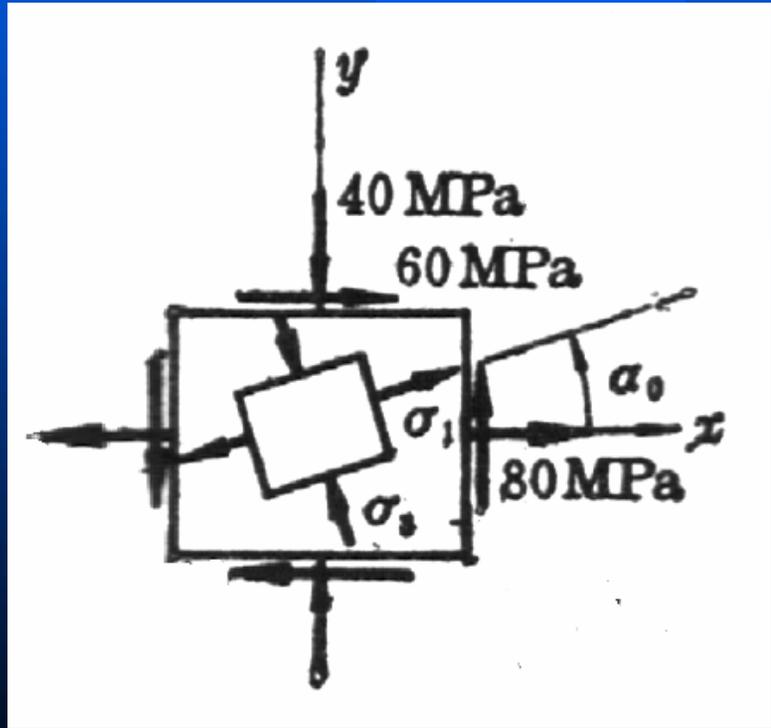


◆ 主平面

由几何关系 $CE = OE - OC = 80 - 20 = 60$

$$ED = |\tau_{xy}| = 60 \rightarrow 2\alpha_0 = 45^\circ$$

从D点(x轴)逆时针转 45° 至 A_1 点, $\alpha_0 = 22.5^\circ$



例 4 (书例8.6)

已知: $\sigma_x = 0, \sigma_y = -40\text{MPa},$

$\tau_{xy} = 0。$

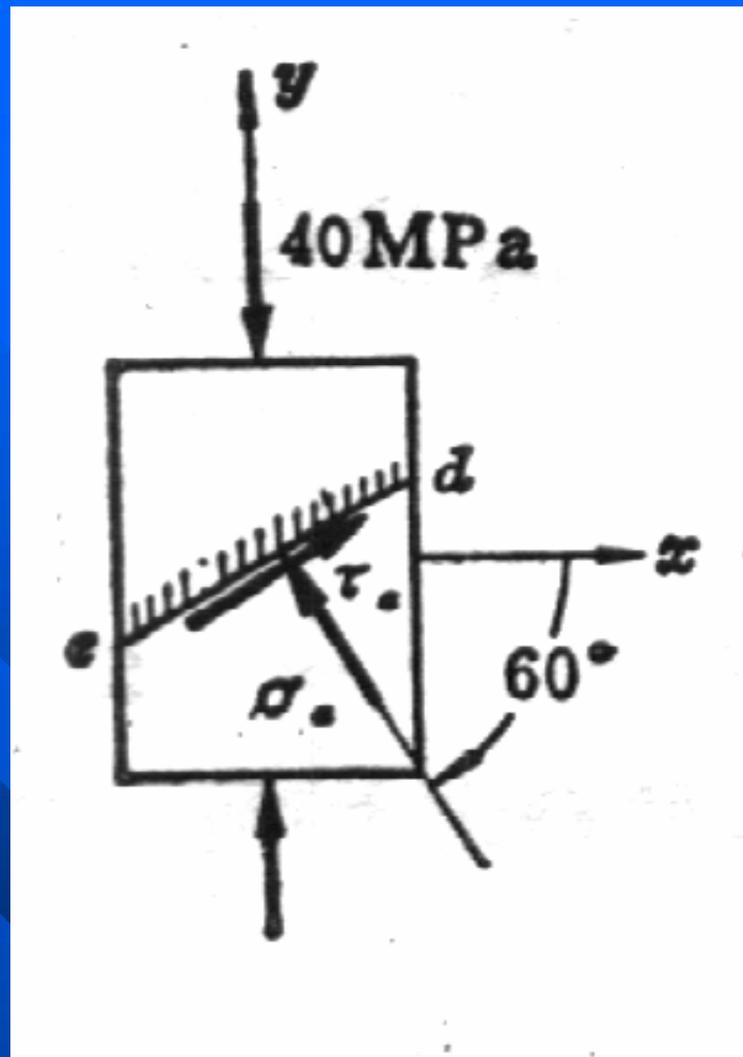
求: 斜截面 de 上的正应力和切应力。

解: 作应力圆:

由 $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0 \rightarrow O$ 点

由 $\sigma_y = -40, \tau_{yx} = 0 \rightarrow B_1$ 点

\rightarrow 画出应力圆



由 $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0$

→ O 点

由 $\sigma_y = -40, \tau_{yx} = 0$

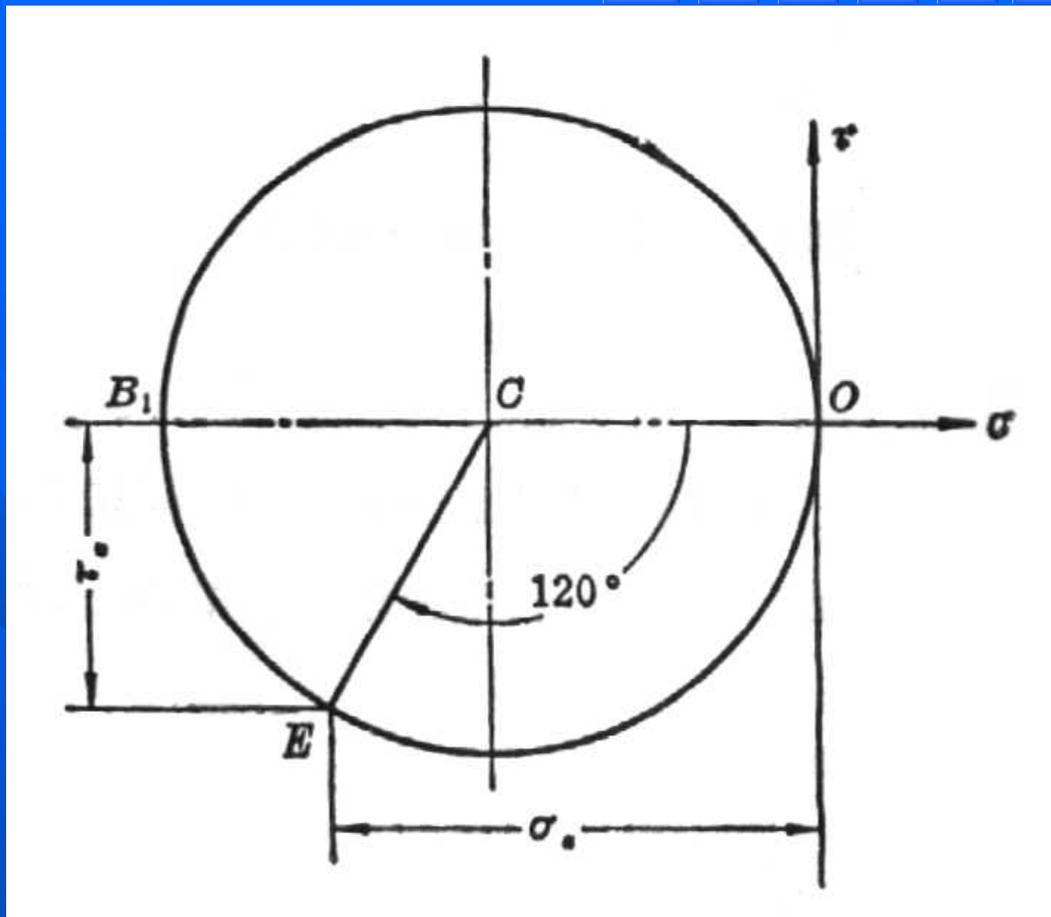
→ B_1 点

→ 画出应力圆

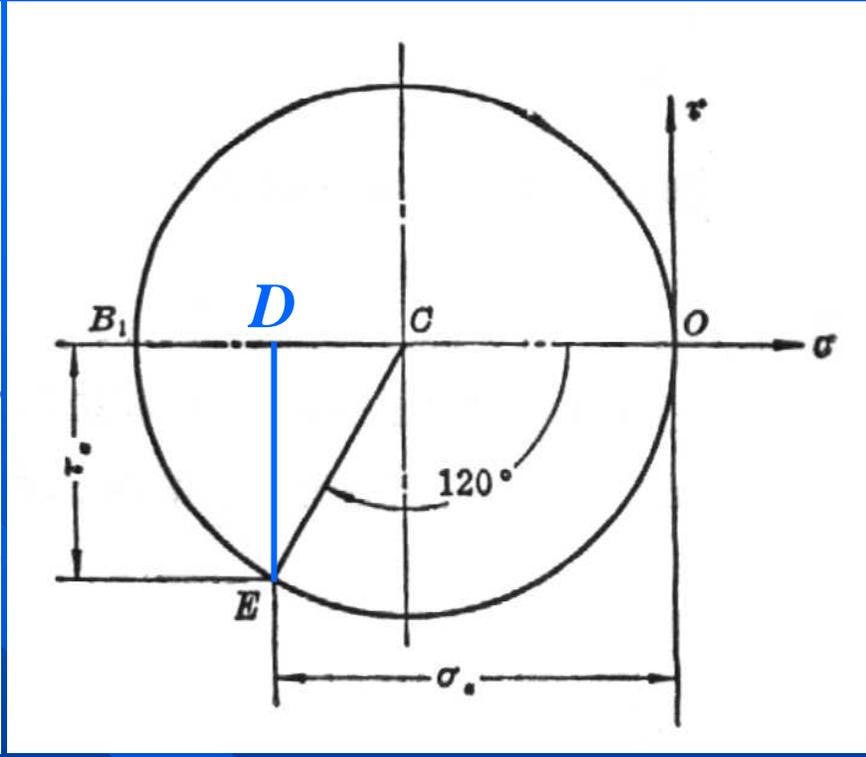
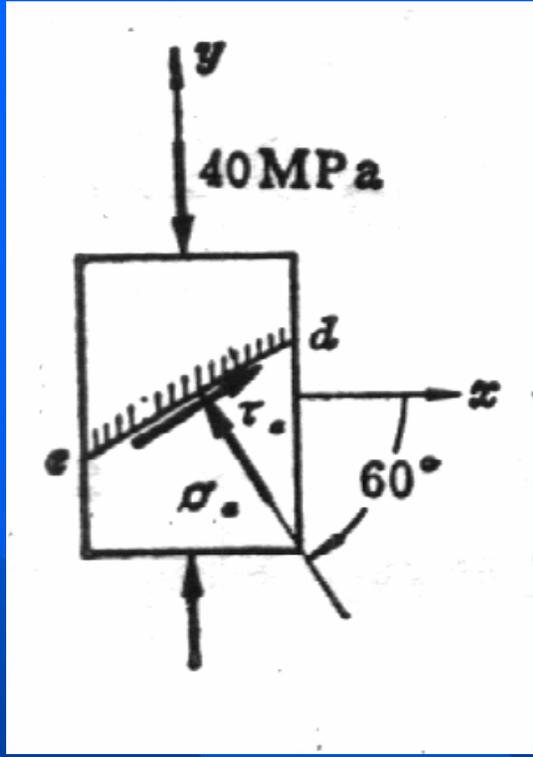
◆ 圆心坐标

$$OC = OB_1 / 2 = 20$$

◆ 半径 $R = OC = 20$



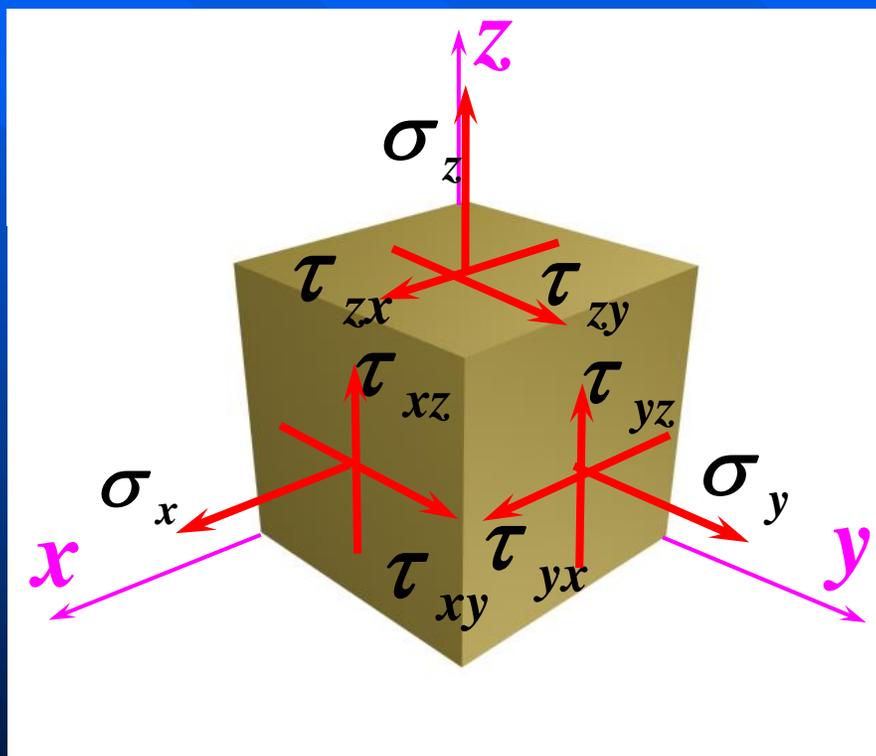
- ◆ 圆心坐标
 $OC = 20$
- ◆ 半径
 $R = 20$
- ◆ 单元体上
 $\alpha_0 = -60^\circ$ 的面所对应的
点为E点



$$\begin{aligned} \rightarrow \sigma_\alpha &= -(OC + CD) \\ &= -(R + R \cos 60^\circ) = -30 \text{ MPa} \\ \tau_\alpha &= -DE = -R \sin 60^\circ = -17.3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

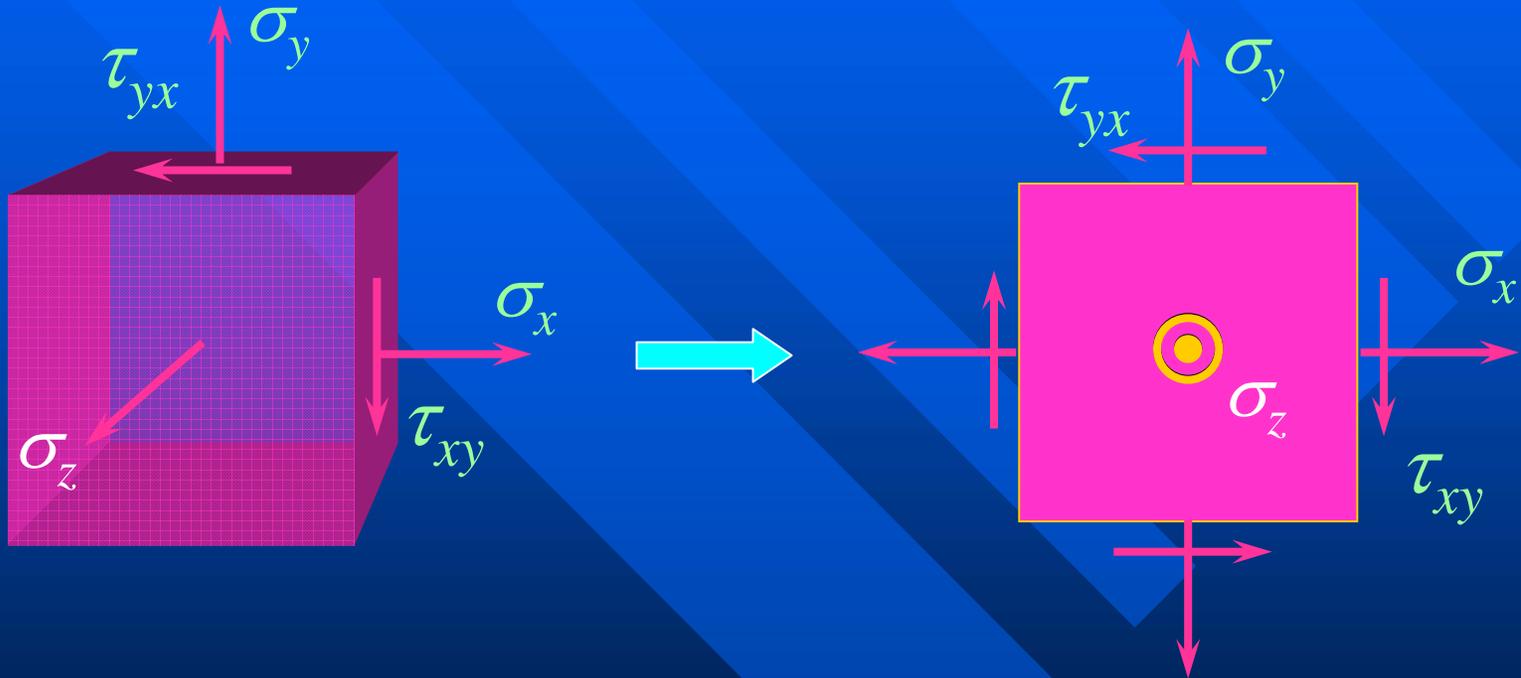
§ 7.5 三向应力状态

- 三向应力状态
三个主应力均不为零的应力状态。



- 特例

至少有一个主应力的方向为已知。

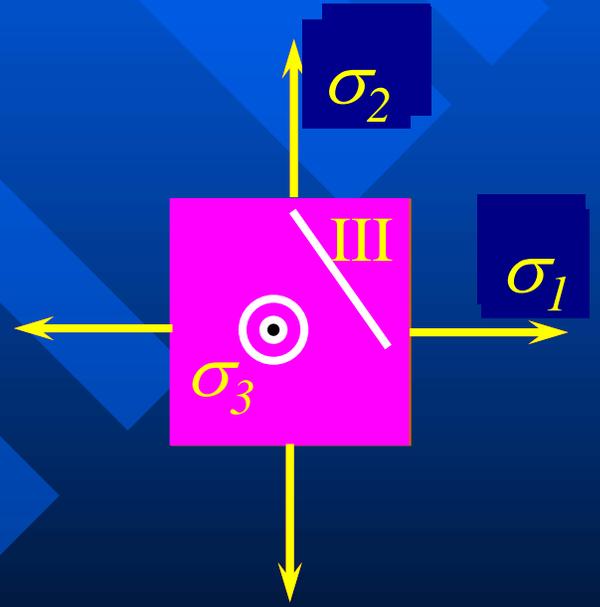
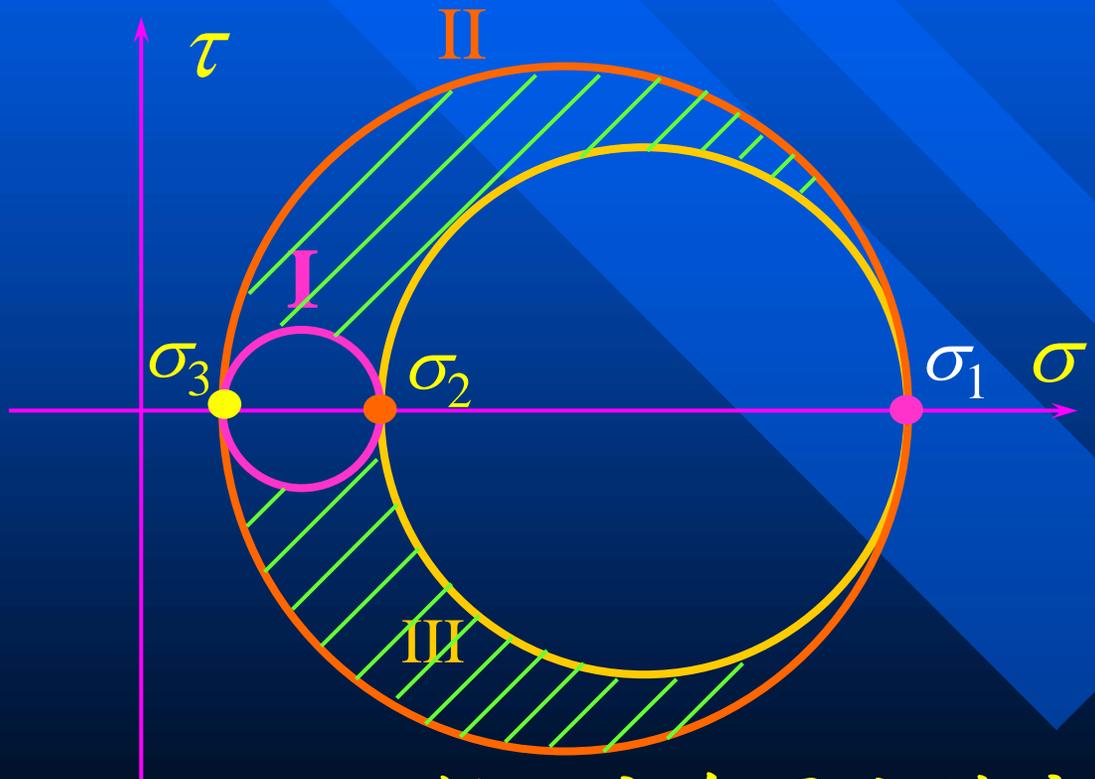
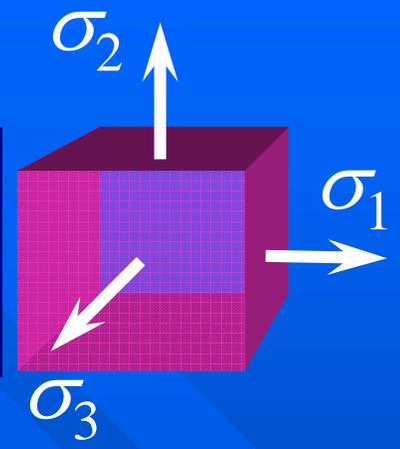


平面应力状态即为这种特例之一。

● 三向应力状态的应力圆

设三个主应力均已知。

平行于 σ_3 的方向面 - 其上之应力与 σ_3 无关，于是由 σ_1 、 σ_2 可作出应力圆 III



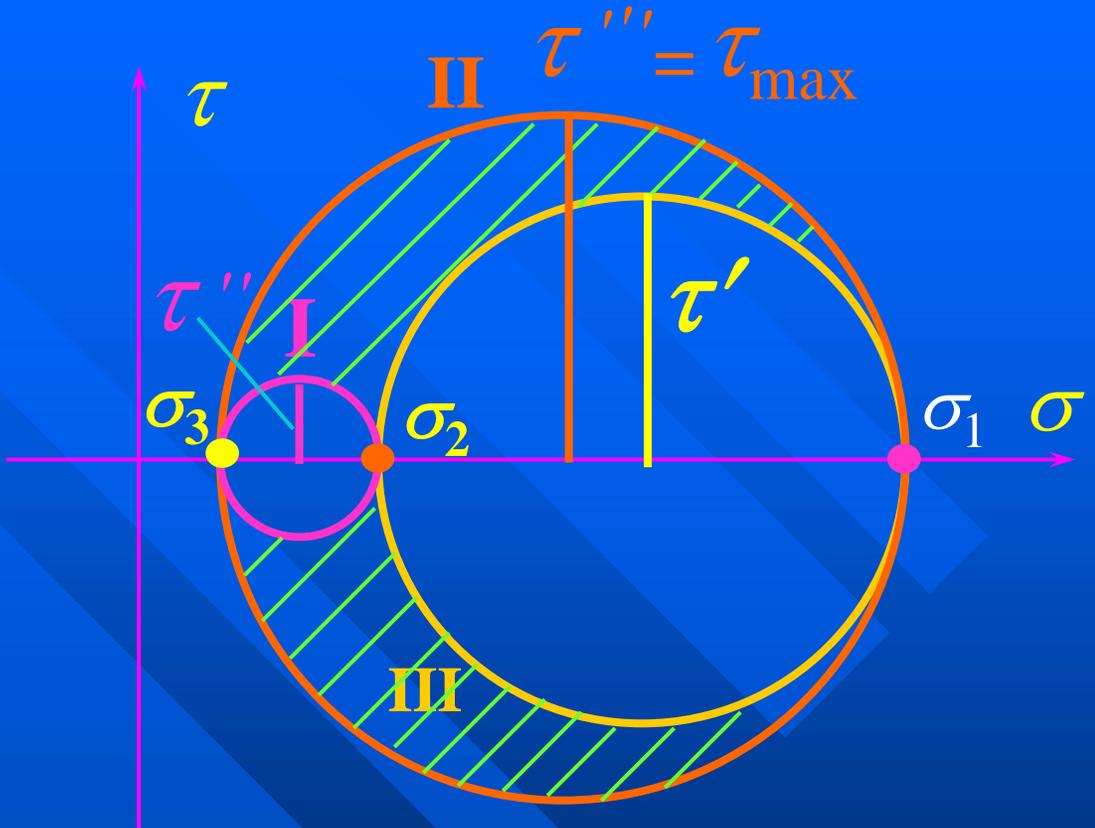
任一方向面上的应力位于阴影区内。

- **最大切应力**
 在三组特殊方向面中都有各自的面内最大切应力,即:

$$\tau' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

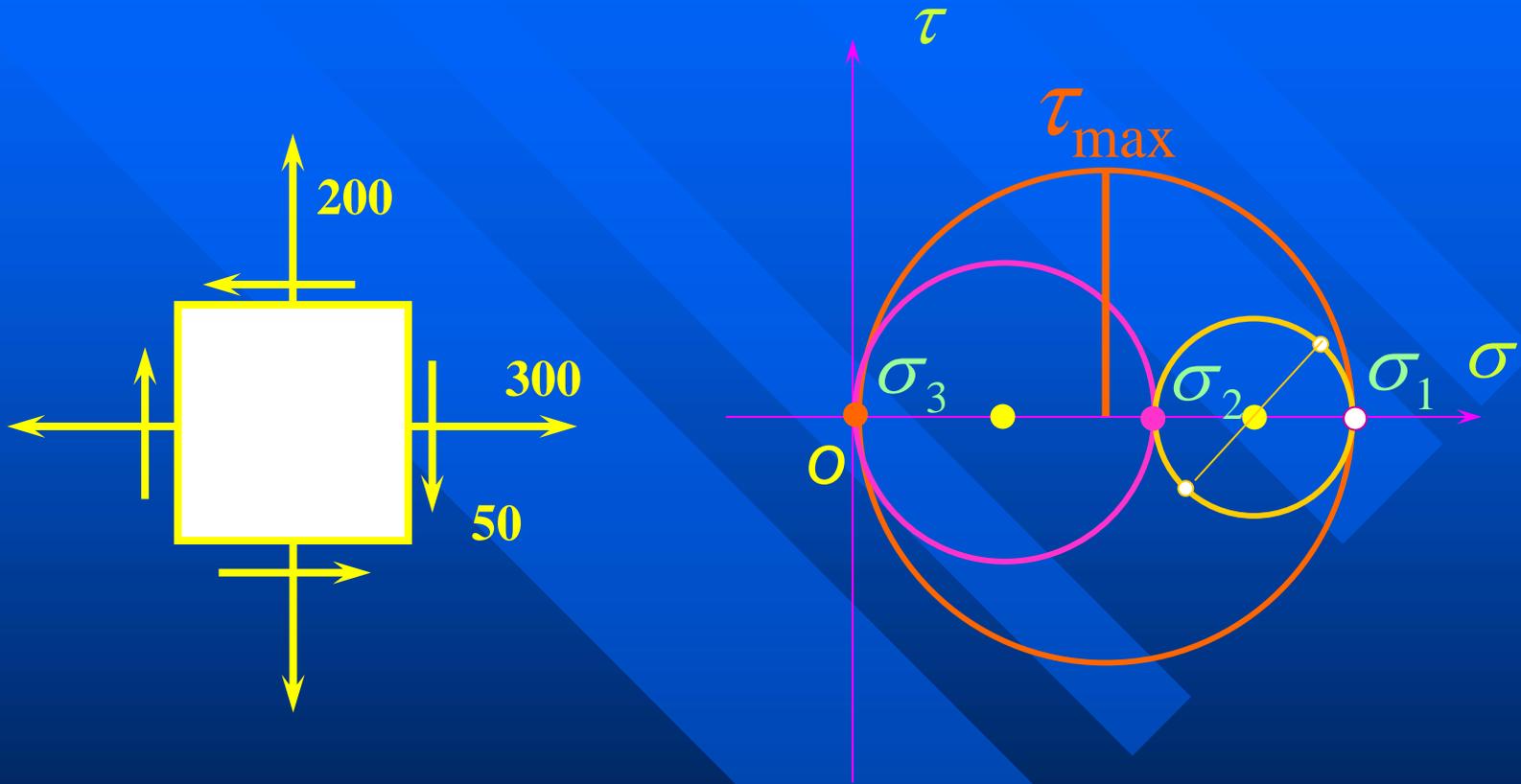
$$\tau'' = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau''' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

- 平面应力状态作为三向应力状态的特例



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1}{2}$$

平面应力状态作为三向应力状态的特例，
应注意：

(1) 按三个主应力的**代数值**排序确定 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 。

(2) $\sigma''' = 0$ σ''' 可能是 σ_1 ，也可能是 σ_2 或 σ_3 。

(3)
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

§ 7.6 位移与应变分量

§ 7.7 平面应变状态分析

- 任一方向的应变

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha$$

$$\frac{\gamma_{\alpha}}{2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\alpha$$

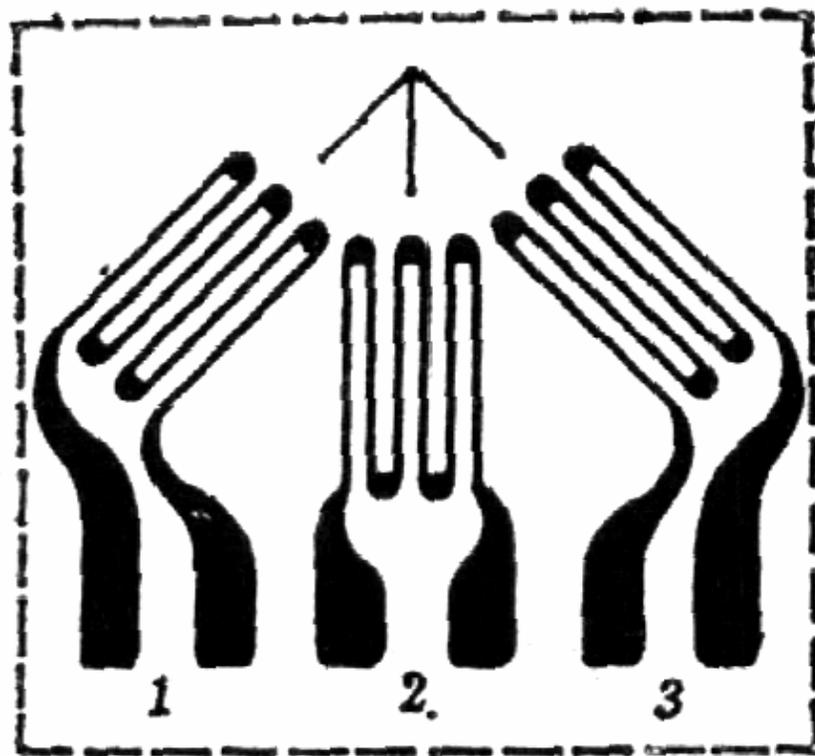
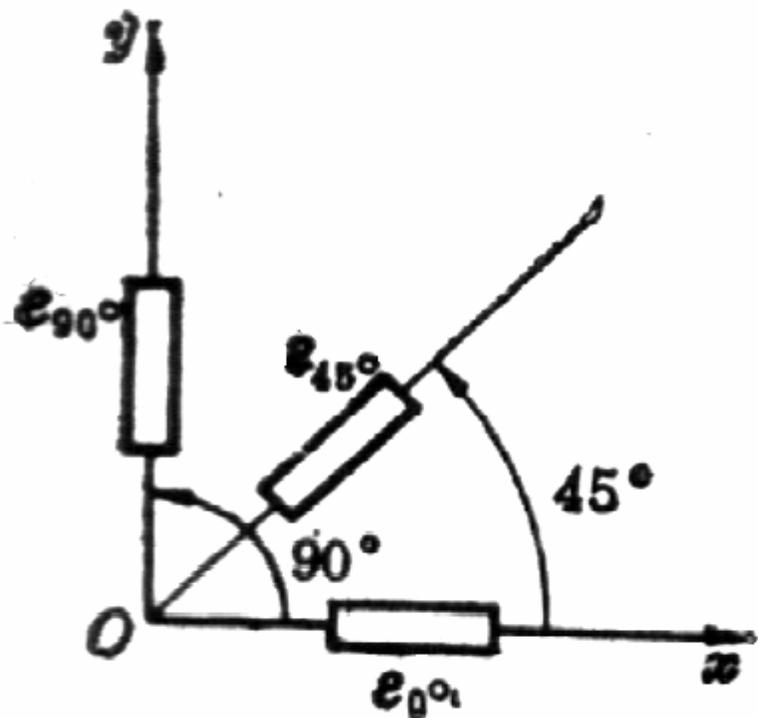
比较

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

- 主要结论
- ◆ 主应变方向与主应力方向相同
- ◆ 主应变 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 与主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 一一对应
- ◆ 与应力圆类似，存在应变圆，与应力圆有相同的特点，不同点是 γ 的坐标有系数 $1/2$

- 实验应力分析：应变片与应变花



§ 7.8 广义胡克定律

- 单向应力状态下的胡克定律

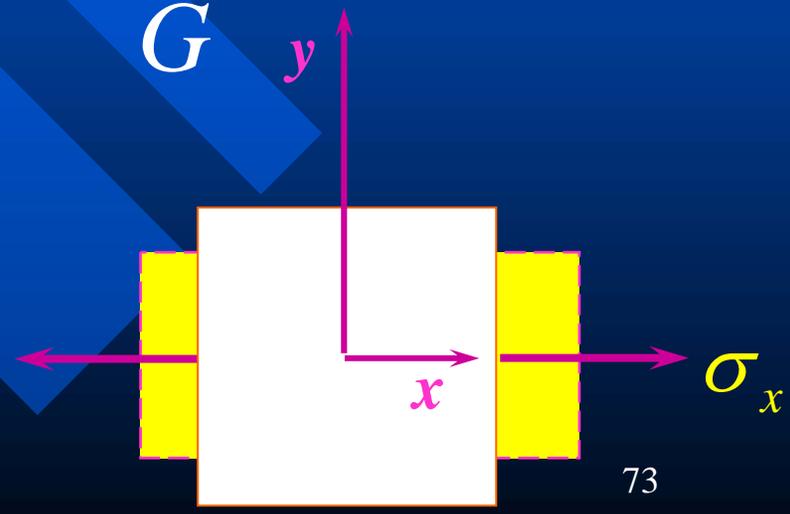
$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{或} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

- 纯剪切应力状态下的剪切胡克定律

$$\tau = G\gamma \quad \text{或} \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

- 横向变形与泊松比

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x = -\mu\frac{\sigma_x}{E}$$



- 广义胡克定律
 - ◆ 三向应力状态

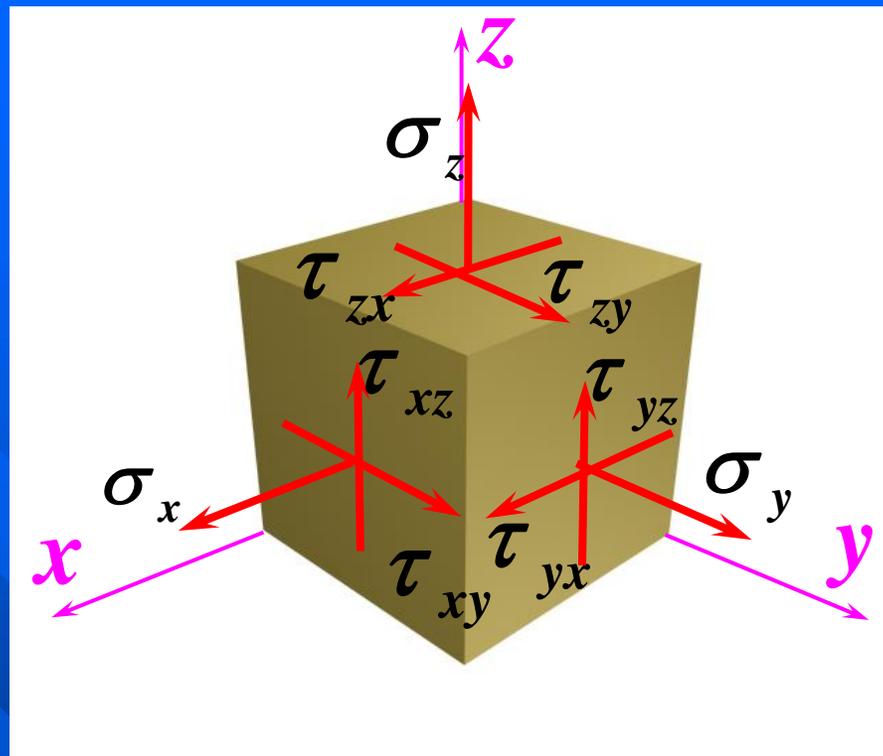
可看作是三组单向应力状态和三组纯剪切的组合。

- ◆ 叠加原理

用叠加原理的条件：

- (1) 各向同性材料；
- (2) 小变形；
- (3) 变形在线弹性范围内。

- ◆ x 方向的线应变 ε_x σ_x 引起的部分： $\varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E}$



◆ x 方向的线应变 ε_x

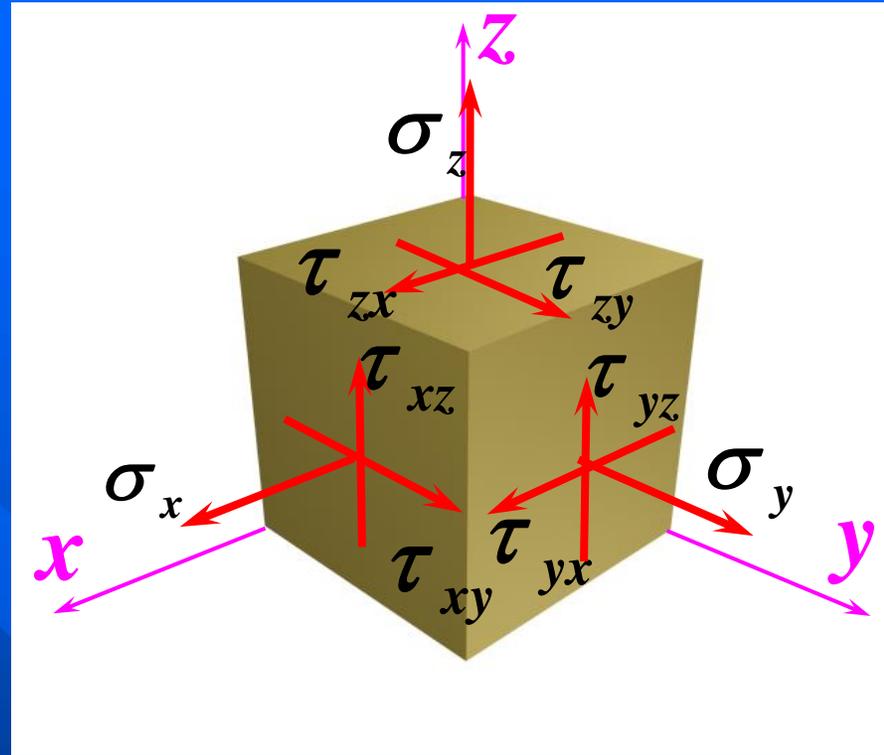
σ_x 引起的部分: $\varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E}$

σ_y 引起的部分:
 $\varepsilon_{x2} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$

σ_z 引起的部分:
 $\varepsilon_{x3} = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$

叠加得: $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$

→ $\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$



叠加得:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$$



同理可得:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right.$$

$$\text{剪应变为: } \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

这六个公式即为广义胡克定律。

◆ 用主应力表示的广义胡克定律

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{array} \right.$$

$$\gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = 0$$

从前三式中可解出三个主应力

从前三式中可解出三个主应力

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_1 + \mu(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)] \\ \sigma_2 = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_2 + \mu(\varepsilon_3 + \varepsilon_1)] \\ \sigma_3 = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_3 + \mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] \end{array} \right.$$

例 5

已知：受扭圆轴， d ， E ， μ ，测得 ε_{45° 。

求：外加扭矩的值。

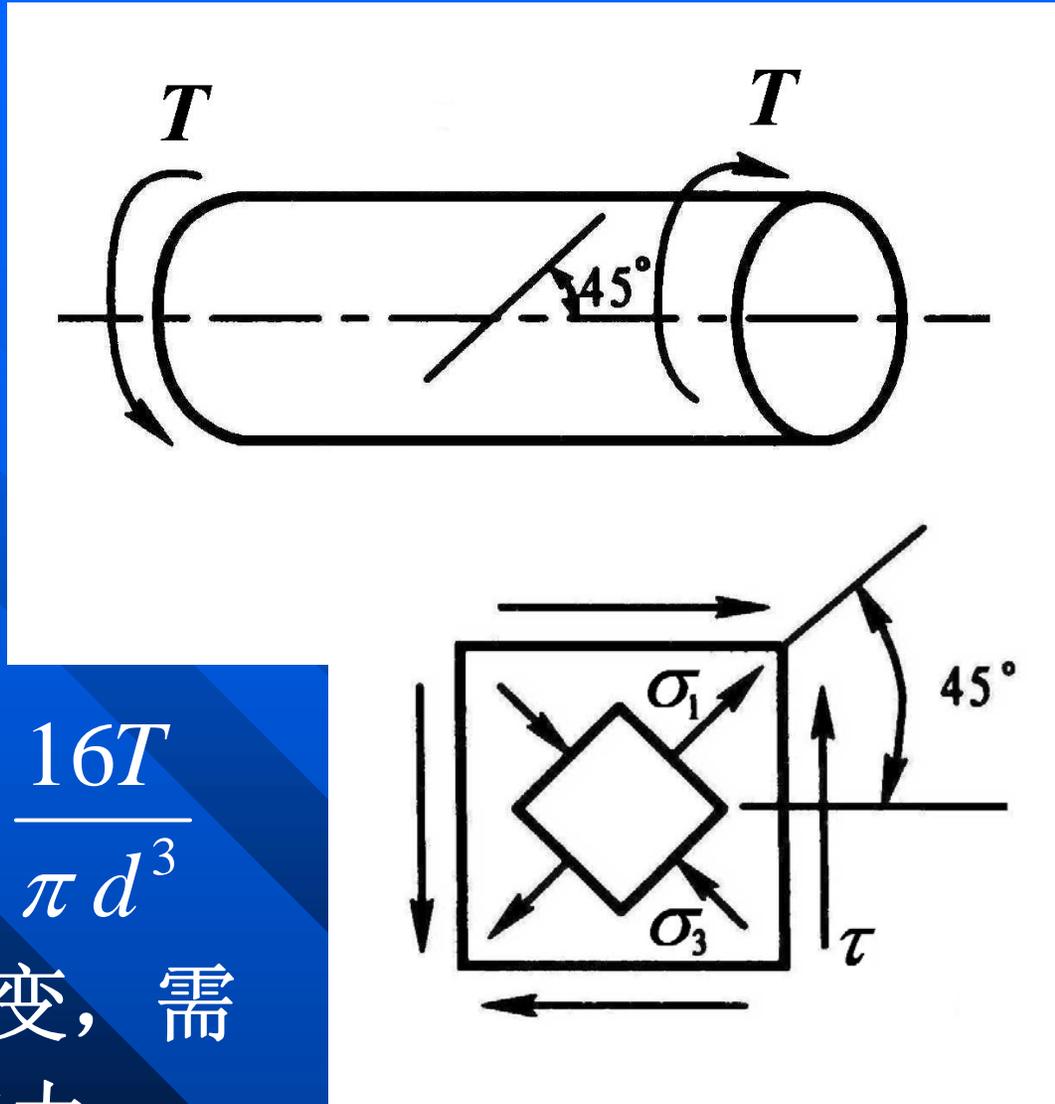
解：在测点取单元体

◆ 纯切应力状态

切应力为
$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

要求出 45° 方向的应变，需先求出 45° 方向的应力。

45° 方向为主应力方向 $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$



切应力为 $\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi d^3}$

45°方向为主应力方向

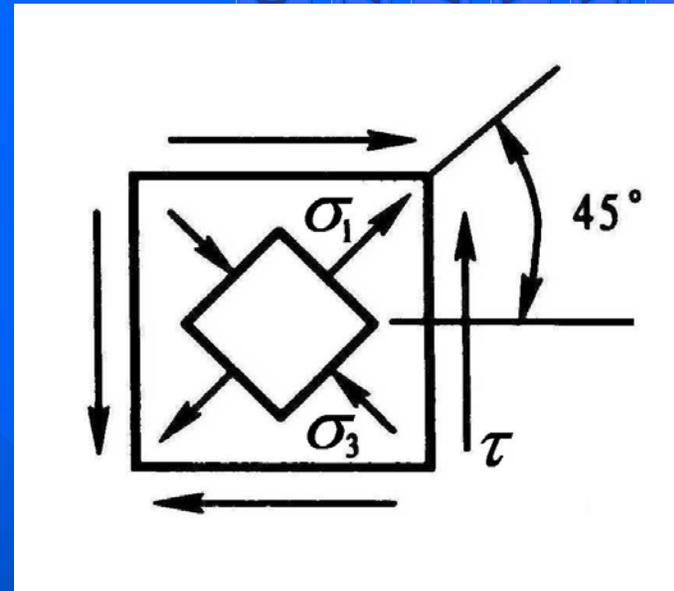
$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

由广义胡克定律

$$\varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1 + \mu}{E} \tau$$

→ $\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1 + \mu}{E} \tau = \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{16T}{\pi d^3}$

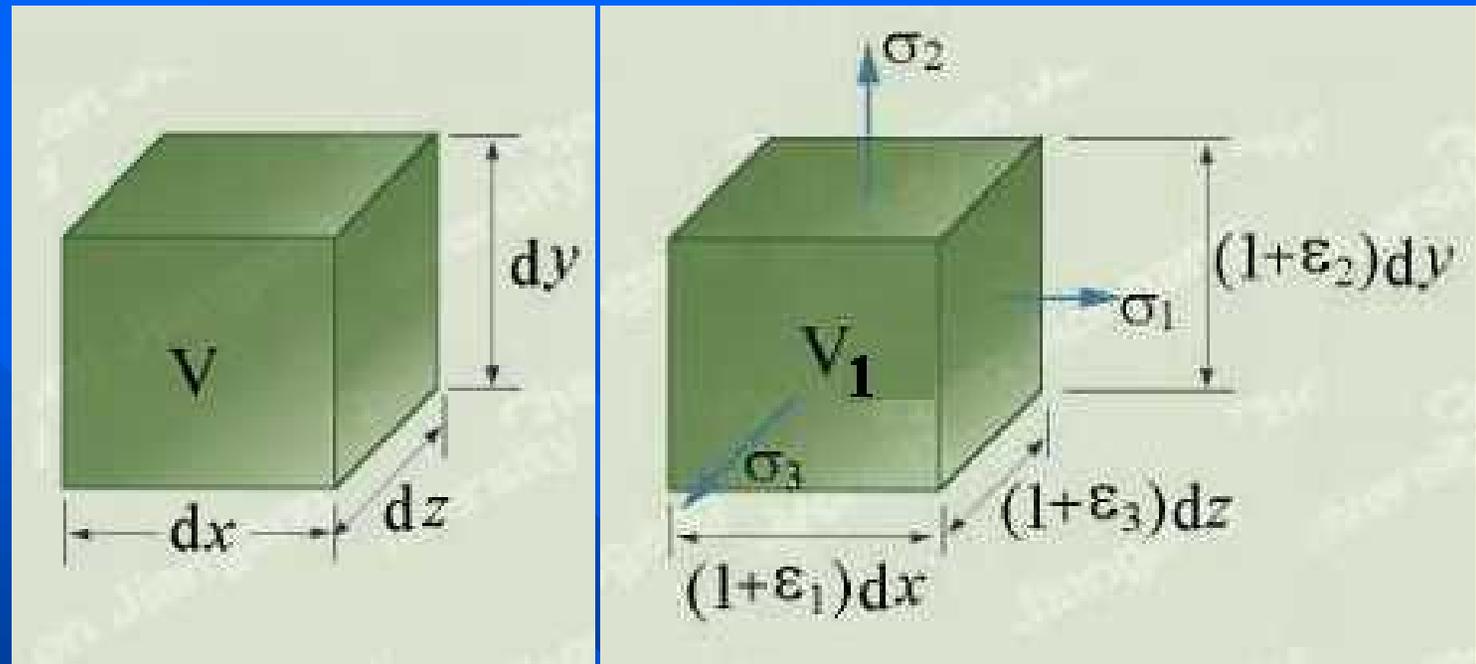
→ $T = \frac{E \varepsilon_{45^\circ} \pi d^3}{16(1 + \mu)}$



测扭矩的方法

● 体积胡克定律

◆ 单元体



变形前体积

$$V = dx dy dz$$

变形后体积

$$V_1 = (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) dx dy dz$$

略去高阶微量

$$V_1 = (1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) dx dy dz$$

单位体积的改变

变形前体积 $V = dx dy dz$

变形后体积 $V_1 = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) dx dy dz$

略去高阶微量 $V_1 = (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) dx dy dz$

单位体积的改变 $\theta = \frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$
 θ ——体积应变

将广义胡克定律 $\varepsilon_1 = (1/E)[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$

$$\varepsilon_2 = (1/E)[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = (1/E)[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

代入上式得 $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

单位体积的改变 $\theta = \frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$
 θ ——体积应变

将广义胡克定律代入上式得

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

又可写成 $\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma_m$

记 $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ —— 体积弹性模量

\rightarrow $\theta = \frac{\sigma_m}{K}$ —— 体积胡克定律

例

已知: 受扭圆轴, d , E , μ , 测得 ε_{45° 。

求: 外加扭矩的值。

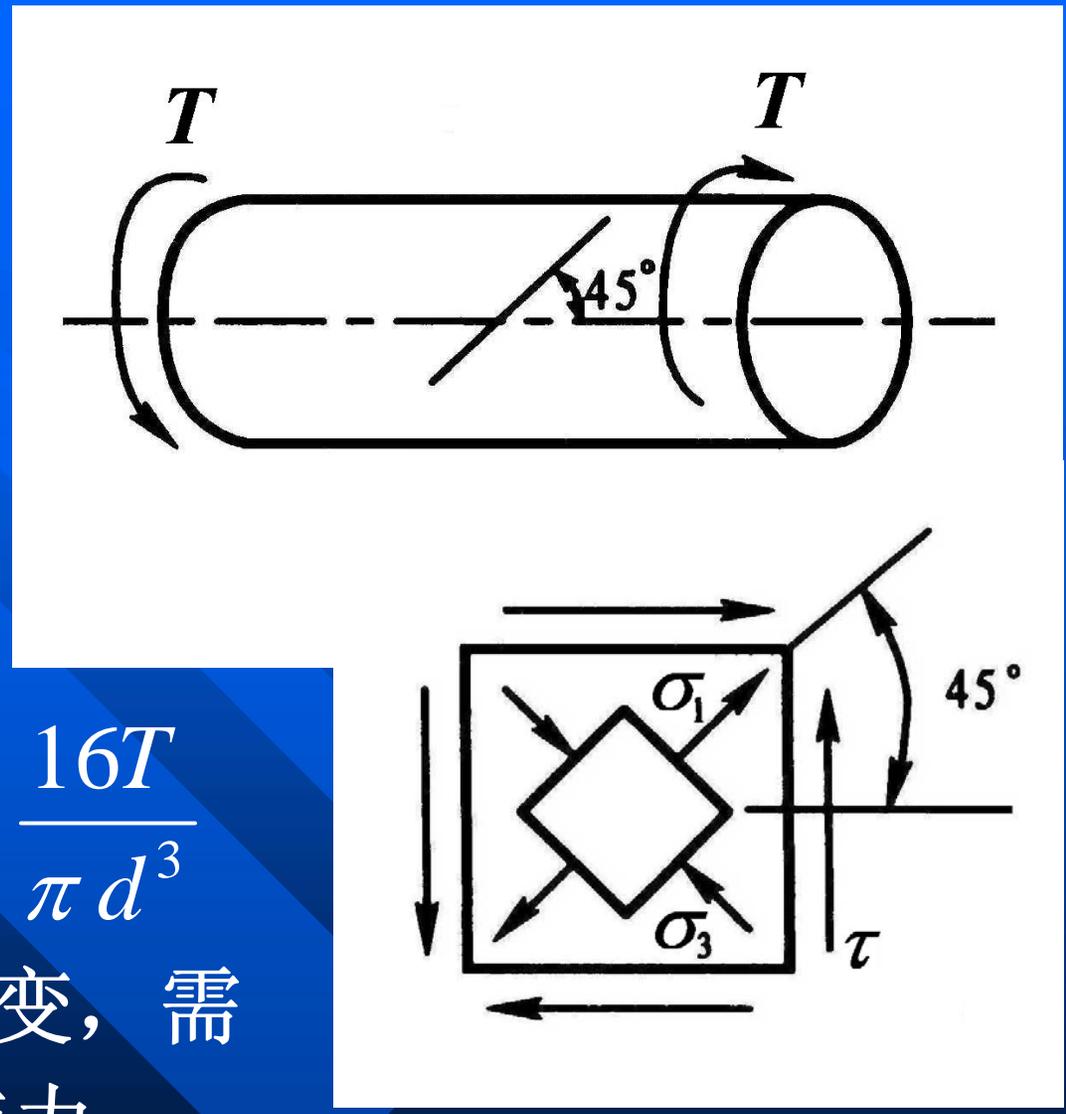
解: 在测点取单元体

◆ 纯切应力状态

切应力为
$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

要求出 45° 方向的应变, 需先求出 45° 方向的应力。

45° 方向为主应力方向 $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$



切应力为 $\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi d^3}$

45°方向为主应力方向

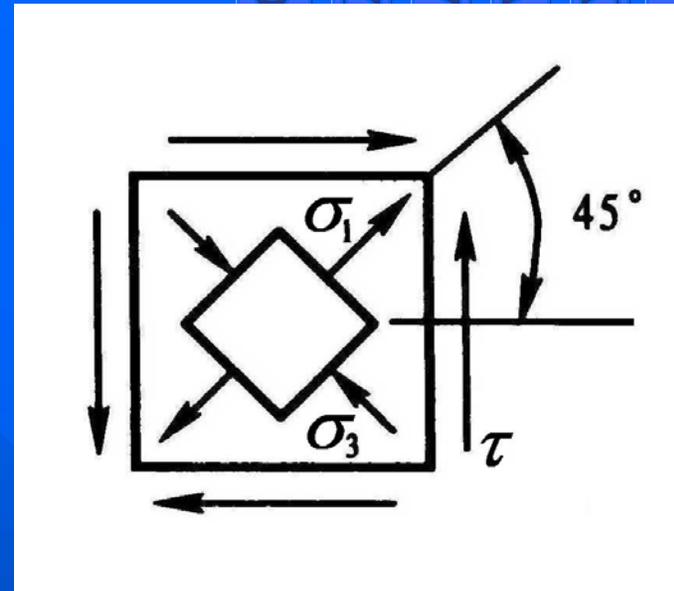
$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

由广义胡克定律

$$\varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1 + \mu}{E} \tau$$

→ $\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1 + \mu}{E} \tau = \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{16T}{\pi d^3}$

→ $T = \frac{E \varepsilon_{45^\circ} \pi d^3}{16(1 + \mu)}$



测扭矩的方法

例1 (书例7.9)

已知: 孔: $d_1=50.01\text{mm}$

柱: $d_2=50\text{mm}$, $P=300$

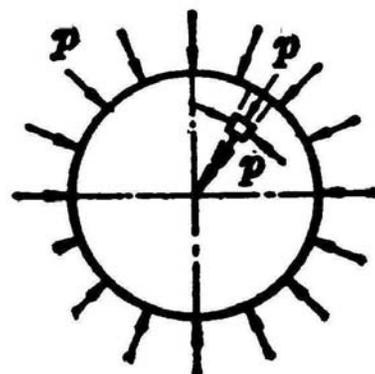
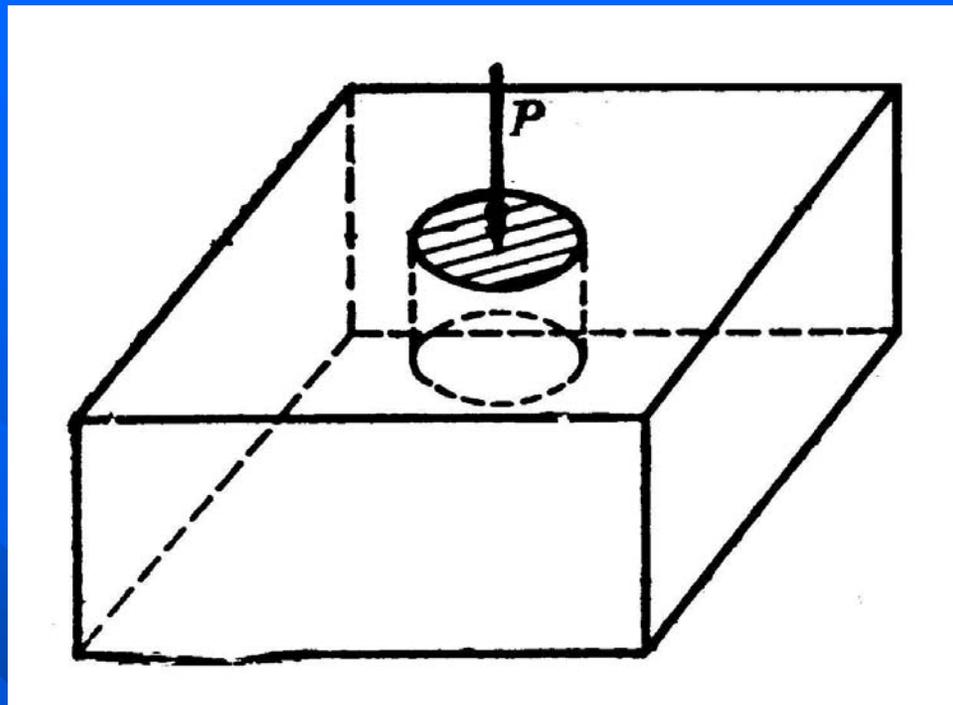
kN, 钢块不变形。

$E=200\text{GPa}$, $\mu=0.3$ 。

求: 圆柱的主应力。

解: ◆ 柱受到的压应力

$$\sigma_3 = -\frac{P}{A} = -153\text{MP}$$



$$\sigma_3 = -\frac{P}{A} = -153MP$$

径向的应变

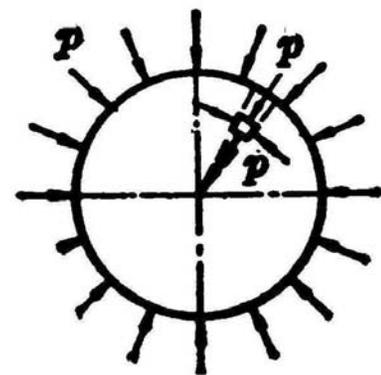
$$\varepsilon_2 = \frac{5.001 - 5}{5} = 0.0002$$

由广义胡克定律

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{E} [-p - \mu(\sigma_3 - p)]$$

可得

$$p = -\frac{\mu\sigma_3 + E\varepsilon_2}{1 - \mu} = 8.43MP$$



$$p = -\frac{\mu\sigma_3 + E\varepsilon_2}{1 - \mu} = 8.43MP$$

圆柱的主应力为：

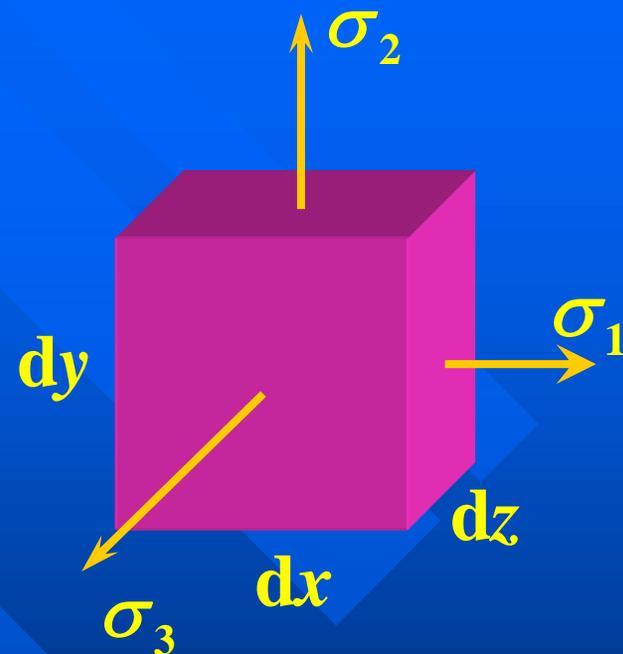
$$\sigma_1 = \sigma_2 = -p = -8.43MP$$

$$\sigma_3 = -153MP$$

§ 7.9 复杂应力状态的变形比能

1 单向应力状态下的比能

$$u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$



2 三向应力状态下的比能

- 功能原理 $U = W$

- 变形能与加载方式无关

→
$$u = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3$$

为将变形能用主应力表示，将广义胡克定律

2 三向应力状态下的比能

$$\rightarrow u = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3$$

为将变形能用主应力表示，将广义胡克定律

$$\varepsilon_1 = (1/E)[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = (1/E)[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

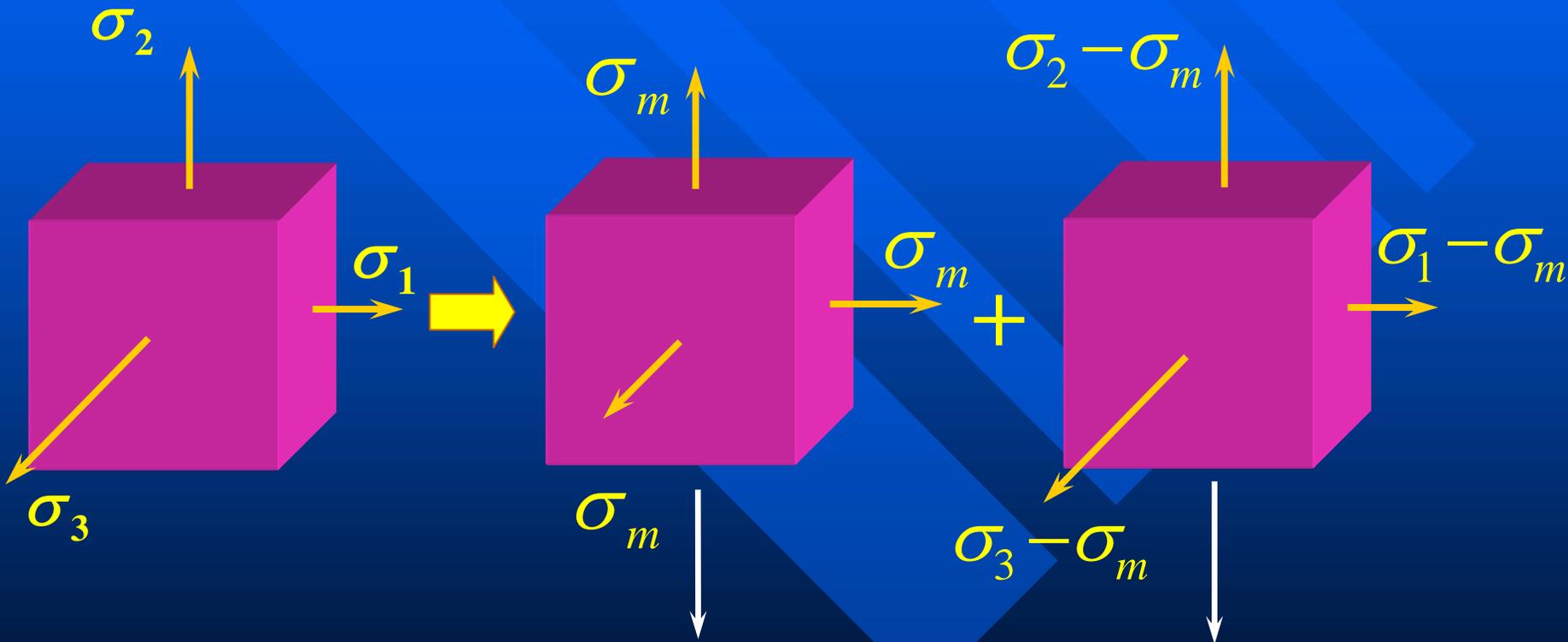
$$\varepsilon_3 = (1/E)[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

代入上式，化简得

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

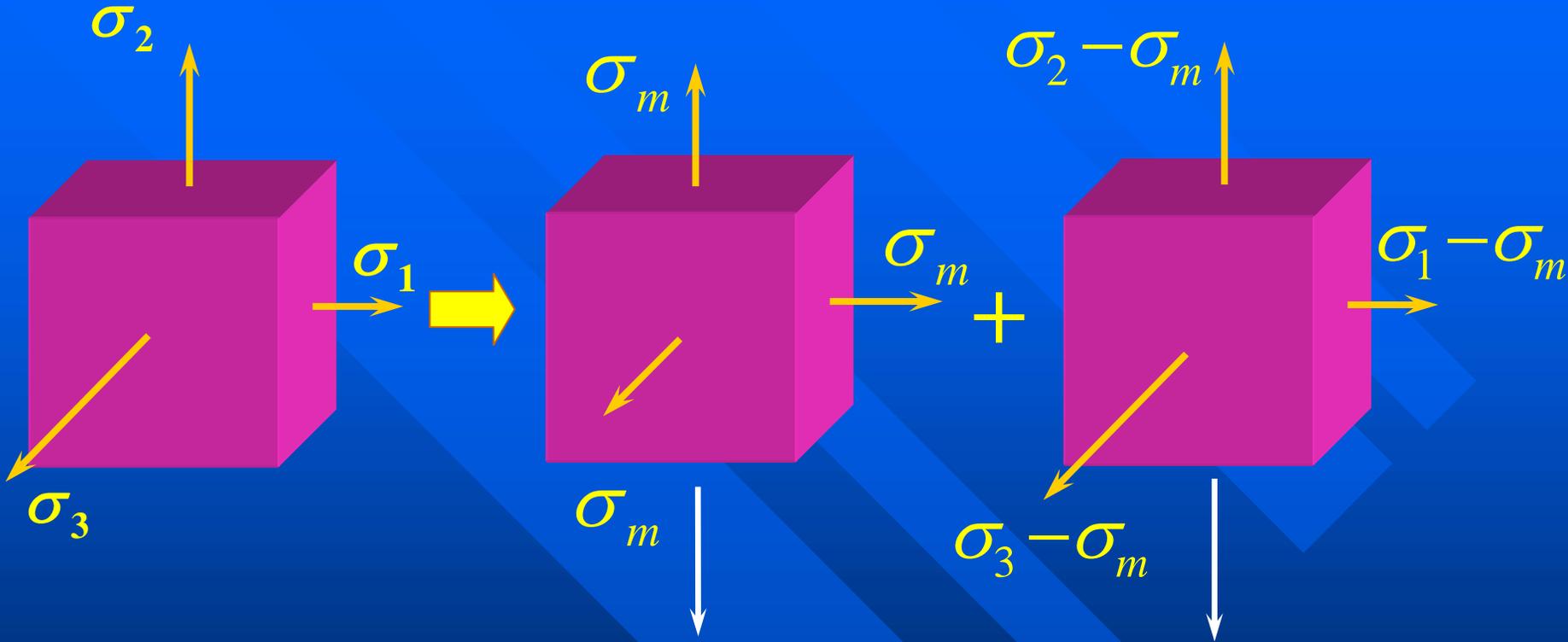
$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

3 体积改变比能和形状改变比能



体积改变, 形状不变; 体积不变, 形状改变

3 体积改变比能和形状改变比能



体积改变, 形状不变; 体积不变, 形状改变

因体积改变而贮存的变形能 — 体积改变比能 u_v

因形状改变而贮存的变形能 — 形状改变比能 u_f

- 体积改变比能

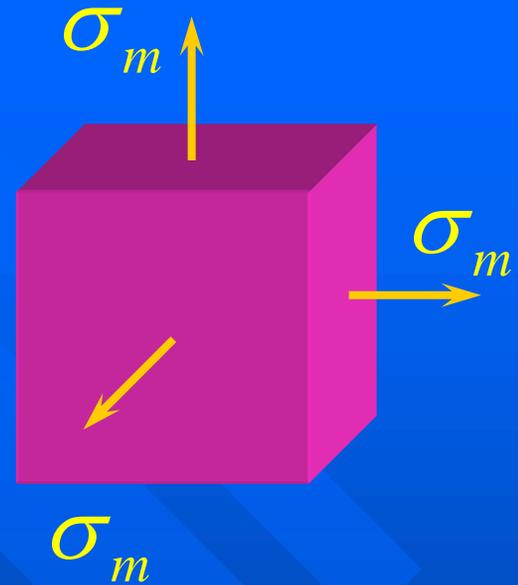
$$u_v = \frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_m + \frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_m + \frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_m$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E} [\sigma_m - \mu(\sigma_m + \sigma_m)]$$

→
$$\varepsilon_m = \frac{1-2\mu}{E} \sigma_m$$

$$u_v = \frac{3}{2} \sigma_m \varepsilon_m = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \sigma_m^2$$

→
$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$



$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

→ $u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$

• 形状改变比能

$$u_f = u - u_v$$

→ $u_f = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$

或

$$u_f = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

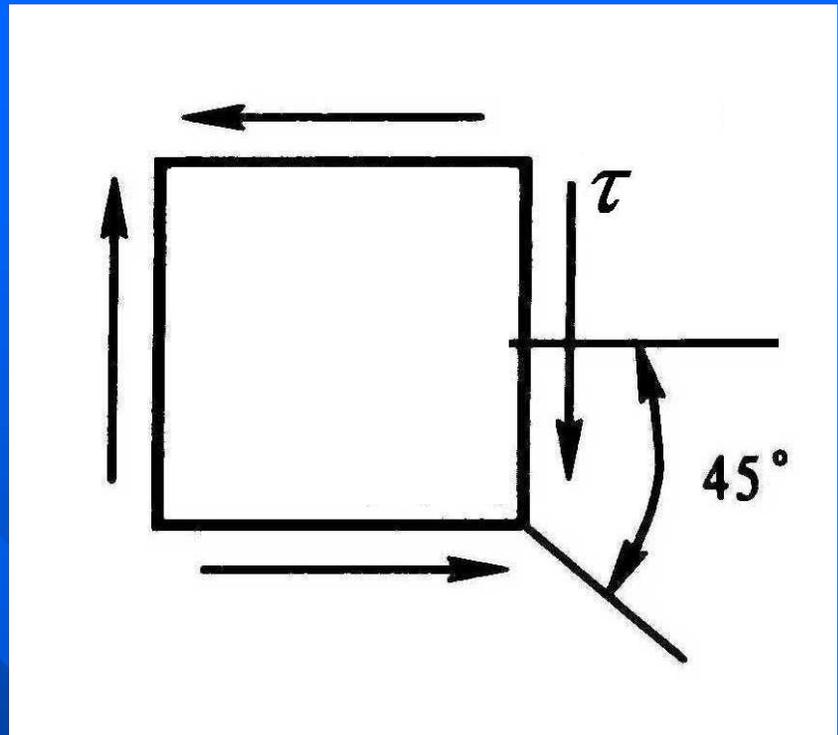
例 2 (书例8.10)

已知: 纯剪切应力状态。

求: 导出 E, G, μ 之间的关系。

解: 第3章已求出纯剪切时

$$u = \frac{\tau^2}{2G}$$



◆ 用本节公式求纯剪时的应变能

纯剪切时 $\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]$$

第3章已求出纯剪切时 $u = \frac{\tau^2}{2G}$

◆ 用本节公式求纯剪时的应变能

纯剪切时 $\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]$$

$$= \frac{1}{2E} \left[\tau^2 + 0 + (-\tau)^2 - 2\mu(0 + 0 + (-\tau)\tau) \right]$$

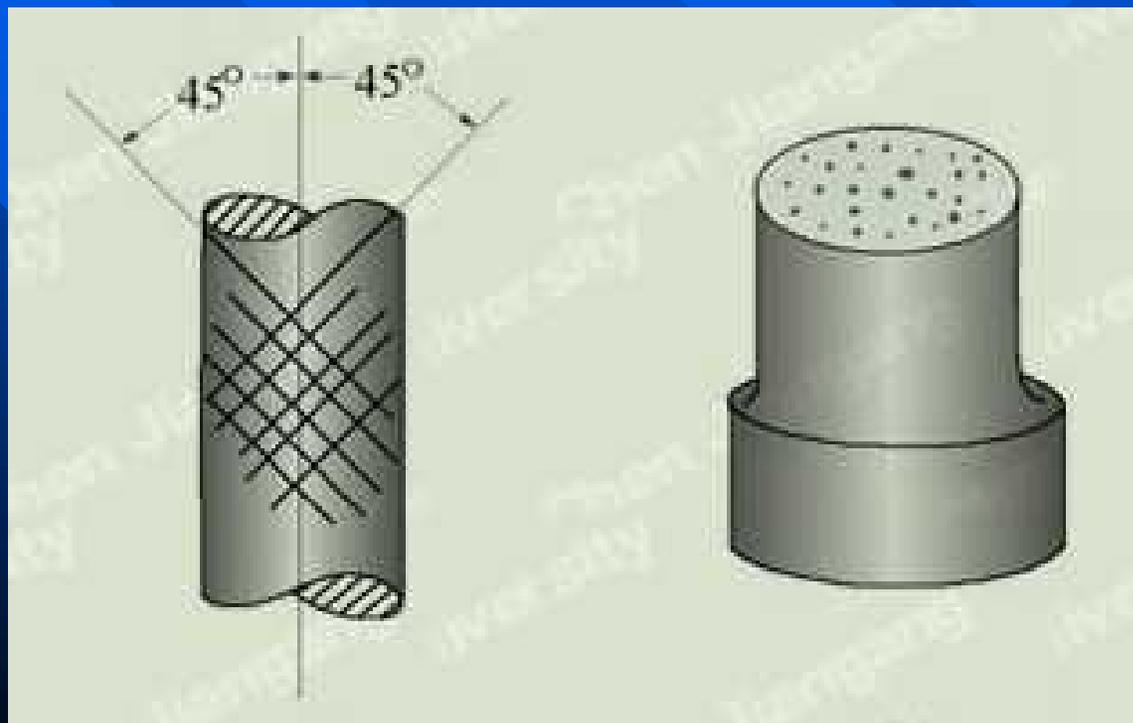
$$= \frac{1}{2E} \left[2\tau^2 + 2\mu\tau^2 \right] = \frac{1+\mu}{E} \tau^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2G} = \frac{1+\mu}{E} \quad \rightarrow \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

§ 7.10 强度理论概述

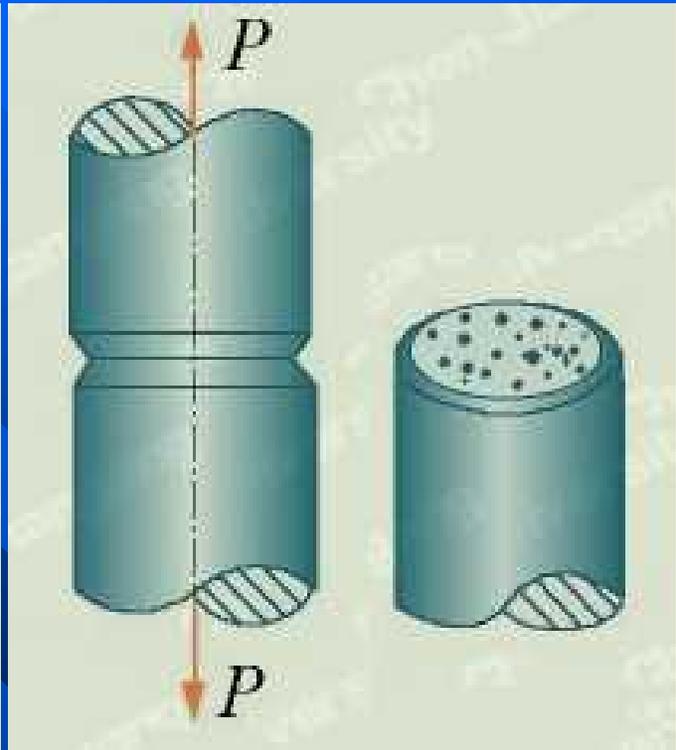
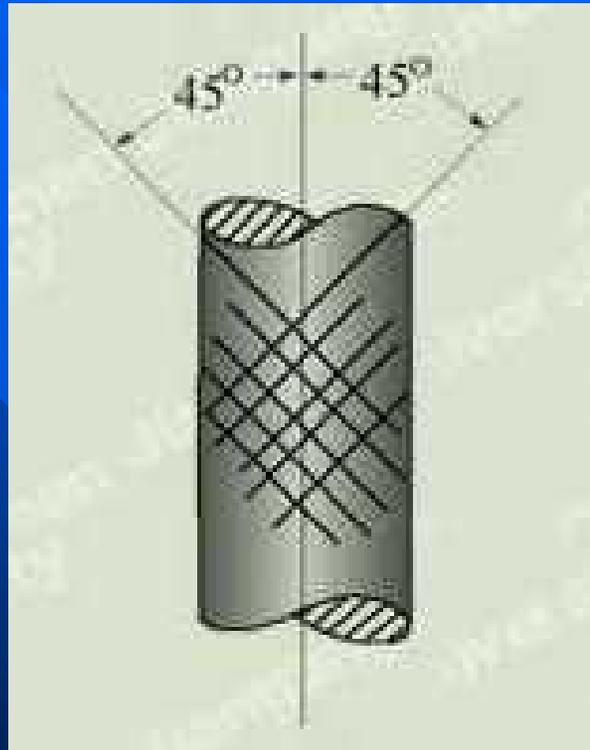
强度理论研究材料失效的判据，从而建立强度条件。

- 不同材料在相同的加载情况下，破坏(失效)的形式不同。
- ◆ 塑性材料：
屈服失效。
- ◆ 脆性材料：
断裂失效。



- 相同材料在不同的加载情况下，破坏(失效)的形式不同。

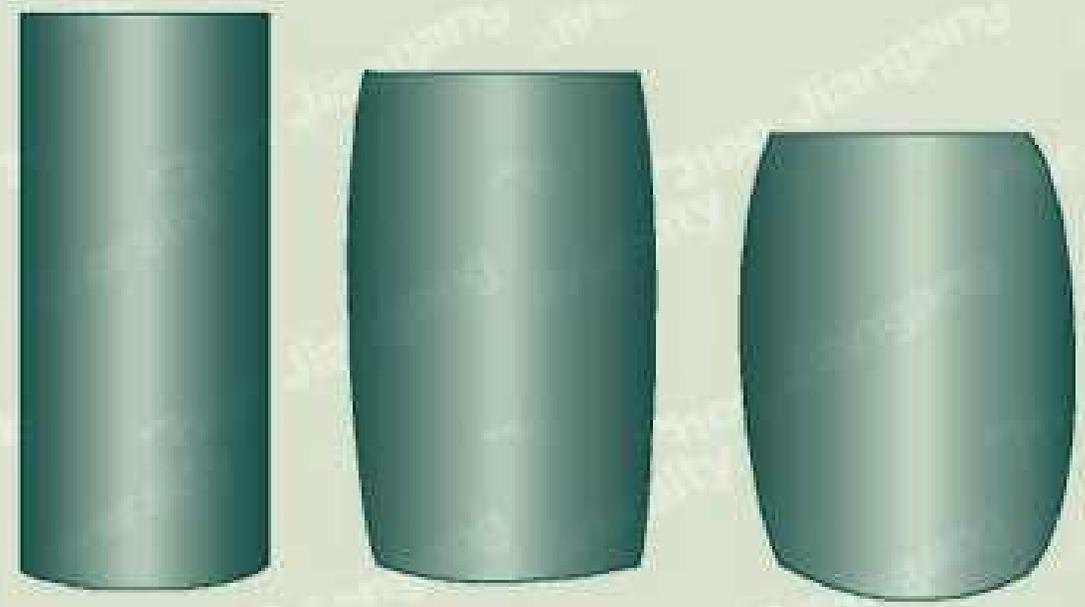
- ◆ 塑性材料：
当有深切槽时，发生断裂。
应力集中导致根部出现三向应力状态。



◆ 脆性材料:

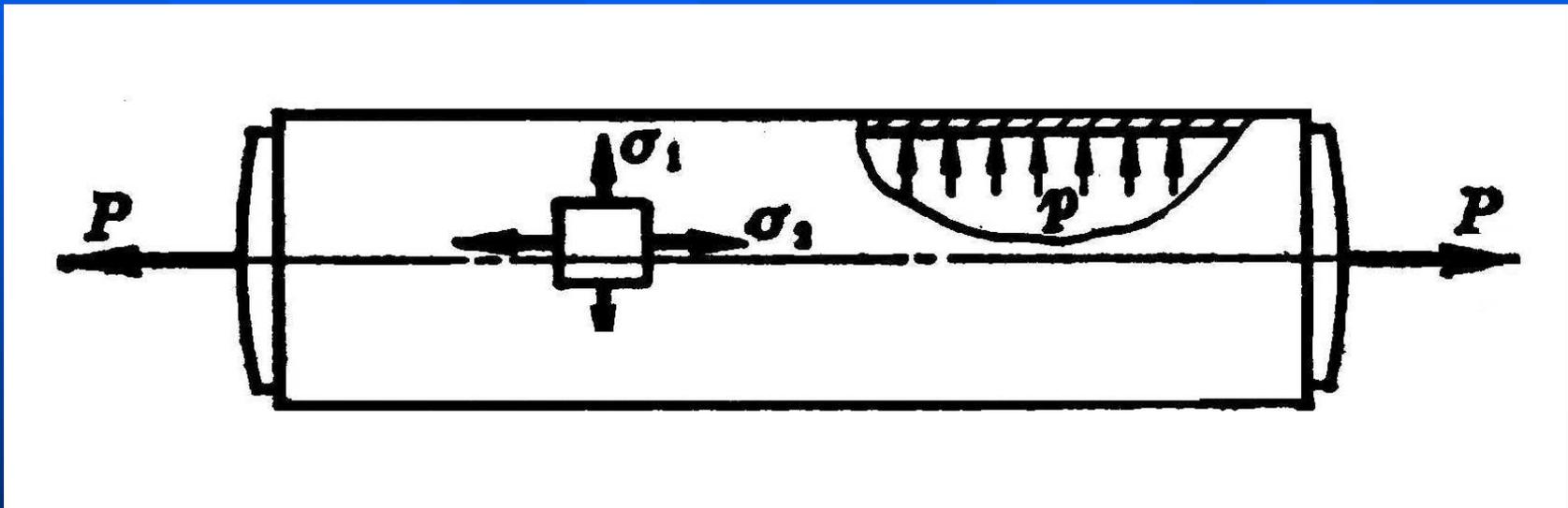


铸铁受压后形成鼓形，具有明显的塑性变形



圆柱形大理石试件在轴向压力和围压作用下发生塑性变形

- 对单向应力状态和纯剪切通过实验建立强度条件
- 对复杂应力状态无法通过实验建立强度条件



强度理论——根据部分实验结果，提出的假说。从而可根据单向应力状态的实验结果，建立复杂应力状态下的强度条件。

§ 7.11 四种常用的强度理论

强度理论分为两类：

- ◆ 适用于断裂失效情况
- ◆ 适用于屈服失效情况

1 最大拉应力理论(第一强度理论)

- 基本观点

不论是什么应力状态，只要最大拉应力达到材料的某一极限，就发生脆性断裂。

- 失效准则

- ◆ 单向拉伸失效时 $\sigma_1 = \sigma_b, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$

- ◆ 复杂应力状态时，令 $\sigma_1 = \sigma_b$

1 最大拉应力理论(第一强度理论)

- 基本观点

不论是什么应力状态，只要最大拉应力达到材料的某一极限，就发生脆性断裂。

- 失效准则

- ◆ 单向拉伸失效时 $\sigma_1 = \sigma_b, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$

- ◆ 复杂应力状态时，令 $\sigma_1 = \sigma_b$

- 强度条件

$$\sigma_1 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$$

- 相当应力

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

- 强度条件 $\sigma_1 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$
- 相当应力 $\sigma_{r1} = \sigma_1$
- 适用对象 脆性材料受拉，塑性材料受三向拉伸且 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 相近。
- 缺点 没有考虑 σ_2 和 σ_3 的影响，且无法应用于没有拉应力的情况。

2 最大伸长线应变理论(第二强度理论)

- 基本观点

不论是什么应力状态，只要最大伸长线应变达到材料的某一极限，就发生脆性断裂。

2 最大伸长线应变理论(第二强度理论)

- 基本观点

不论是什么应力状态，只要最大伸长线应变达到材料的某一极限，就发生脆性断裂。

- 失效准则

- ◆ 单向拉伸失效时

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_b}{E}$$

- ◆ 复杂应力状态时，令

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_b}{E}$$

$$\rightarrow \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b$$

- 失效准则

- ◆ 单向拉伸失效时 $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_b}{E}$
- ◆ 复杂应力状态时, 令

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_b}{E}$$

→ $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b$

- 强度条件 $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$

- 相当应力 $\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$

- 适用对象 脆性材料受压。

- 缺点 对脆性材料受拉与试验符合不好。

3 最大切应力理论(第三强度理论)

- 基本观点

不论是什么应力状态，只要最大切应力达到材料的某一极限，就发生塑性屈服。

- 失效准则

- ◆ 单向拉伸失效时 $\tau_{\max} = \frac{\sigma_s}{2}$

- ◆ 复杂应力状态时 $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_s}{2}$



$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

- 强度条件

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$$



- 失效准则

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

- 强度条件

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$$

- 相当应力

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

- 适用对象

塑性材料的一般受力状态。

- 缺点

偏于安全；没有考虑 σ_2 的影响。

4 形状改变比能理论(第四强度理论)

- 基本观点

不论是什么应力状态，只要形状改变比能达到材料的某一极限，就发生塑性屈服。

- 失效准则

4 形状改变比能理论(第四强度理论)

- 基本观点

不论是什么应力状态，只要形状改变比能达到材料的某一极限，就发生塑性屈服。

- 失效准则

$$u_f = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

- ◆ 单向拉伸失效时 $\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$

代入上式得 $u_f = \frac{1+\mu}{6E} (2\sigma_s^2)$

- 失效准则

$$u_f = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

- ◆ 单向拉伸失效时 $\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$

代入上式得 $u_f = \frac{1+\mu}{6E} (2\sigma_s^2)$

- ◆ 复杂应力状态时

令上式在复杂应力状态时成立，得

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_s$$

- 失效准则

- ◆ 复杂应力状态时

令上式在复杂应力状态时成立，得

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_s$$

- 强度条件

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

- 相当应力

- 强度条件

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

- 相当应力

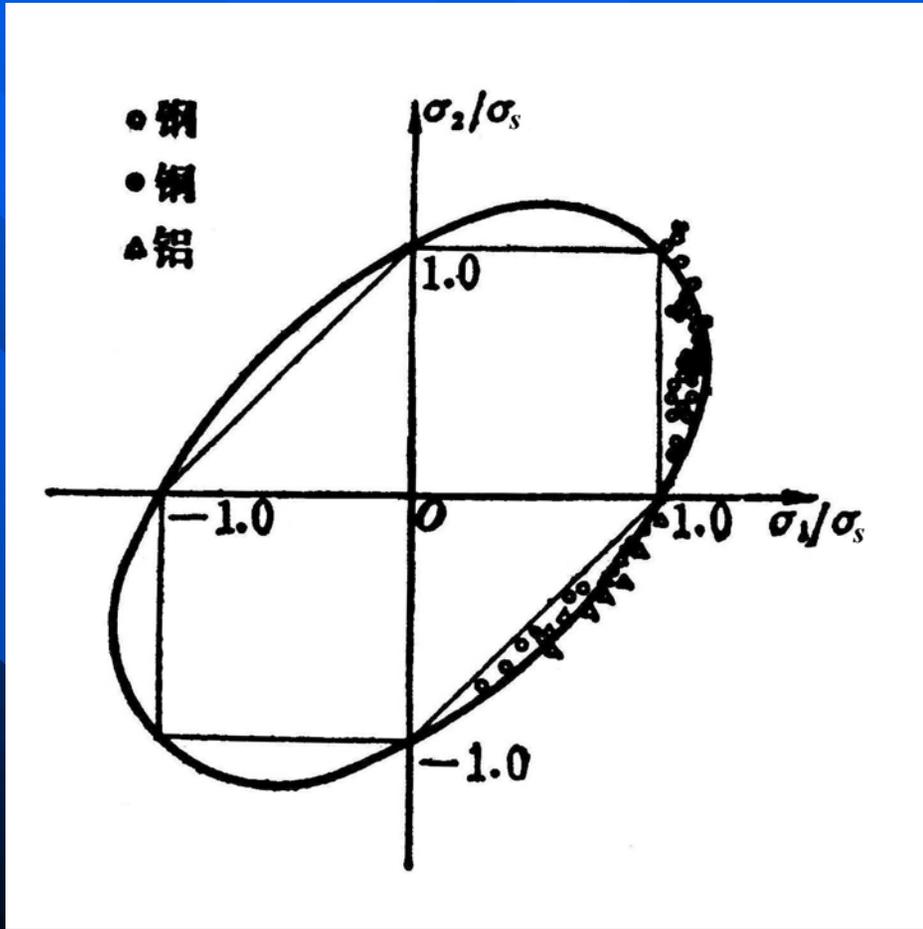
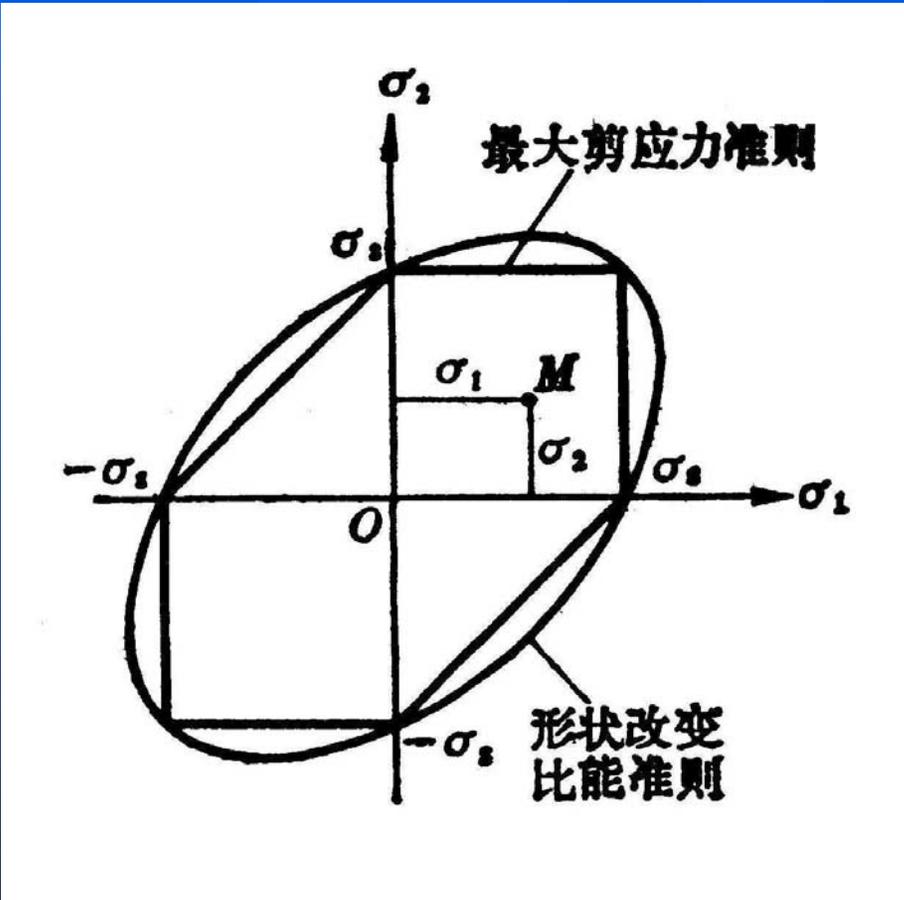
$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

- 适用对象 塑性材料的一般受力状态。

- 缺点 计算相当应力较麻烦。

- 第三强度理论和第四强度理论的图形

- 第三强度理论和第四强度理论的图形
在二向应力状态下，第三强度理论和第四强度理论的图形为



5 小结

- ◆ 强度条件可统一写为 $\sigma_r \leq [\sigma]$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

- ◆ 第一强度理论和第二强度理论适用于脆性材料。

脆性材料受拉 脆性材料受压

- ◆ 第三强度理论和第四强度理论适用于塑性材料。

6 几种常见应力状态的相当应力

(1) 单向拉伸



$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 = \sigma$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r4} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \\ &= \sigma \end{aligned}$$

即：在单向拉伸应力状态下，各相当应力相同。

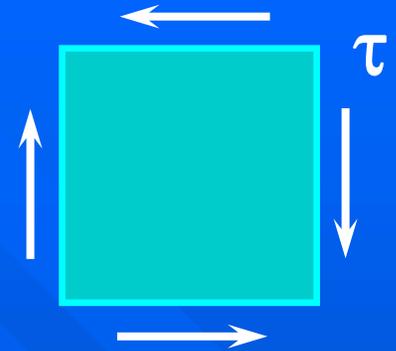
(2) 纯剪切

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 = \tau$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = (1 + \mu)\tau$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau$$



$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}[(\tau - 0)^2 + (0 + \tau)^2 + (-\tau - \tau)^2]} = \sqrt{3}\tau$$

这就是书例8.12的主要内容。

(3) 弯曲时一般位置处的应力状态

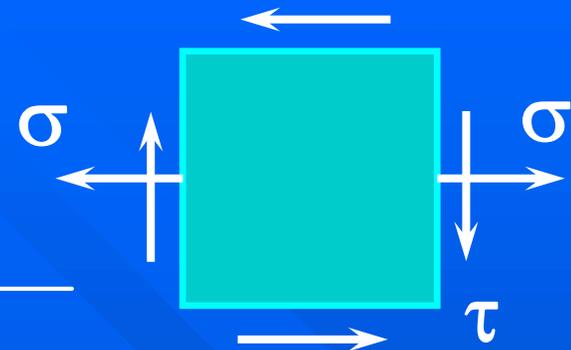
$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$= (1 - \mu) \frac{\sigma}{2} + (1 + \mu) \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$



$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r4} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \\ &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \end{aligned}$$

谢谢大家!

