材 料 力 学

第六章

弯 曲 变 形

南京航空航天大学
陶秋帆等

第六章　弯曲变形

本章内容:

1 工程中的弯曲变形问题

2 挠曲线的微分方程

3 用积分法求弯曲变形

4 用叠加法求弯曲变形

5 简单静不定梁

6 提高弯曲刚度的一些措施

§6.1 工程中的弯曲变形问题

- 对梁除了有强度要求外，还有刚度要求。
  - 大多数情况下，要求梁的变形不能过大；
  - 一些特殊情况下，要利用弯曲变形。
- 求解静不定问题需要计算梁的变形。

§6.2 挠曲线的微分方程

- 挠曲线　梁的轴线变形后的曲线。

  对称弯曲时，是一条平面曲线。

§6.2 挠曲线的微分方程

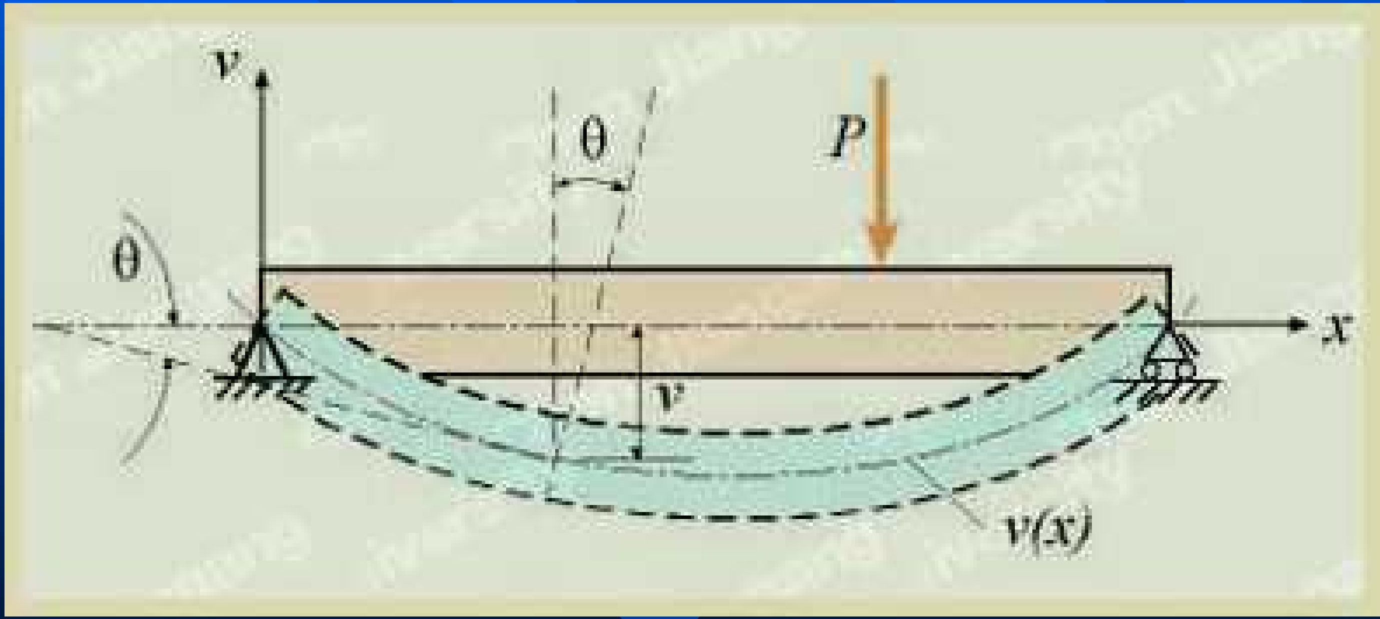
1 基本概念

- 挠曲线　梁的轴线变形后的曲线。
  对称弯曲时，是一条平面曲线。

- 弯曲变形的度量

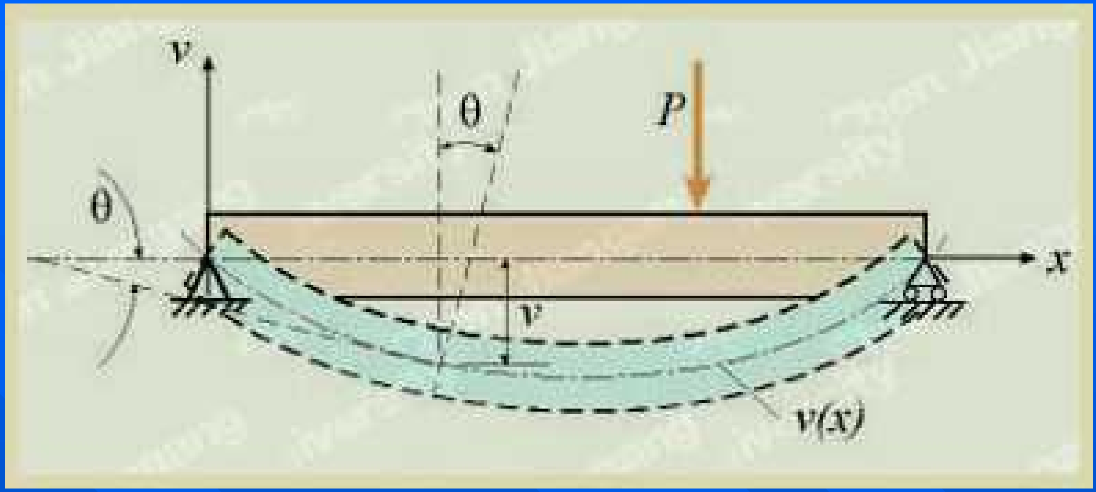
◆ 挠度

横截面形心沿y方向的位移，用v表示。



◆ 挠度

横截面形心沿y方向的位移，用v表示。



◆ 转角

变形后，横截面相对其原来位置转过的角度。用θ表示。转角 θ 以逆时针为正。

- 挠曲线方程　　$v = f(x)$

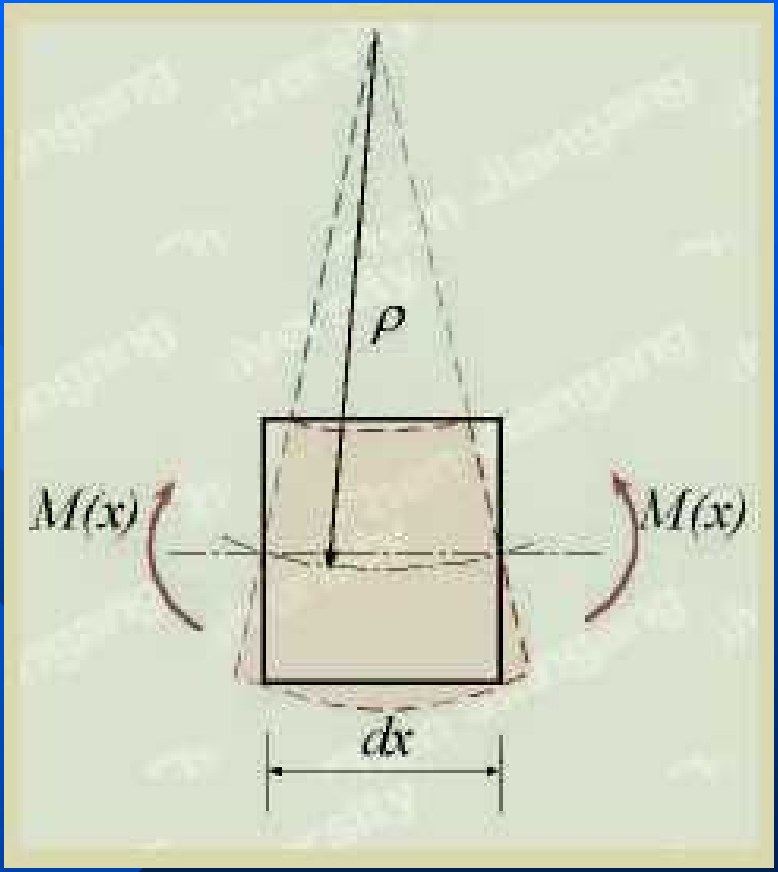
转角即为挠曲线在该点的切线与x轴的夹角。

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

2 挠曲线的微分方程

上一章中，已得到：忽略剪力对变形的影响时，梁对称弯曲时的曲率为

$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI}$$



- 由高等数学公式

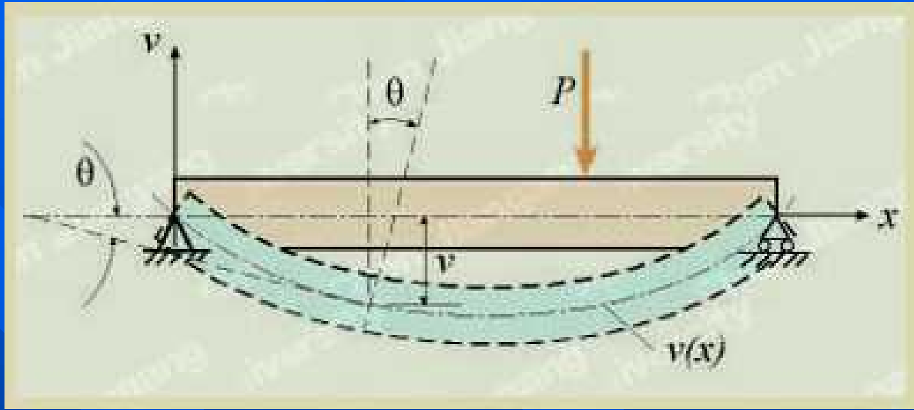
$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{\pm\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI},\qquad \frac{1}{\rho(x)}=\frac{\pm\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{\pm\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{M(x)}{EI}$$

这就是挠曲线的微分方程。

$$\frac{\pm\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{M(x)}{EI}$$



- 挠曲线的近似微分方程

在小变形的情况下，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\ll 1 \quad \Rightarrow \quad \pm\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M(x)}{EI}$$

- 方程中正负号的确定

- 挠曲线的近似微分方程

在小变形的情况下，

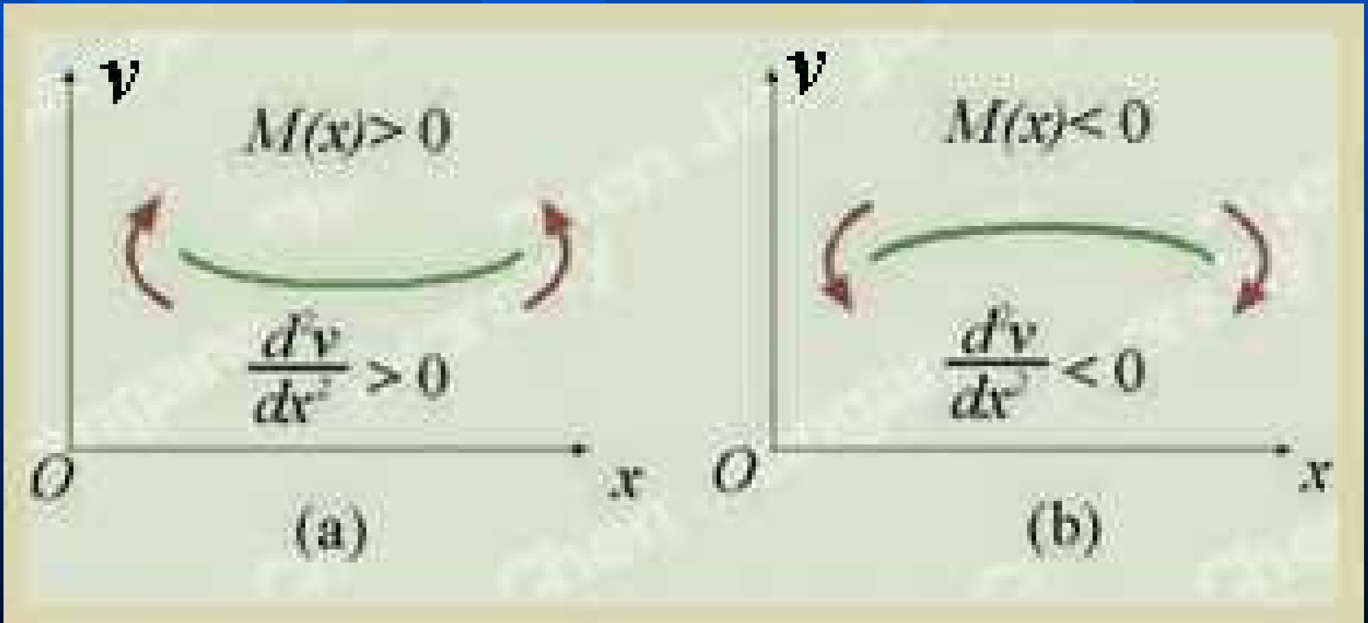
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \prec\prec 1 \quad \Longrightarrow \quad \pm\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

- 方程中正负号的确定

所以方程中应取正号。

$\Longrightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI}$$



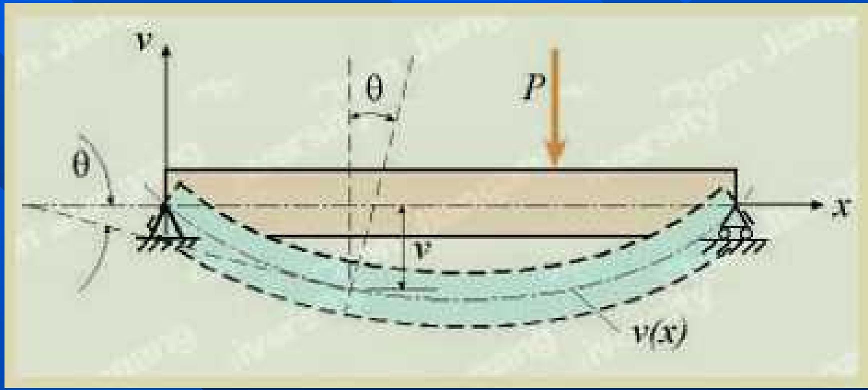
● 挠曲线的近似微分方程

在小变形的情况下，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \prec\prec 1 \quad \Longrightarrow \quad \pm\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

◆ 方程中正负号的确定　方程中应取正号。

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI}$$



转角：　$\theta \approx \tan\theta = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

注意：挠曲线的近似微分方程仅适用于小变形的平面弯曲问题。

§6.3 用积分法求弯曲变形

挠曲线近似微分方程 $$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M(x)}{EI}$$

积分一次，得 $$\theta=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\int\frac{M(x)}{EI}\mathrm{d}x+C$$

再积分一次，得 $$v=\iint\left(\frac{M(x)}{EI}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+Cx+D$$

其中，C、D为积分常数，由边界条件确定。

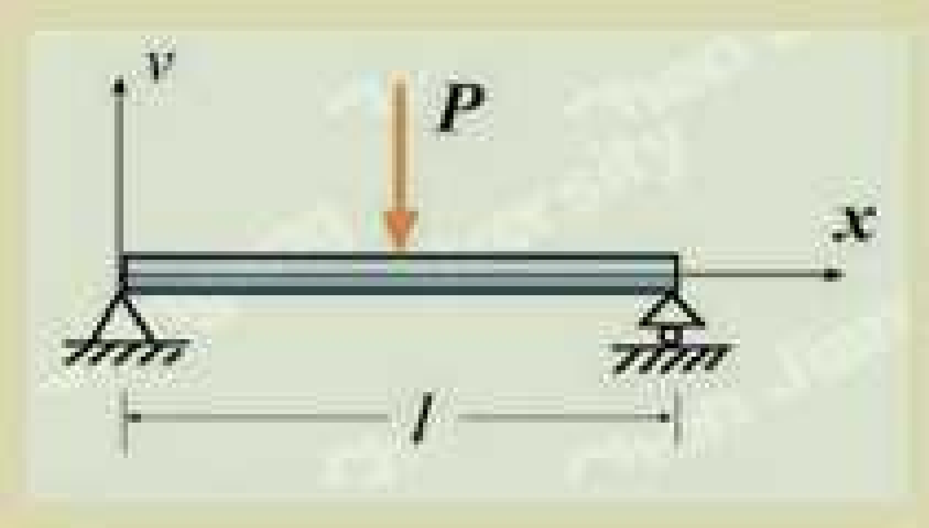
- 边界条件

- 边界条件

几种典型的边界条件

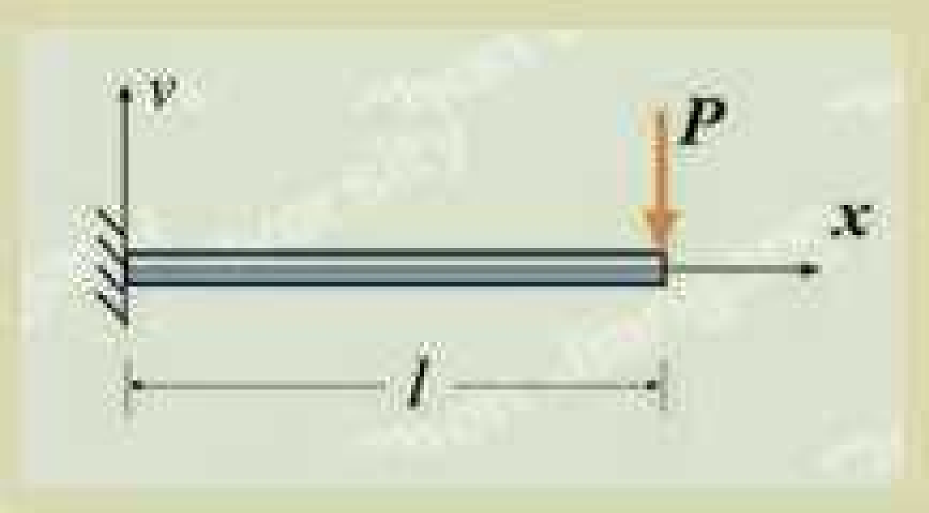
- 简支梁

$$v(0)=0, \quad v(l)=0$$



- 悬臂梁

$$v(0)=0, \quad v'(0)=0$$



- 弯曲变形的对称点处

$$\theta=v'=0$$

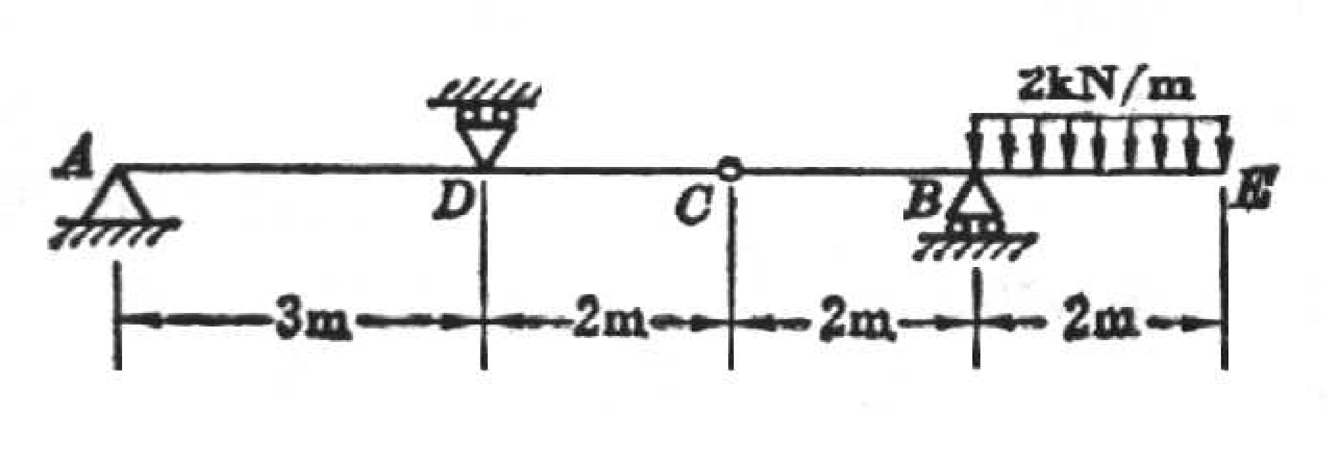
- 连续条件

在挠曲线的任意点处，有唯一的挠度和转角。

- 连续条件

在挠曲线的任意点处，有唯一的挠度和转角。

D点和C点的连续条件各为什么？



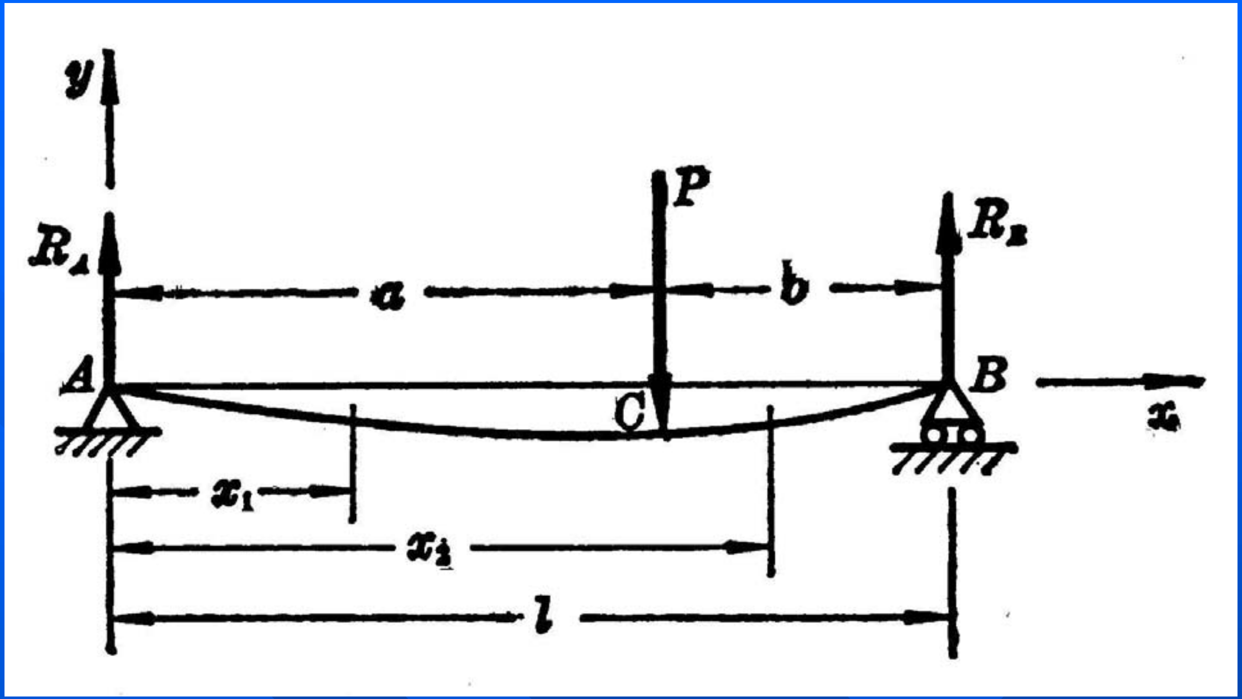
D点： $v_{1D}=v_{2D}=0$ $\theta_{1D}=\theta_{2D}$

C点： $v_{2D}=v_{3D}$， $\boxed{\theta_{2D}\neq\theta_{3D}}$

- 中间铰处，挠度连续，转角不连续。

- 梁的刚度条件 $\left|f\right|_{\max}\leq[f]$， $\left|\theta\right|_{\max}\leq[\theta]$

例 2 (书例6.3)



已知：简支梁受集中力作用。

求：转角和挠曲线方程。

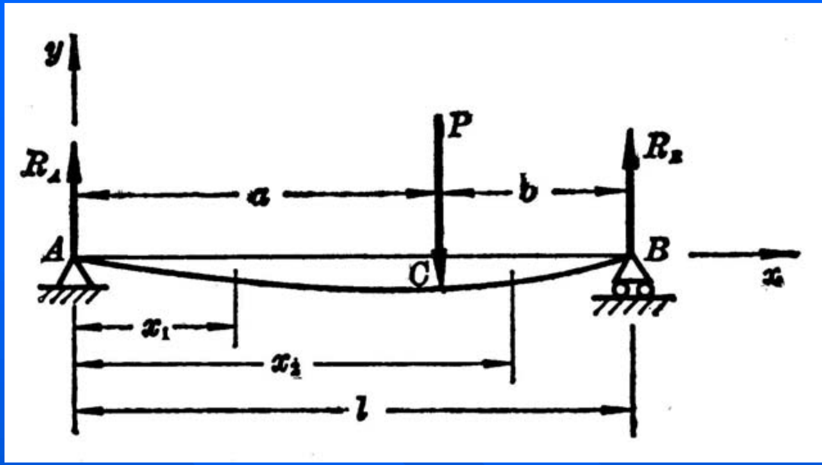
解：

(1) 求支反力，列弯矩方程

- 支反力 $R_A = \frac{Pb}{l}, \quad R_B = \frac{Pa}{l}$
- 弯矩方程

AC段： $M_1 = \frac{Pb}{l} x_1 \quad (0 \le x_1 \le a)$

(1) 求支反力，列弯矩方程



- 弯矩方程

AC段： $$M_1 = \frac{Pb}{l} x_1 \quad (0 \le x_1 \le a)$$

CB段： $$M_2 = \frac{Pb}{l} x_2 - P(x_2 - a) \qquad (a \le x_2 \le b)$$

(2) 列近似微分方程，积分

AC段： $$EIv_1'' = \frac{Pb}{l} x_1$$

$$EIv_1' = \frac{Pb}{l}\frac{1}{2} x_1^2 + C_1, \qquad EIv_1 = \frac{Pb}{l}\frac{1}{6} x_1^3 + C_1 x_1 + D_1$$

(2) 列近似微分方程，积分

AC段： $$EIv_1'' = \frac{Pb}{l} x_1$$

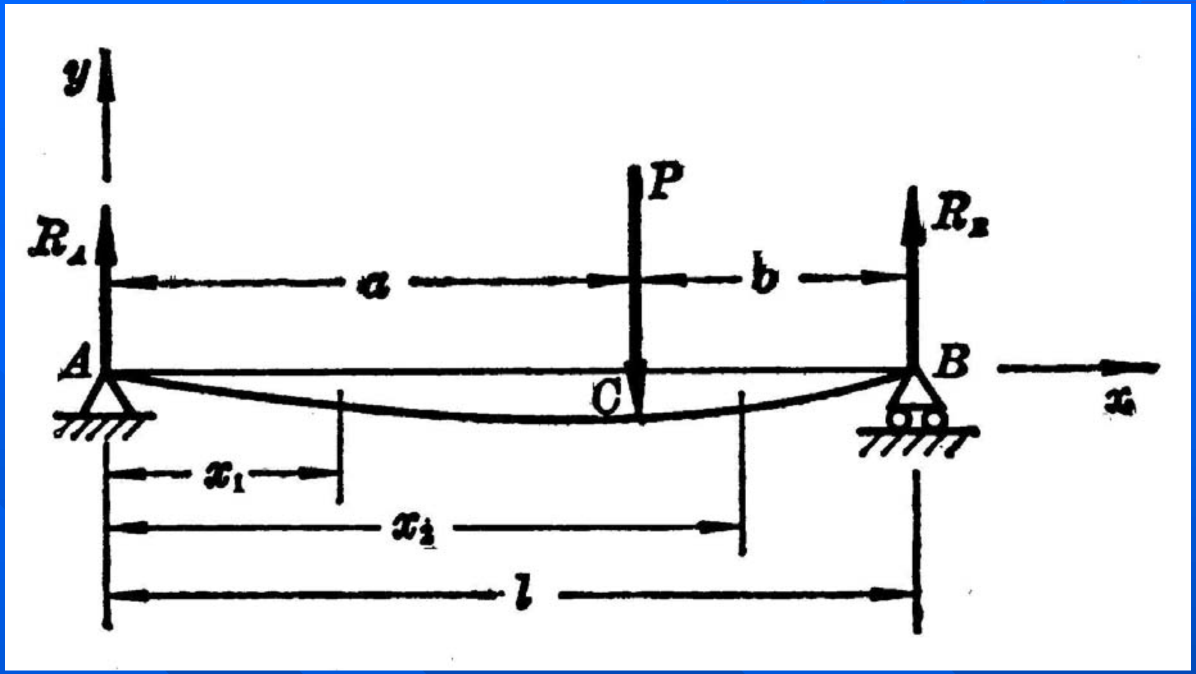
$$EIv_1' = \frac{Pb}{l}\frac{1}{2}x_1^2 + C_1\,, \qquad EIv_1 = \frac{Pb}{l}\frac{1}{6}x_1^3 + C_1 x_1 + D_1$$

CB段： $$EIv_2'' = \frac{Pb}{l} x_2 - P(x_2 - a)$$

$$EIv_2' = \frac{Pb}{l}\frac{1}{2}x_2^2 - P\frac{1}{2}(x_2 - a)^2 + C_2$$

$$EIv_2 = \frac{Pb}{l}\frac{1}{6}x_2^3 - P\frac{1}{6}(x_2 - a)^3 + C_2 x_2 + D_2$$

(3) 确定积分常数



- 连续条件

$$v_1'(a) = v_2'(a)$$

$$v_1(a) = v_2(a)$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = C_2\,,$$

$$D_1 = D_2$$

- 边界条件 $x_1 = 0$ 时，$v_1 = 0$； $x_2 = l$ 时， $v_2 = 0$

代入相应的方程，得：$D_1 = D_2 = 0$

$$C_1 = C_2 = -\frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2)$$

◆ 边界条件 $x_1=0$ 时，$v_1=0$； $x_2=l$ 时， $v_2=0$

代入相应的方程，得：$D_1=D_2=0$

$$C_1=C_2=-\frac{Pb}{6l}(l^2-b^2)$$

将求得的积分常数代回方程，得：

AC段：

$$EIv_1'=-\frac{Pb}{6l}(l^2-b^2-3x_1^2),$$

$$EIv_1=-\frac{Pbx_1}{6l}(l^2-b^2-x_1^2)$$

CB段：

$$EIv_2'=-\frac{Pb}{6l}[(l^2-b^2-3x_2^2)+\frac{3l}{b}(x_2-a)^2]$$

将求得的积分常数代回方程，得:

AC段：
$$EIv_1' = -\frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2 - 3x_1^2),$$

$$EIv_1 = -\frac{Pbx_1}{6l}(l^2 - b^2 - x_1^2)$$

CB段：
$$EIv_2' = -\frac{Pb}{6l}[(l^2 - b^2 - 3x_2^2) + \frac{3l}{b}(x_2 - a)^2]$$

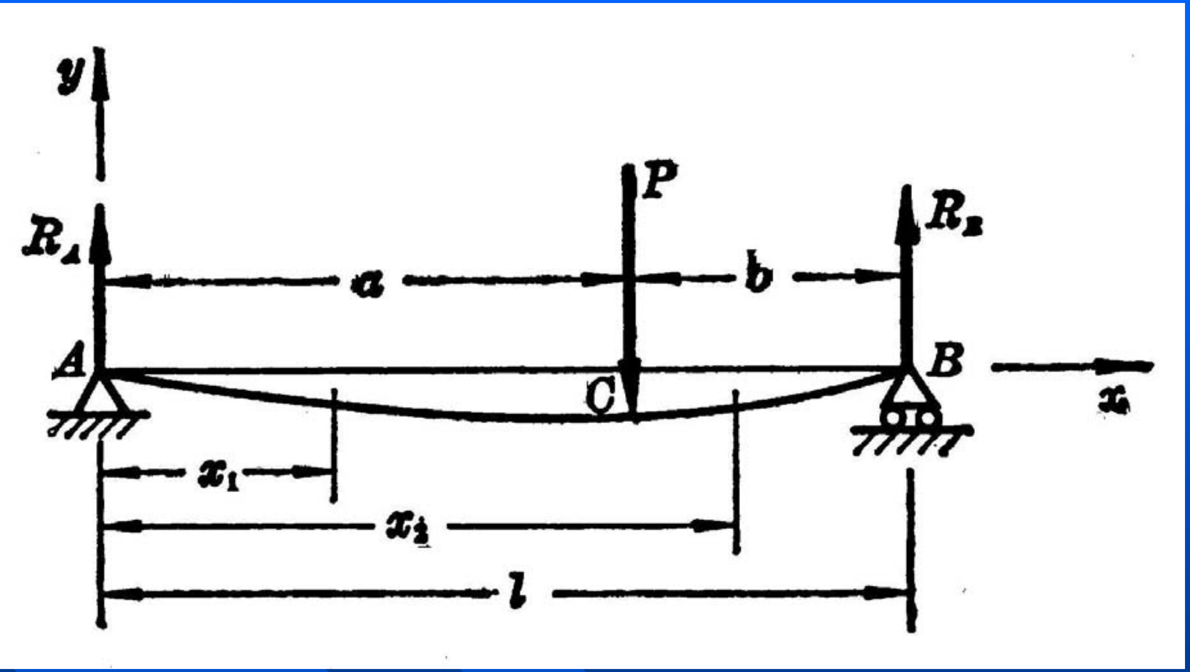
$$EIv_2 = -\frac{Pb}{6l}[(l^2 - b^2 - 3x_2^2)x_2 + \frac{l}{b}(x_2 - a)^3]$$

(4) 求最大转角和最大挠度

(4) 求最大转角和最大挠度

- 最大转角

由图，最大转角可能发生在A点或B点。



$$\theta_A = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6EIl}$$

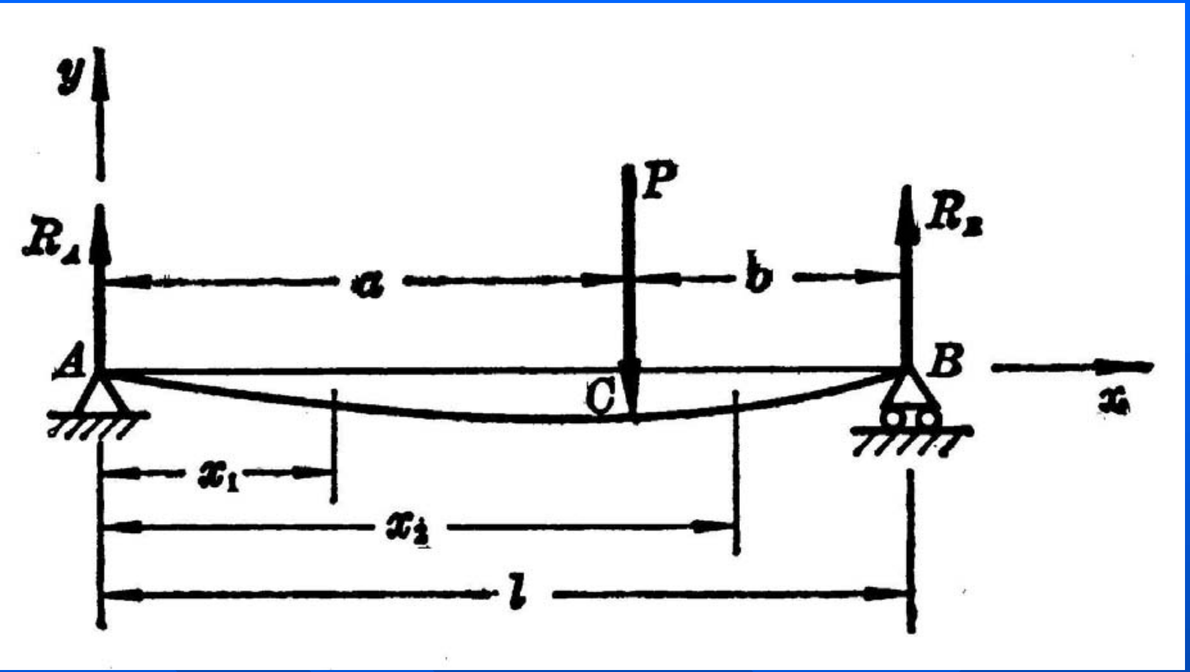
$$= -\frac{Pab(l+b)}{6EIl}$$

$$\theta_B = \frac{Pab(l+a)}{6EIl}$$

- 最大挠度

◆ 最大挠度

经分析，最大挠度发生在AC段。



令： $v_1' = 0$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad f_{\max} = -\frac{Pb}{9\sqrt{3}EIl}\sqrt{(l^2 - b^2)^3}$$

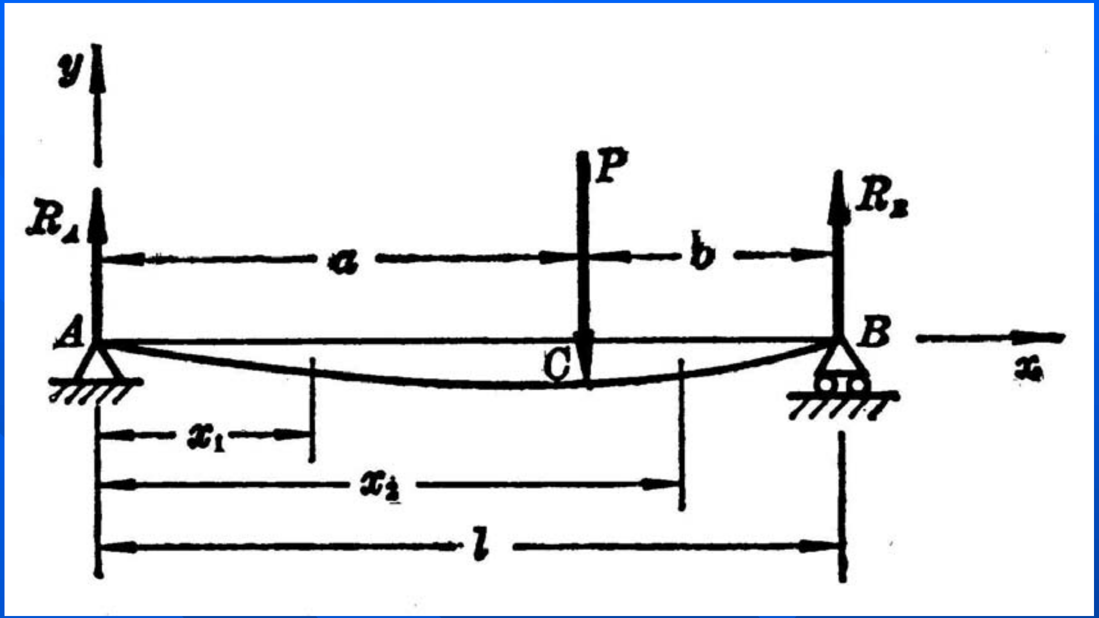
经讨论知，不论P力作用在何处，最大挠度总发生在中点附近(或中点)。所以可近似地以中点的挠度作为最大挠度。

◆ 关于确定积分常数

本例中 (书例6.3)

书上 p. 222:

采取了一些措施



(1) 列弯矩方程

$$AC段：M_1=\frac{Pb}{l}x_1 \quad CB段：M_2=\frac{Pb}{l}x_2-P(x_2-a)$$

措施1 各段的坐标原点为同一点：左端点。

措施2 积分时，保留(x_2-a) 作为自变量。

◆ 关于确定积分常数

措施1　各段的坐标原点为同一点：左端点。

措施2　积分时，保留(x_2-a) 作为自变量。

措施3　有分布载荷时，需将其延长到梁的右端，并在延长部分加上等值反向的分布载荷。

措施4　有集中力偶时，采用 $m(x_i-a_i)^0$ 的形式。

§6.4 用叠加法求弯曲变形

● 叠加法

在第四章中，证明了在小变形的条件下，弯矩与外载荷成线性关系，可用叠加法求弯矩图。

在线弹性小变形的条件下，得到挠曲线近似

微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

这是一个线性的常微分方程。

设：

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x)$$

挠曲线近似微分方程 $$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M(x)}{EI}$$

这是一个线性的常微分方程。

设： $$M(x)=M_1(x)+M_2(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M_1(x)}{EI},\qquad \frac{\mathrm{d}^2 v_2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M_2(x)}{EI}$$

则共同作用时：

$$EI\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}=M(x)=M_1(x)+M_2(x)=EI\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}x^2}+EI\frac{\mathrm{d}^2 v_2}{\mathrm{d}x^2}$$

$$=EI\frac{\mathrm{d}^2(v_1+v_2)}{\mathrm{d}x^2}$$

则共同作用时：

$$EI\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}=M(x)=M_1(x)+M_2(x)=EI\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}x^2}+EI\frac{\mathrm{d}^2 v_2}{\mathrm{d}x^2}$$

$$=EI\frac{\mathrm{d}^2(v_1+v_2)}{\mathrm{d}x^2} \longrightarrow v=v_1+v_2$$

即：共同作用下的挠度等于分别在$M_1(x)$、$M_2(x)$单独作用下的挠度的代数和。

综合以上讨论得到：

在线弹性小变形的条件下，外载荷与挠度(力与位移)成线性关系，可用叠加法计算梁的挠度。

- 叠加法的基础

熟记简单载荷作用下的挠度和转角。

见教材 p. 224 表6.1 。

要求记住：1、2、4、6、8、10。

- 叠加法的两种类型

(1) 载荷叠加法

将载荷分解为几个简单载荷，分别求解后，进行叠加；

(2) 变形叠加法

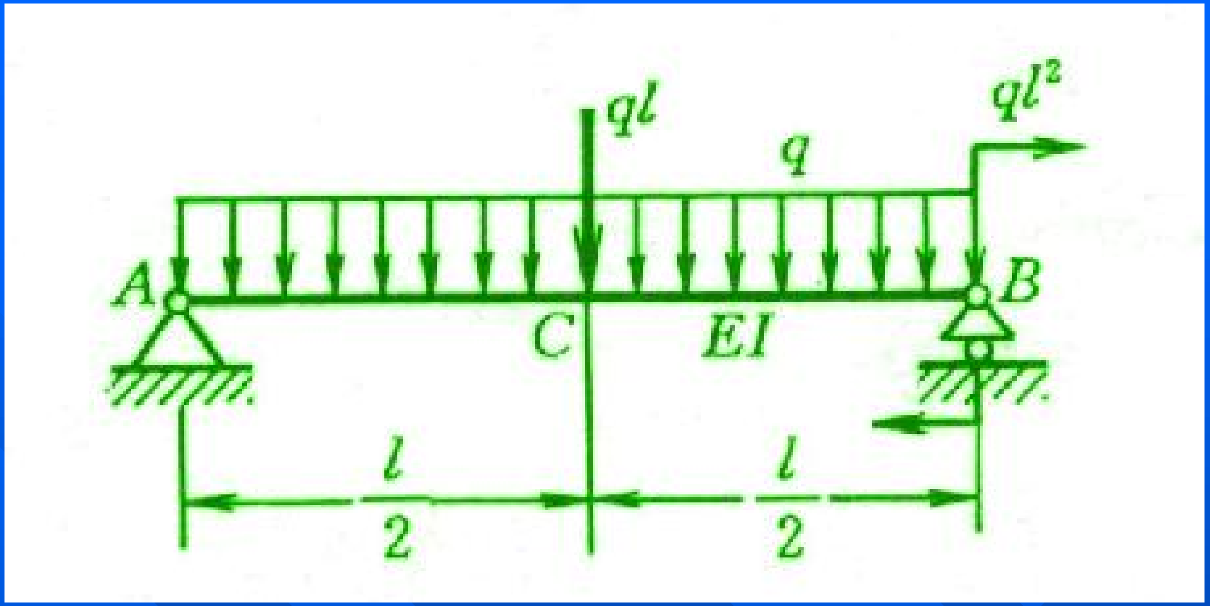
在内力不变的前提下，将梁分解(或刚化)为几段，求出各段的变形，然后进行叠加。

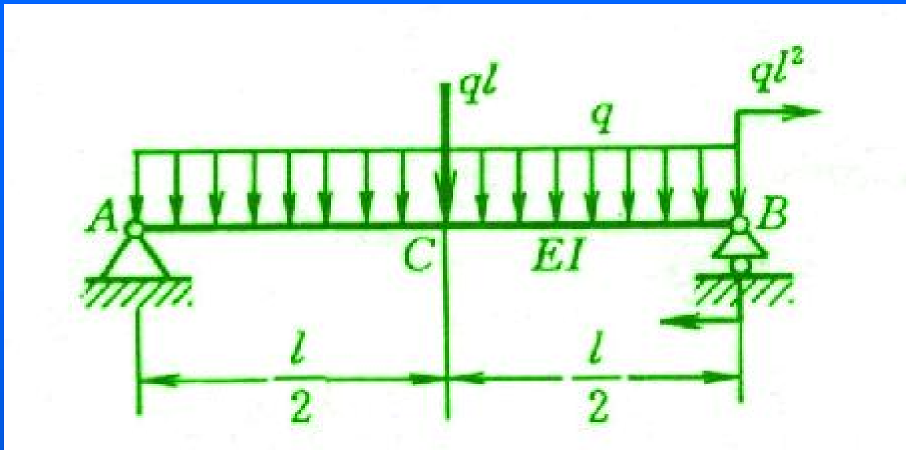
例 1

已知： q，l，EI = 常数。

求： v_C，θ_B。

解：分解为三个简单载荷。



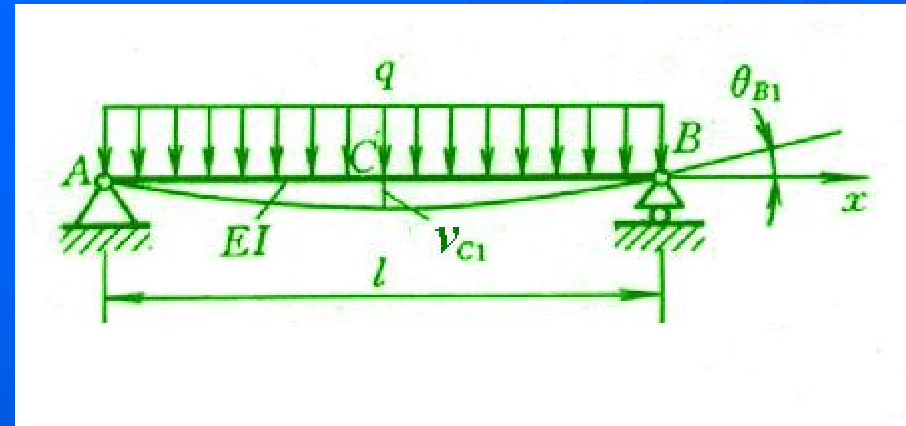


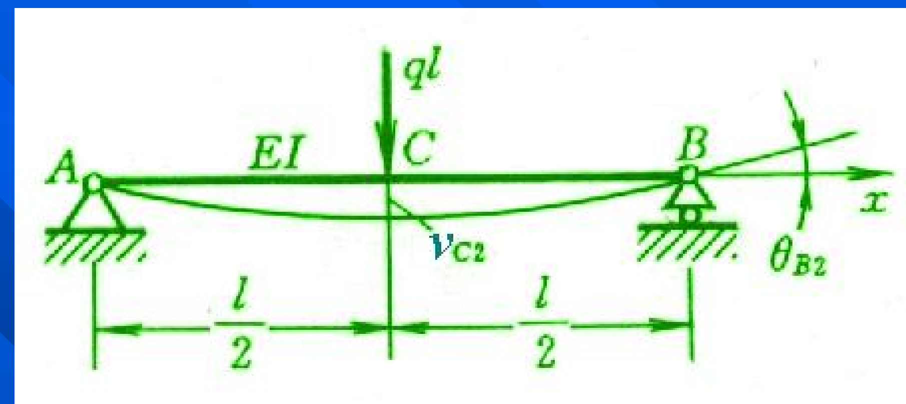
- 由p. 224 表6.1 中的10

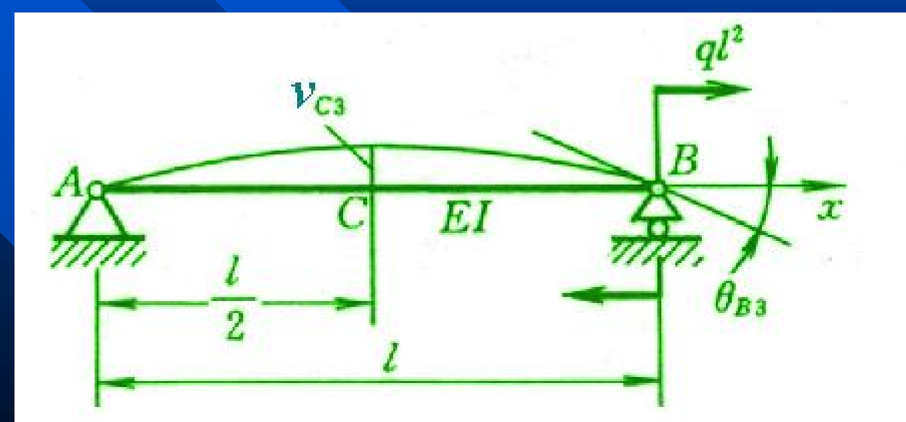
$$v_{C1}=-\frac{5ql^4}{384EI}$$

$$\theta_{B1}=\frac{ql^3}{24EI}$$

- 由表6.1 中的8







- 由p. 224 表6.1 中的10

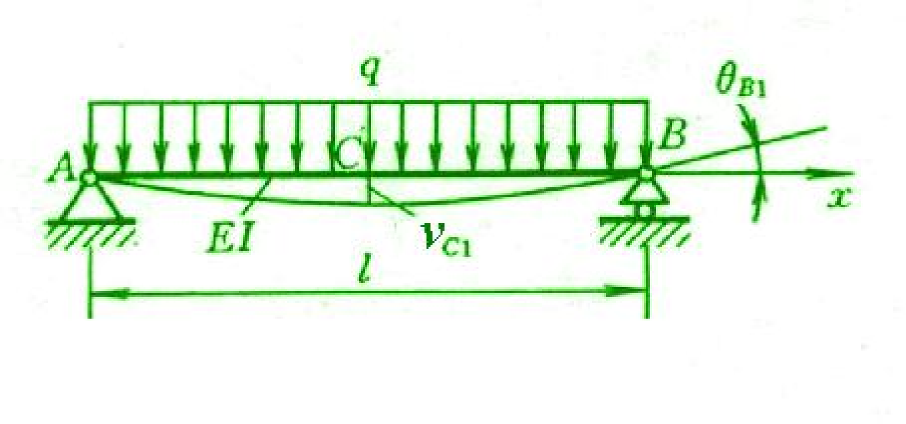
$$v_{C1} = -\frac{5ql^4}{384EI}$$

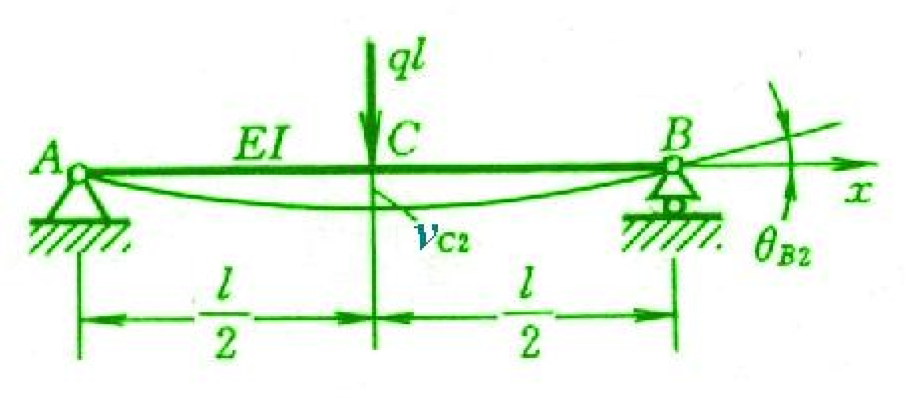
$$\theta_{B1} = \frac{ql^3}{24EI}$$

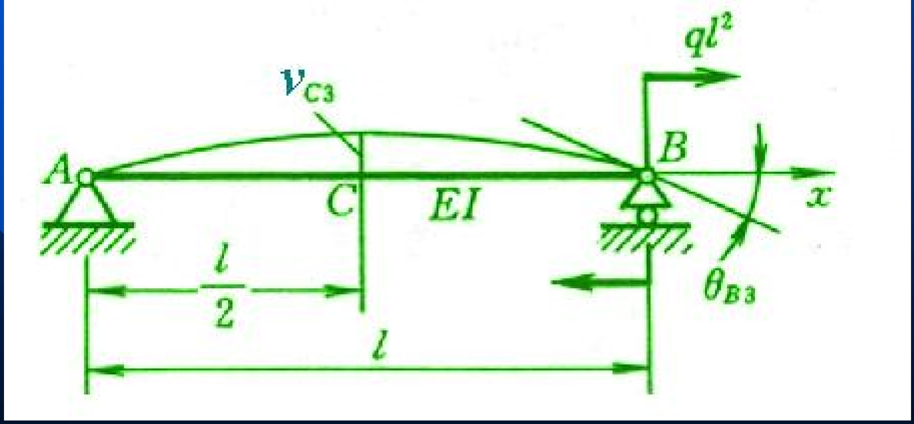
- 由表6.1 中的8

$$v_{C2} = -\frac{Pl^3}{48EI} = -\frac{ql^4}{48EI}$$

$$\theta_{B2} = \frac{Pl^2}{16EI} = \frac{ql^3}{16EI}$$







◆ 由表6.1 中的8

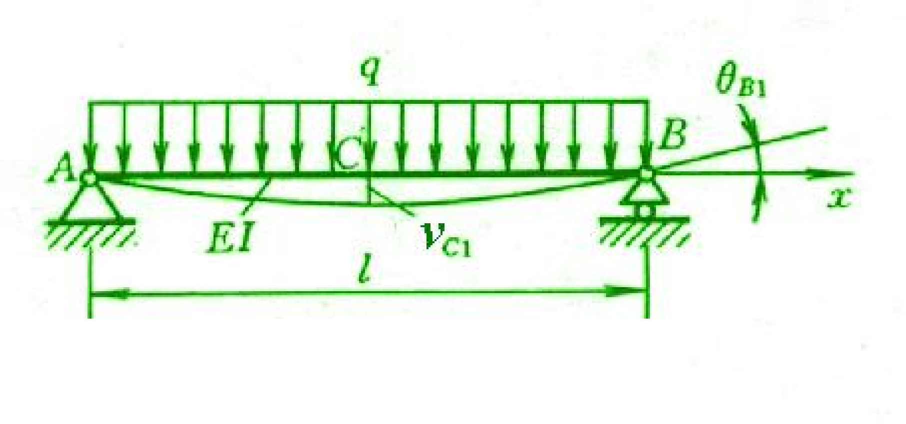
$$v_{C2}=-\frac{Pl^3}{48EI}=-\frac{ql^4}{48EI}$$

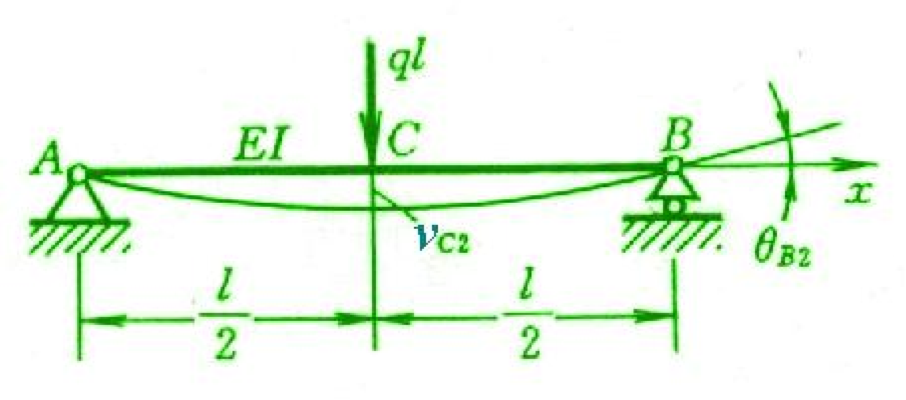
$$\theta_{B2}=\frac{Pl^2}{16EI}=\frac{ql^3}{16EI}$$

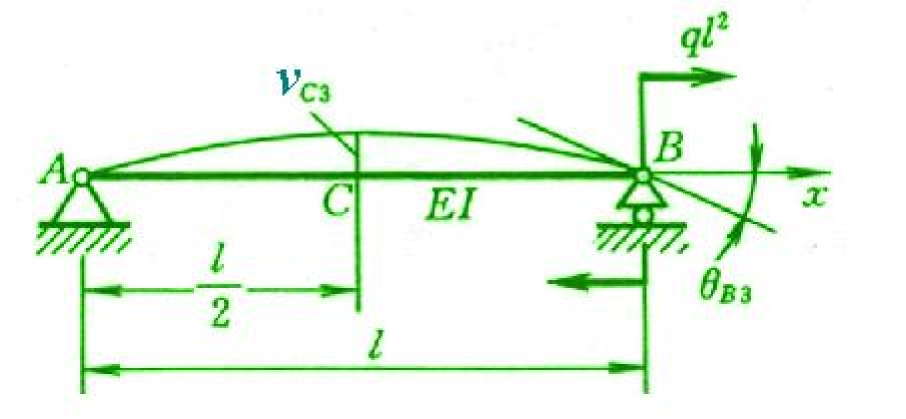
◆ 由表6.1 中的6

$$v_{C3}=-\frac{ml^2}{16EI}=\frac{ql^4}{16EI}$$

$$\theta_{B3}=\frac{ml}{3EI}=-\frac{ql^3}{3EI}$$



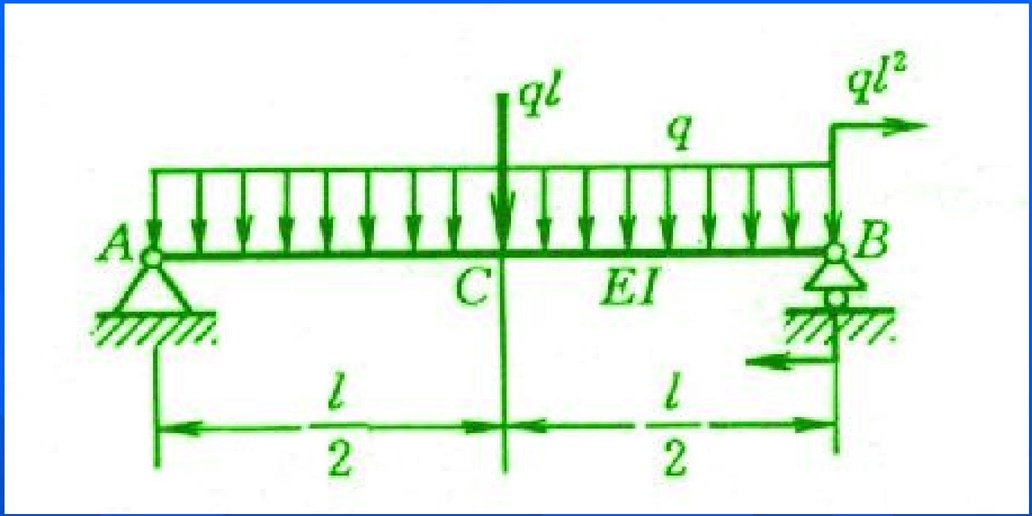




- 由表6.1 中的6

$$v_{C3} = -\frac{ml^2}{16EI} = \frac{ql^4}{16EI}$$

$$\theta_{B3} = \frac{ml}{3EI} = -\frac{ql^3}{3EI}$$



- 叠加

$$v_C = v_{C1} + v_{C2} + v_{C3} = \frac{11ql^4}{384EI}$$

$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} + \theta_{B3} = -\frac{11ql^3}{48EI}$$

例 2

已知： q , l , EI = 常数。

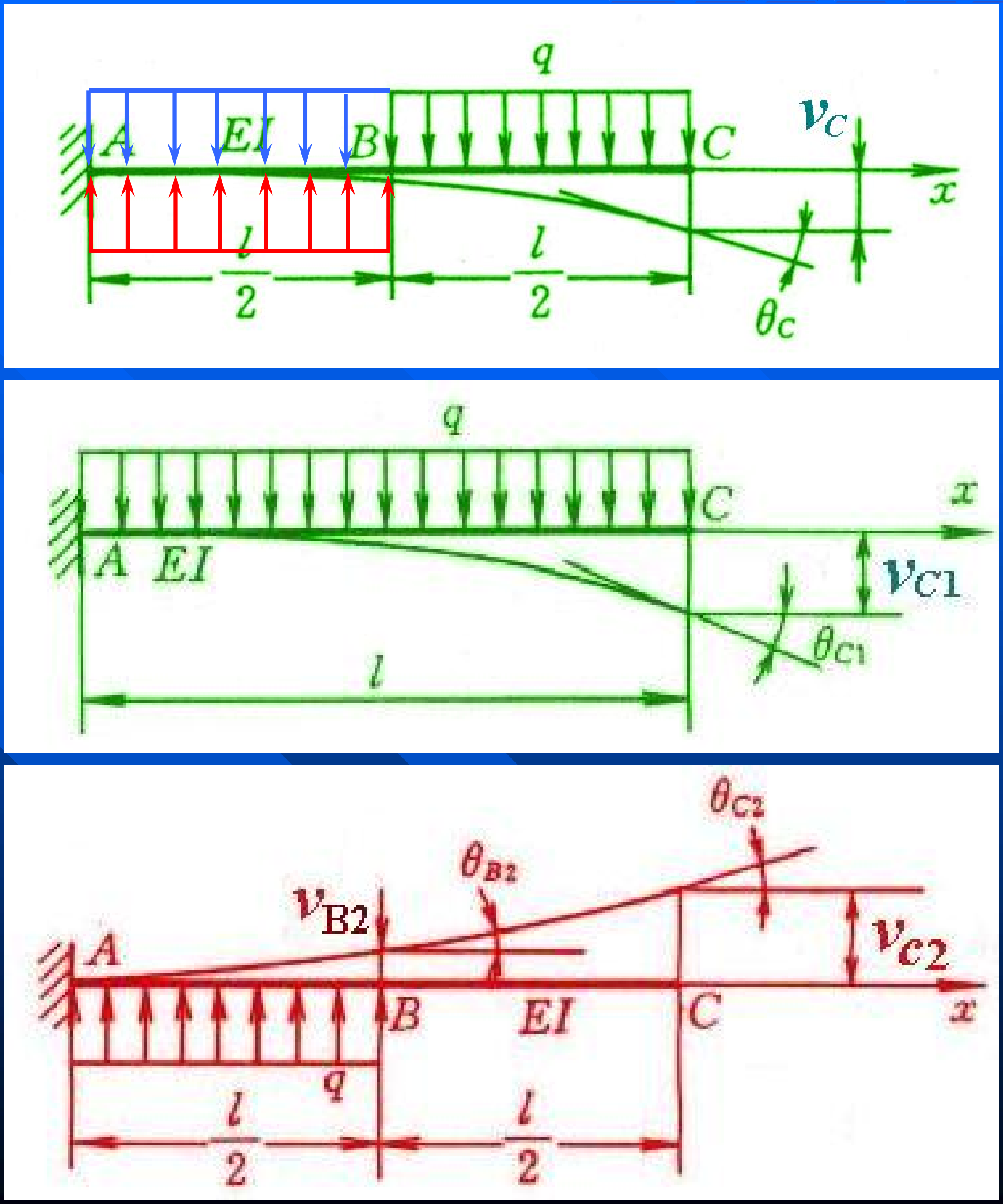
求： v_C , θ_C。

解：表中没有对应的情况。

方法：凑成表中相应的情况。

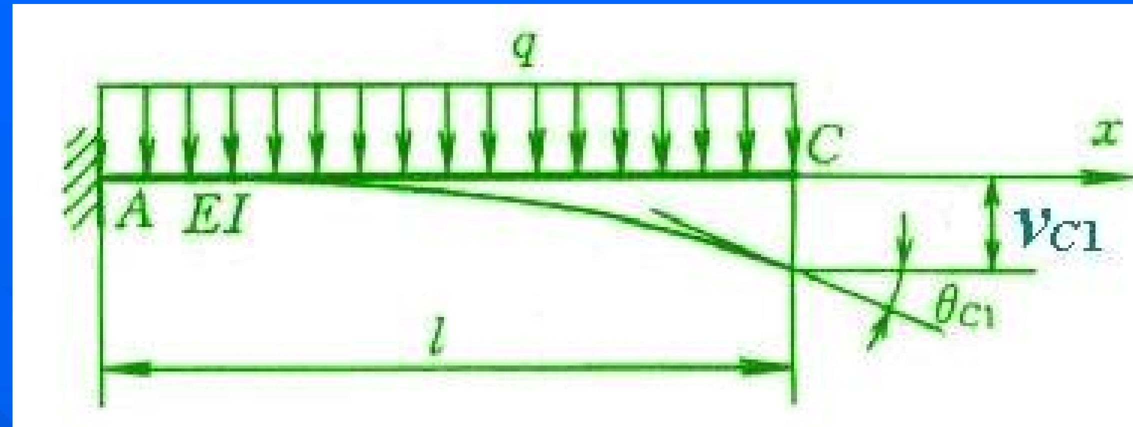
再分为两种载荷。

- 由p. 188 表6.1中的4



再分为两种载荷。

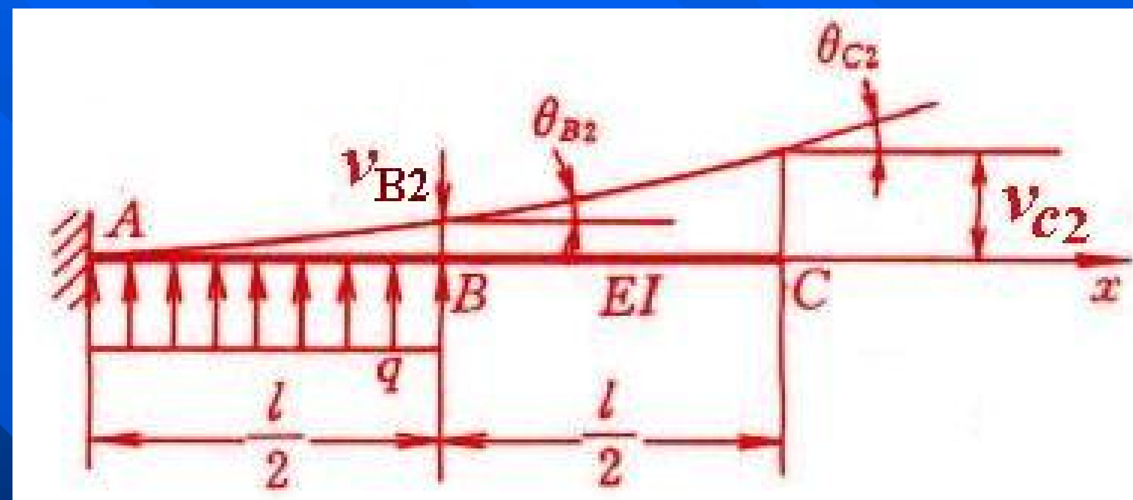
- 由p. 188 表6.1中的4



$$v_{C1} = -\frac{ql^4}{8EI}$$

$$\theta_{C1} = -\frac{ql^3}{6EI}$$

- 由p. 224 表6.1中的4

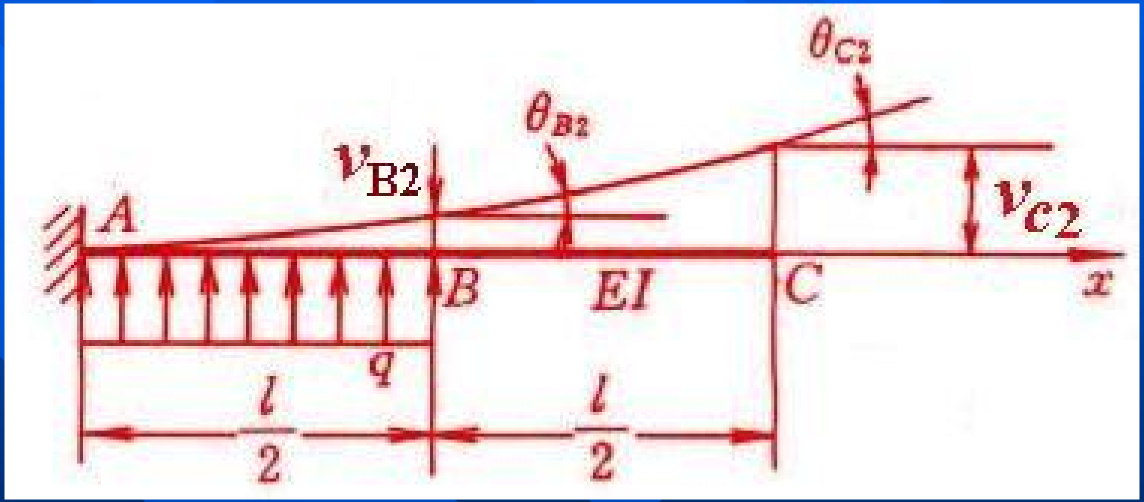


$$v_{B2} = \frac{q(l/2)^4}{8EI} = \frac{ql^4}{128EI}, \qquad \theta_{B2} = \frac{q(l/2)^3}{6EI} = \frac{ql^3}{48EI}$$

- 由p. 188 表6.1 中的4

$$v_{B2}=\frac{q(l/2)^4}{8EI}=\frac{ql^4}{128EI},\quad \theta_{B2}=\frac{q(l/2)^3}{6EI}=\frac{ql^3}{48EI}$$

- 注意，变形后 BC为直线。



$$v_{C2}=v_{C21}+v_{C22}$$

$$=v_{B2}+\theta_{B2}\cdot l/2$$

$$=\frac{ql^4}{128EI}+\frac{ql^3}{48EI}\cdot\frac{l}{2}=\frac{7ql^4}{384EI}$$

$$\theta_{C2}=\theta_{B2}=\frac{ql^3}{48EI}$$

$$v_{C2}=v_{C21}+v_{C22}=v_{B2}+\theta_{B2}\cdot l/2$$

$$=\frac{ql^4}{128EI}+\frac{ql^3}{48EI}\cdot\frac{l}{2}=\frac{7ql^4}{384EI}$$

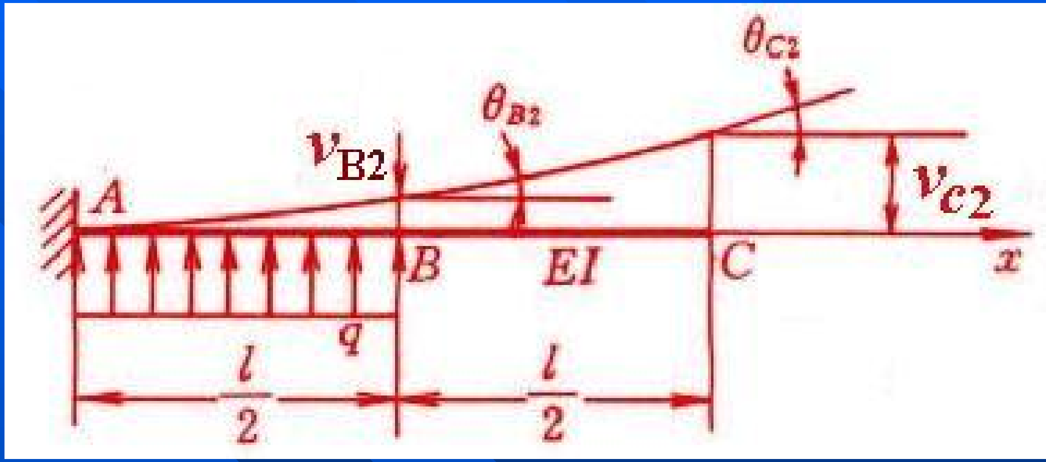
$$\theta_{C2}=\theta_{B2}=\frac{ql^3}{48EI}$$

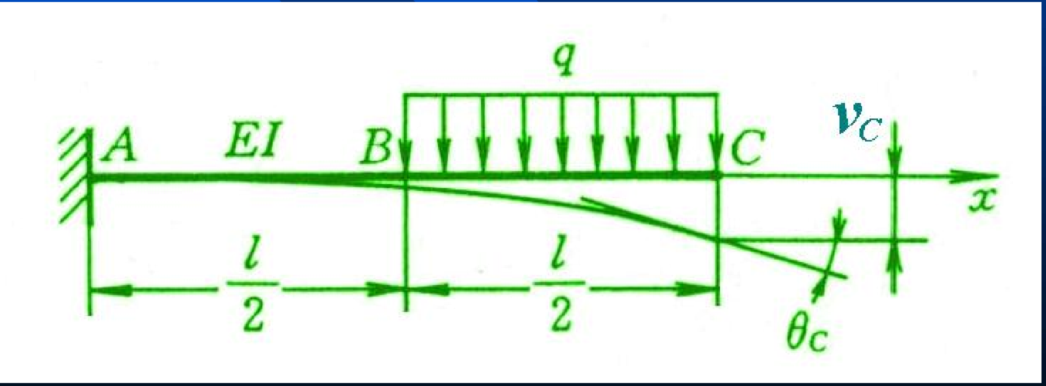
所以

$$v_C=v_{C1}+v_{C2}$$

$$=-\frac{41ql^4}{384EI}$$

$$\theta_C=\theta_{C1}+\theta_{C2}=-\frac{7ql^3}{48EI}$$





例 3 (书例6.5)

已知：$P_1, P_2, a, l, EI=$ 常数。

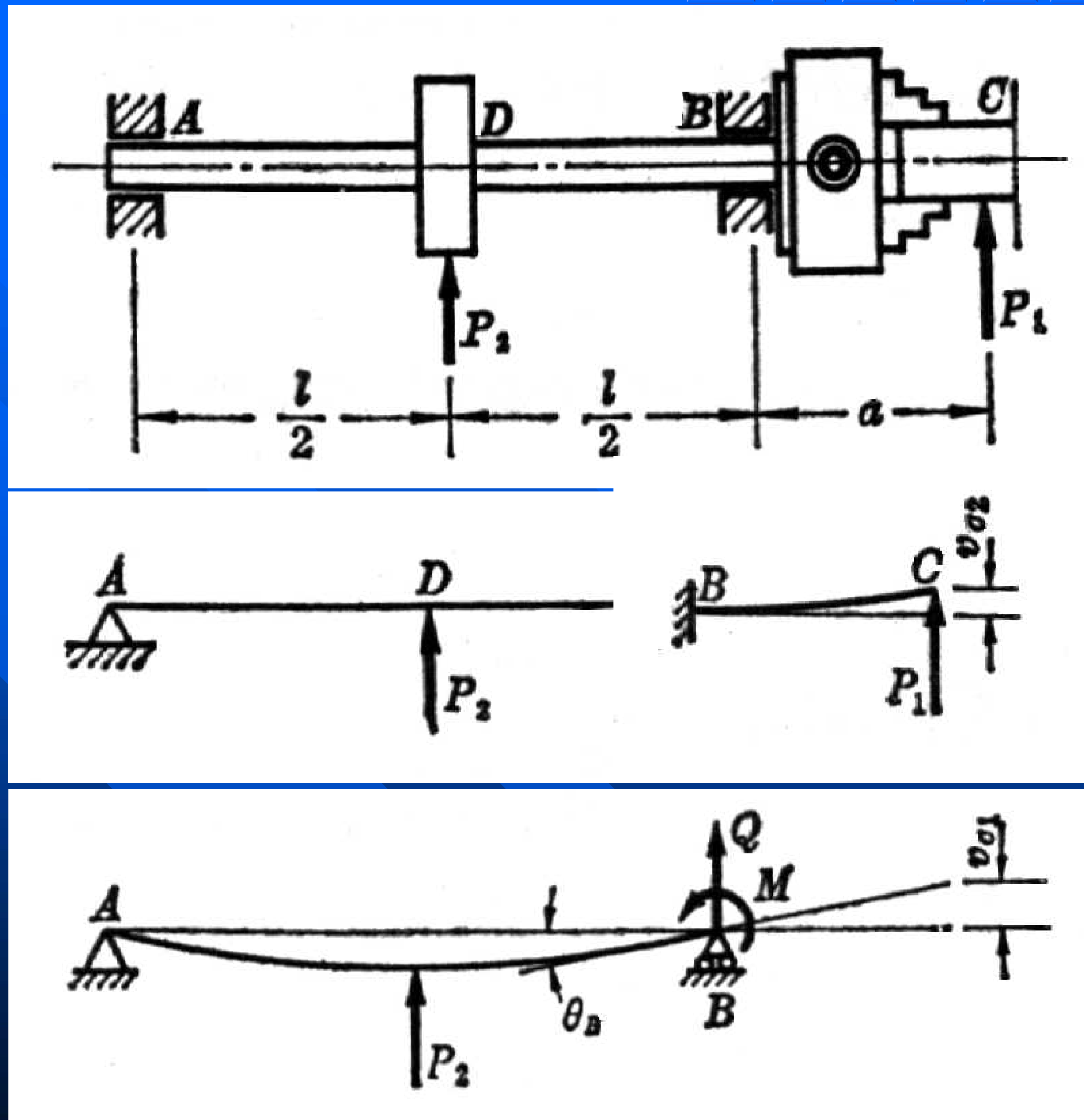
求：v_C, θ_B。

解：简化为外伸梁如图。

将AC梁分为两个部分。

简支梁在B处的内力：$Q=P_1$

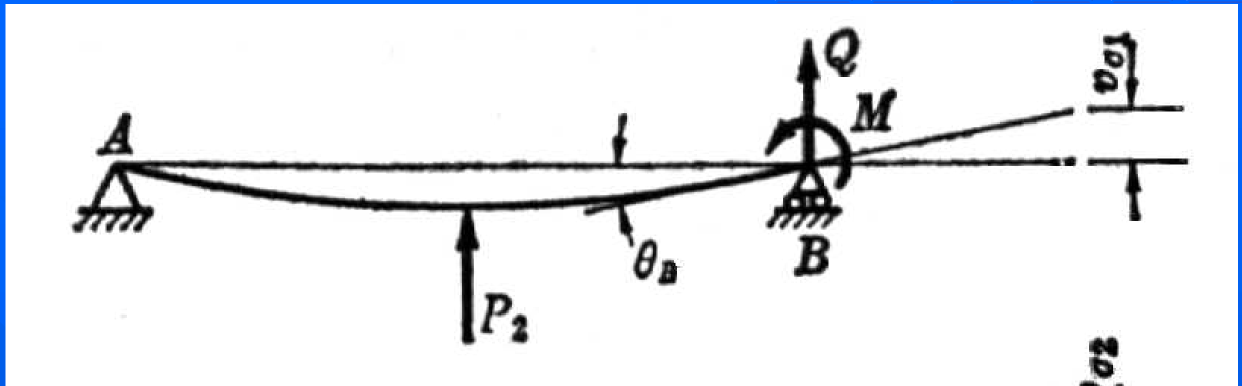
$$M=P_1a$$

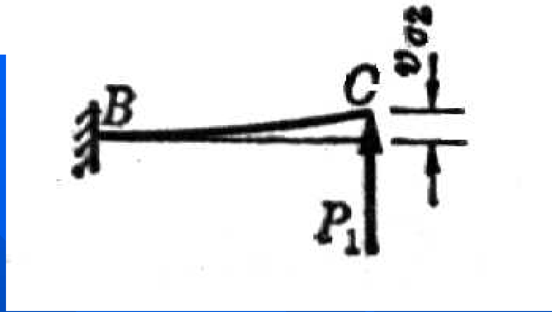


将AC梁分为两个部分。

简支梁在B处的内力：$Q = P_1$

$$M = P_1 a$$





- 求 θ_B　　Q不引起变形。

◆ 由p. 188 表6.1中的6

$$(\theta_B)_M = \frac{Ml}{3EI} = \frac{P_1 a l^3}{3EI}$$

◆ 由表6.1中的8

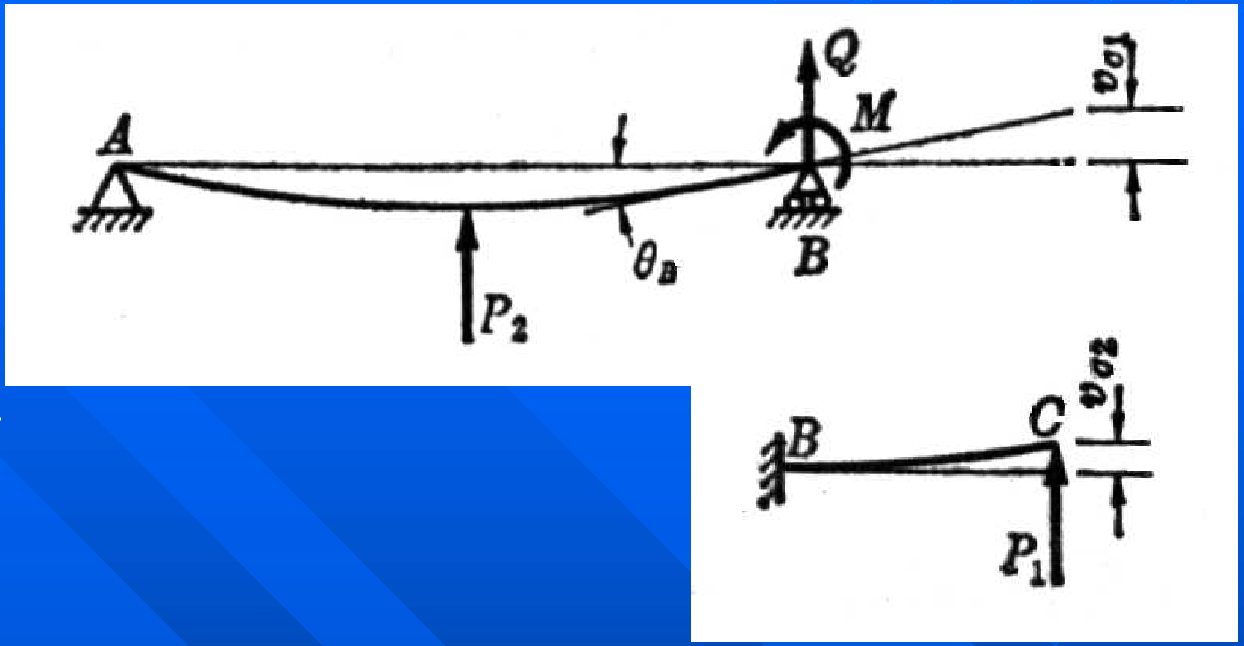
$$(\theta_B)_{P_2} = -\frac{P_2 l^2}{16EI}$$

所以 $$\theta_B = (\theta_B)_M + (\theta_B)_{P_2} = \frac{P_1 a l^3}{3EI} - \frac{P_2 l^2}{16EI}$$

所以

$$\theta_B=(\theta_B)_M+(\theta_B)_{P_2}$$

$$=\frac{P_1al^3}{3EI}-\frac{P_2l^2}{16EI}$$



- 求 v_C

C点的位移由两部分组成：

由B截面转角引起的位移和由悬臂梁BC的变形引起的位移。

$$v_{C1}=a\theta_B=\frac{P_1a^2l^3}{3EI}-\frac{P_2al^2}{16EI}$$

- 由表6.1中的2 $\quad v_{C2}=\dfrac{P_1a^3}{3EI}$

● 求 v_C

C点的位移由两部分组成：

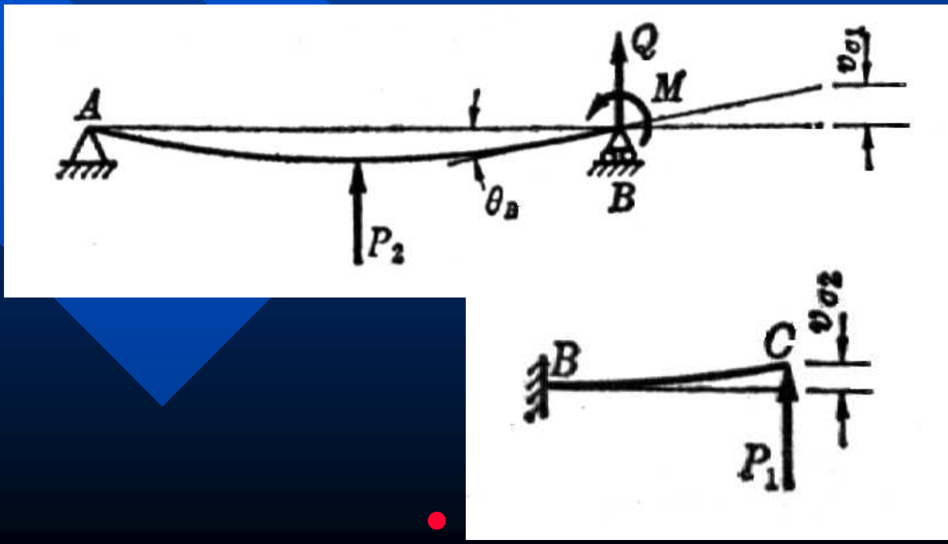
由B截面转角引起的位移和由悬臂梁BC的变形引起的位移。

$$v_{C1}=a\theta_B=\frac{P_1a^2l^3}{3EI}-\frac{P_2al^2}{16EI}$$

◆ 由表6.1中的2 $$v_{C2}=\frac{P_1a^3}{3EI}$$

$$v_C=v_{C1}+v_{C2}$$

$$=\frac{P_1a^2}{3EI}(a+l)-\frac{P_2al^2}{16EI}$$



例 4

已知：P, l, EI, EA。

求：v_E。

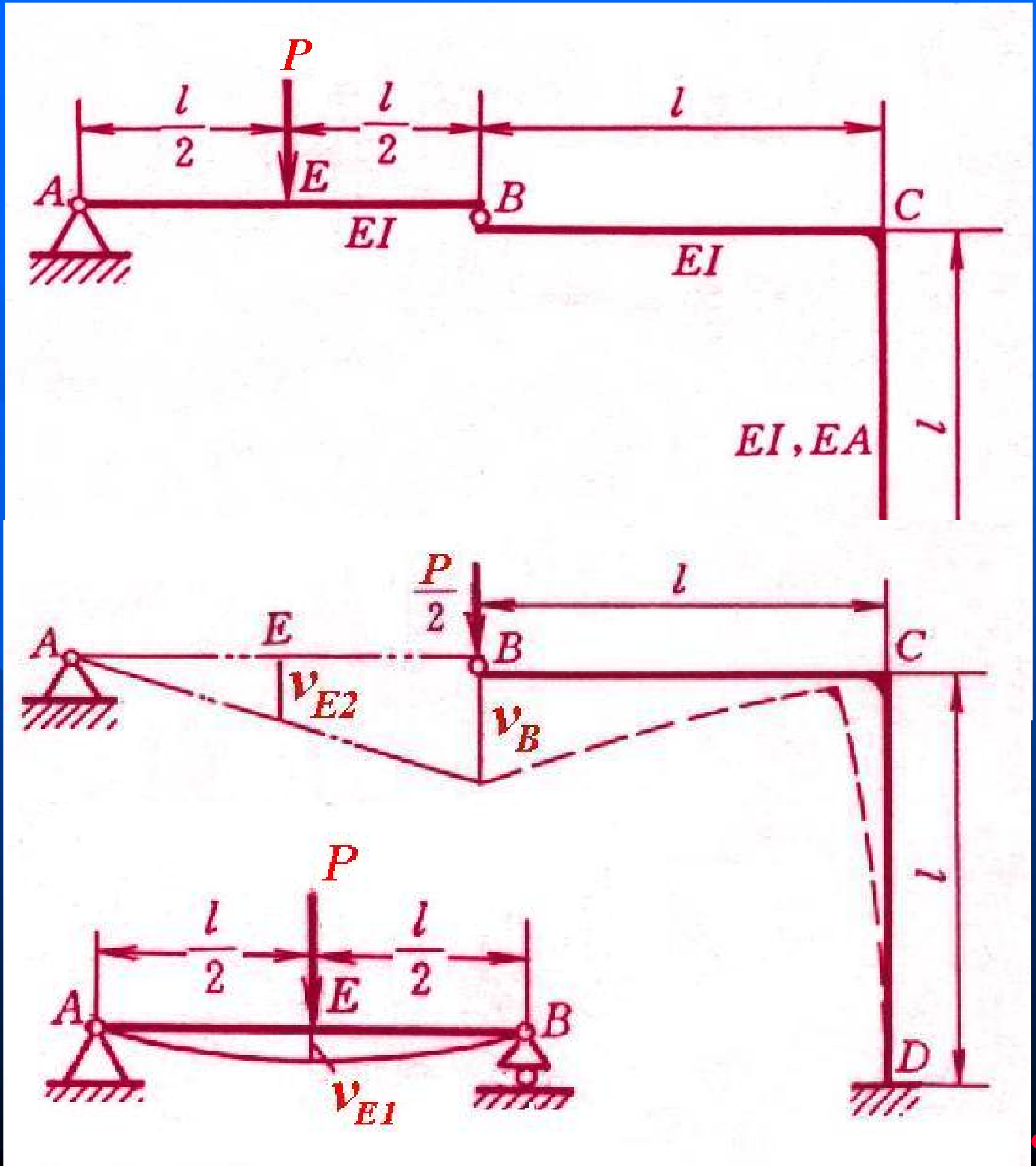
解：● 思路

(1) 将刚架看成是刚体

则AB相当于简支梁。 ⟶ v_{E1}

(2) 刚架变形

⟶ $v_{E2} = v_B / 2$



(1) 将刚架看成是刚体

则AB相当于简支梁。 → v_{E1}

(2) 刚架变形

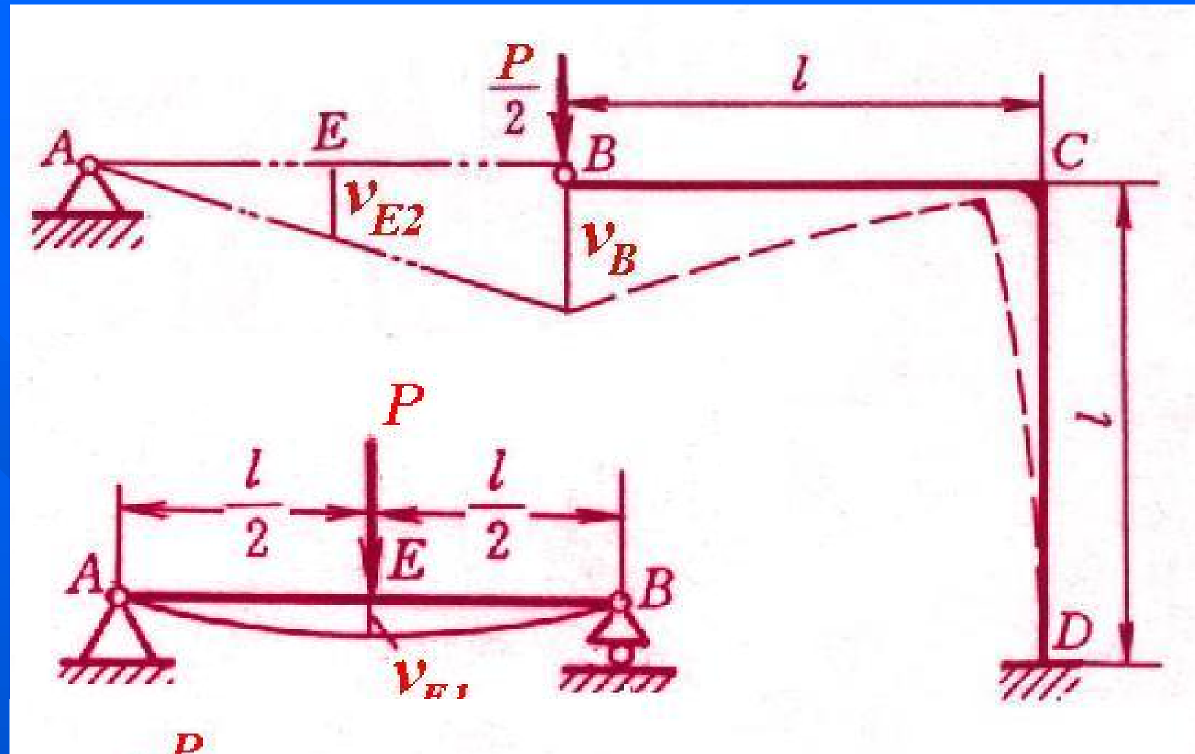
→ $v_{E2} = v_B / 2$

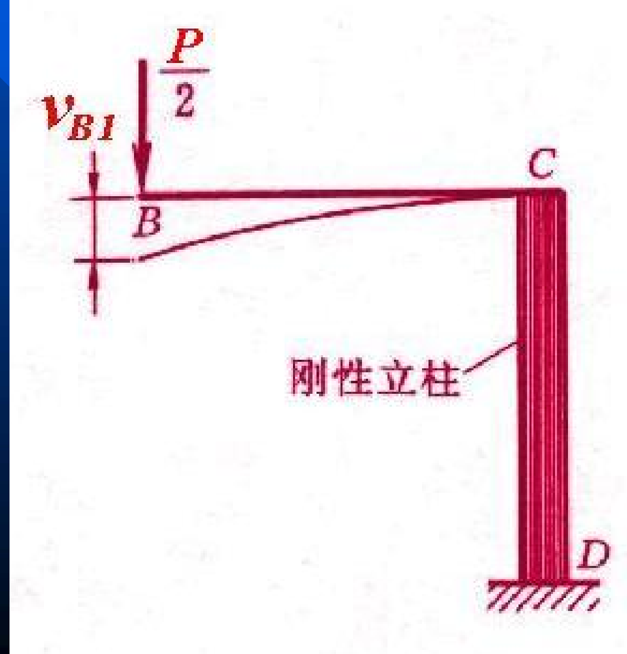
- 求 v_B

(3) CD看成刚体

→ v_{B1}

(4) BC看成刚体

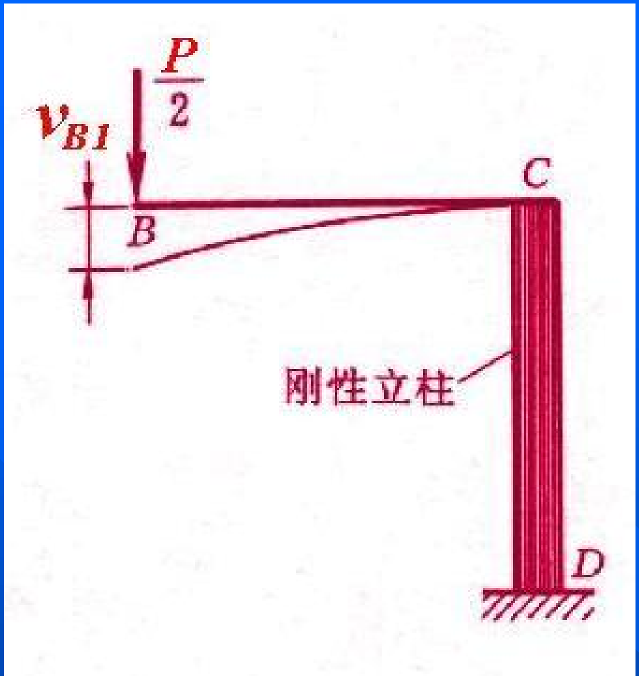


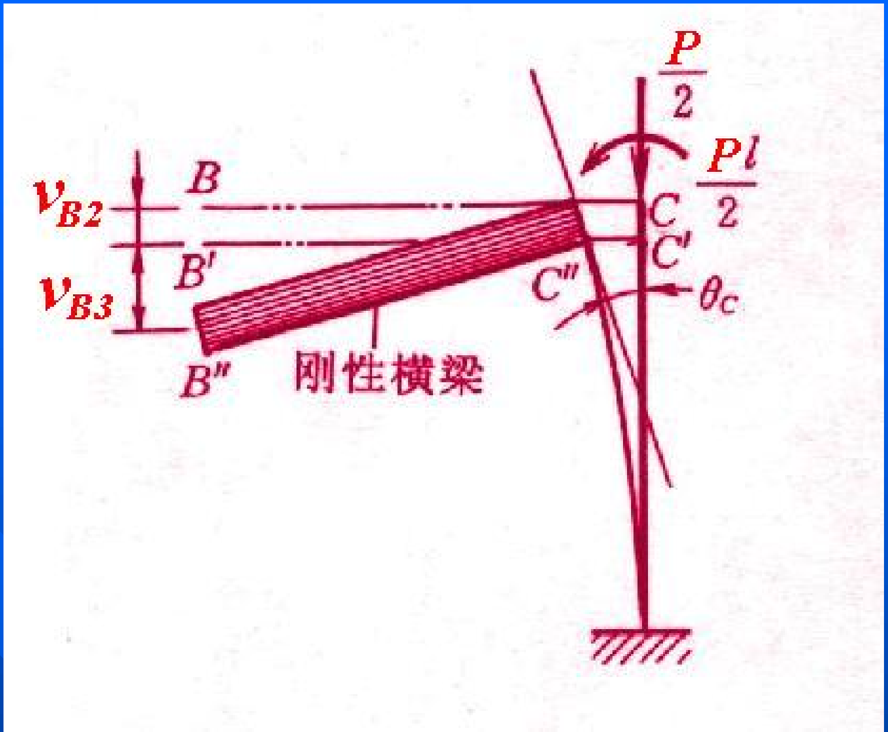


- 求 v_B

(3) CD看成刚体 → v_{B1}

(4) BC看成刚体 → v_{B2}， v_{B3}





- 具体计算

◆ 对BC，由表6.1中的2

$$v_{B1}=\frac{P/2\cdot l^3}{3EI}$$

◆ CD的压缩变形

$$v_{B2}=\frac{P/2\cdot l}{EA}$$

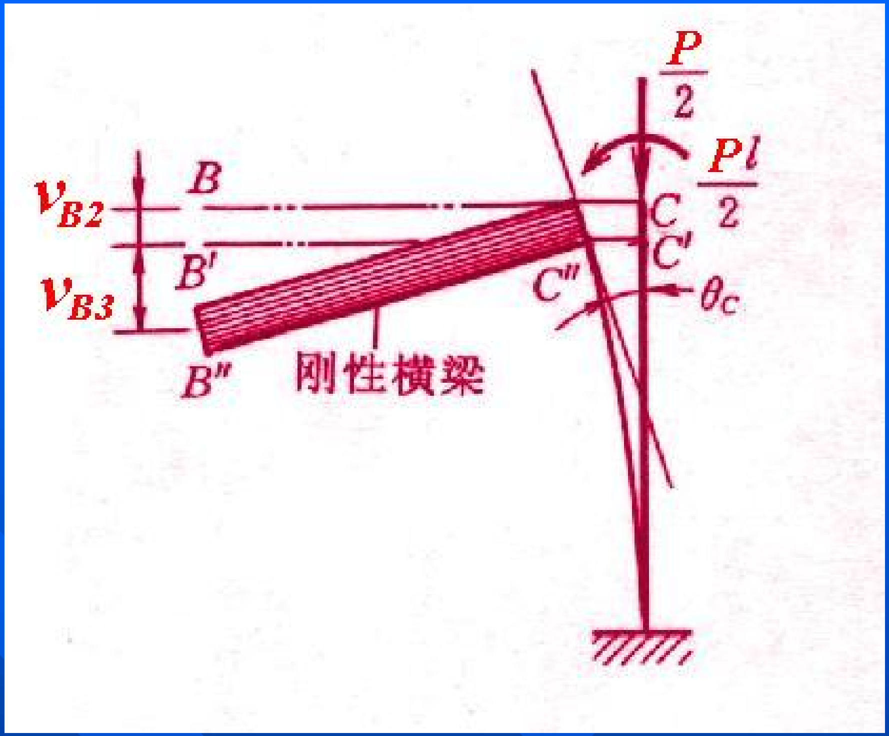
- 具体计算

- 对BC，由表6.1中的2

$$v_{B1}=\frac{P/2\cdot l^3}{3EI}$$

- CD的压缩变形

$$v_{B2}=\frac{P/2\cdot l}{EA}$$



- CD的弯曲变形，由表6.1中的1

$$\theta_C=\frac{P/2\cdot l^2}{EI}$$

所以，$v_{B3}=l\cdot\theta_C=\dfrac{P/2\cdot l^3}{EI}$

$$\Longrightarrow\quad v_B=v_{B1}+v_{B2}+v_{B3}=\frac{2Pl^3}{3EI}+\frac{Pl}{2EA}$$

- CD的弯曲变形，由表6.1中的1 $\theta_C = \dfrac{P/2 \cdot l^2}{EI}$

所以， $v_{B3} = l \cdot \theta_C = \dfrac{P/2 \cdot l^3}{EI}$

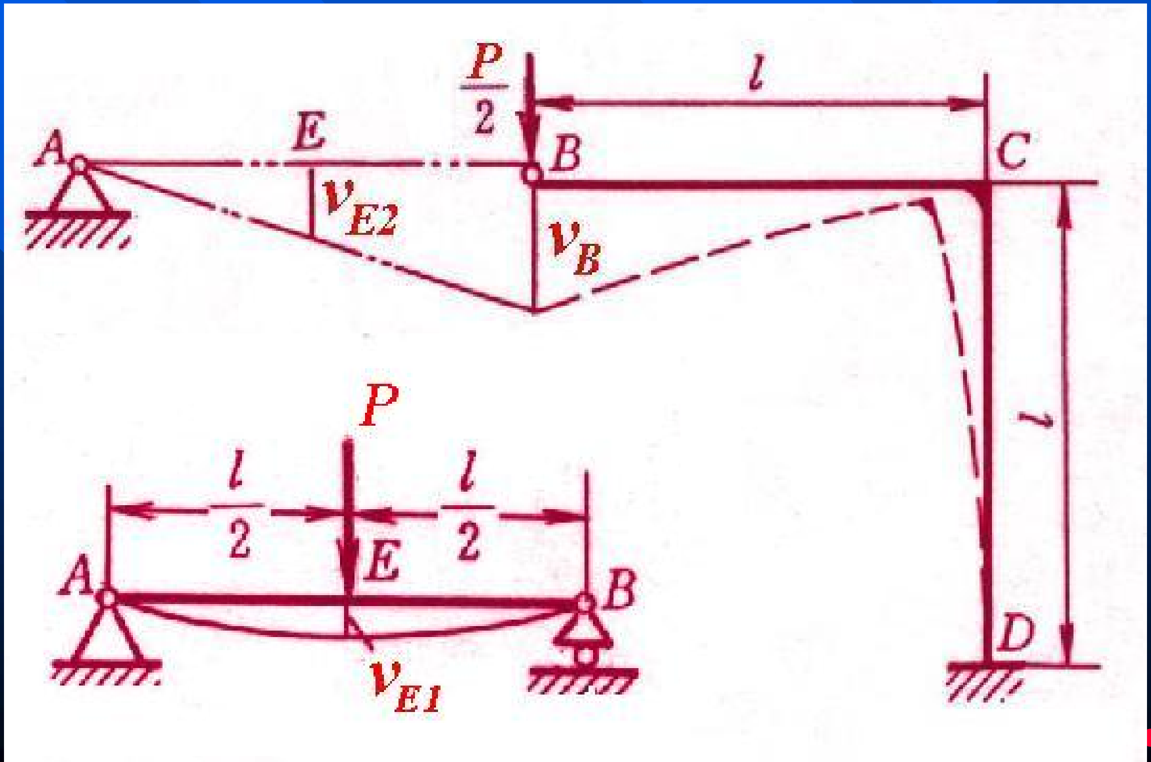
$$\longrightarrow \quad v_B = v_{B1} + v_{B2} + v_{B3} = \frac{2Pl^3}{3EI} + \frac{Pl}{2EA}$$

- 对简支梁AB,

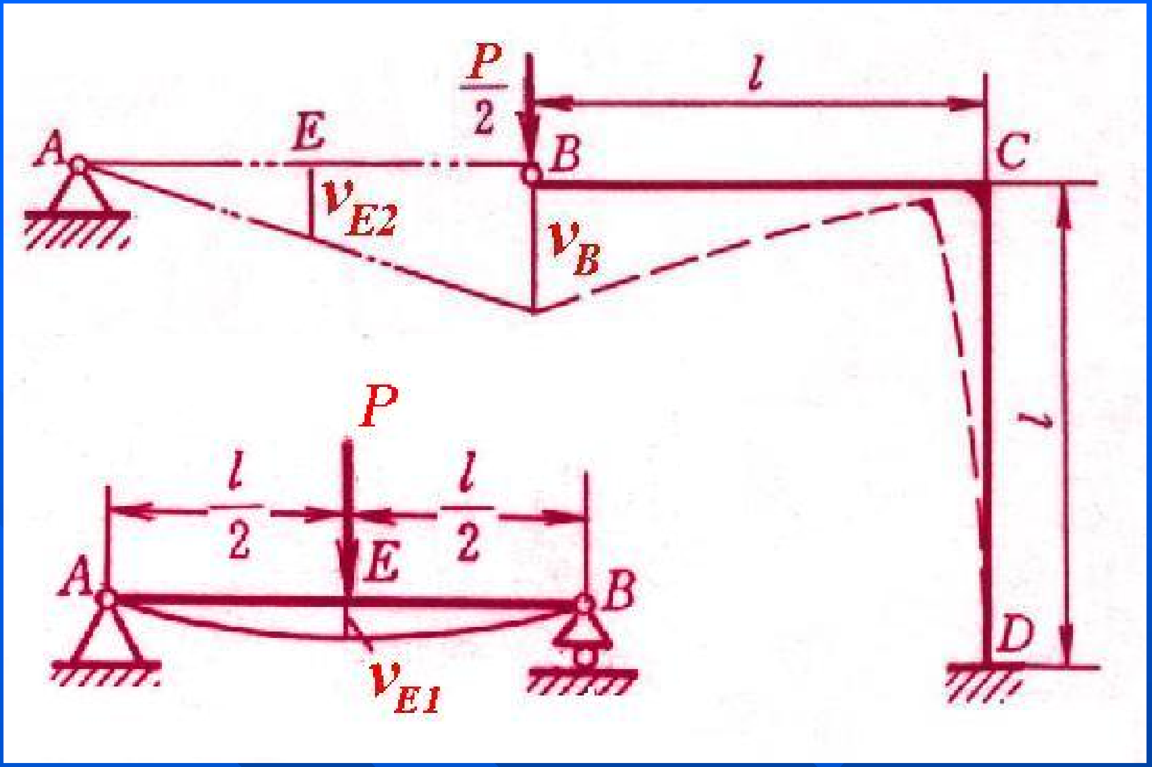
由表6.1中的8

$$v_{E1} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

又： $v_{E2} = \dfrac{1}{2} v_B$



$$v_B = \frac{2Pl^3}{3EI} + \frac{Pl}{2EA}$$



- 对简支梁AB,由表6.1中的8

$$v_{E1} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

又: $v_{E2} = \frac{1}{2} v_B$

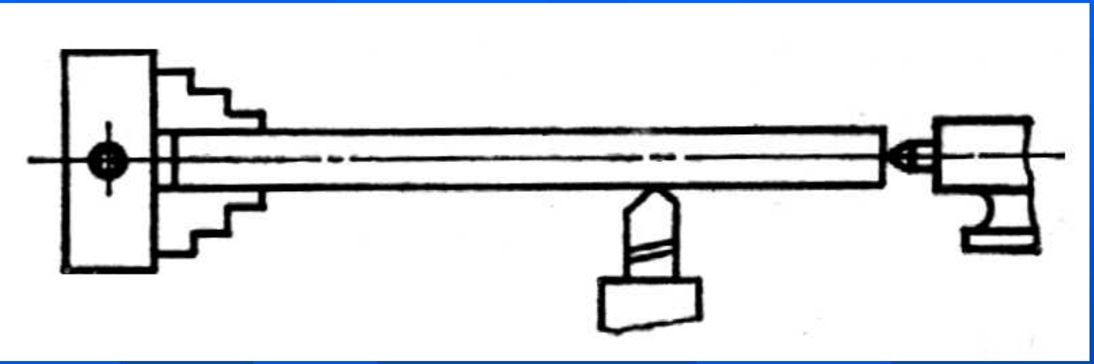
$$\Rightarrow \quad v_E = v_{E1} + v_{E2} = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl}{4EA}$$

§6.5 简单静不定梁

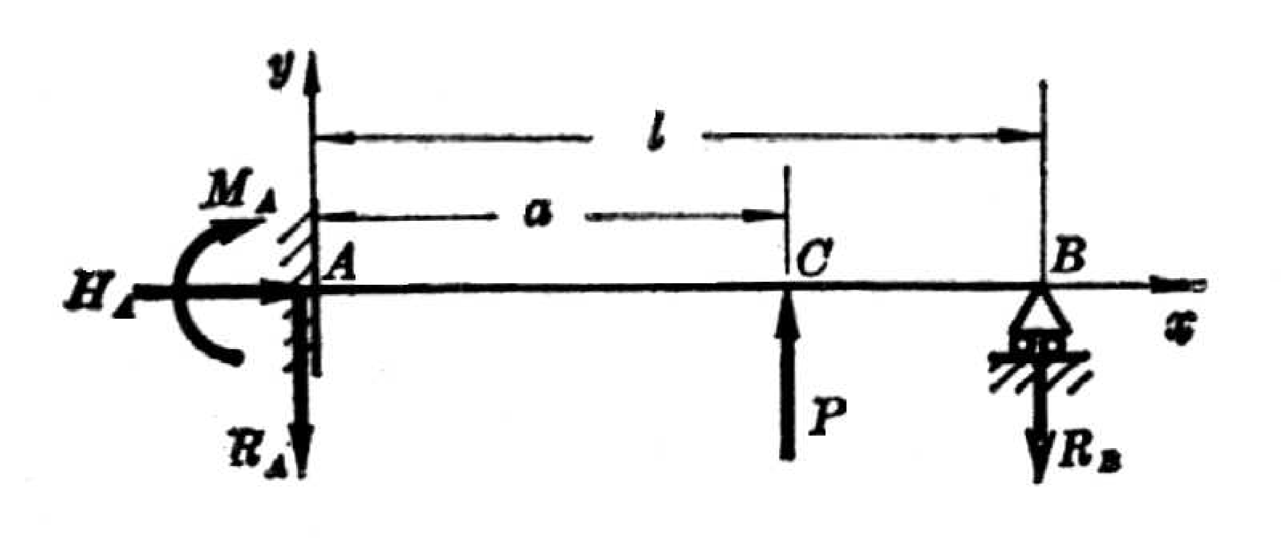
本节讨论简单静不定梁的求解。

- 例子

车床上被加工的工件。



- 计算简图如图是一次静不定问题。



- 基本概念
- 静定基

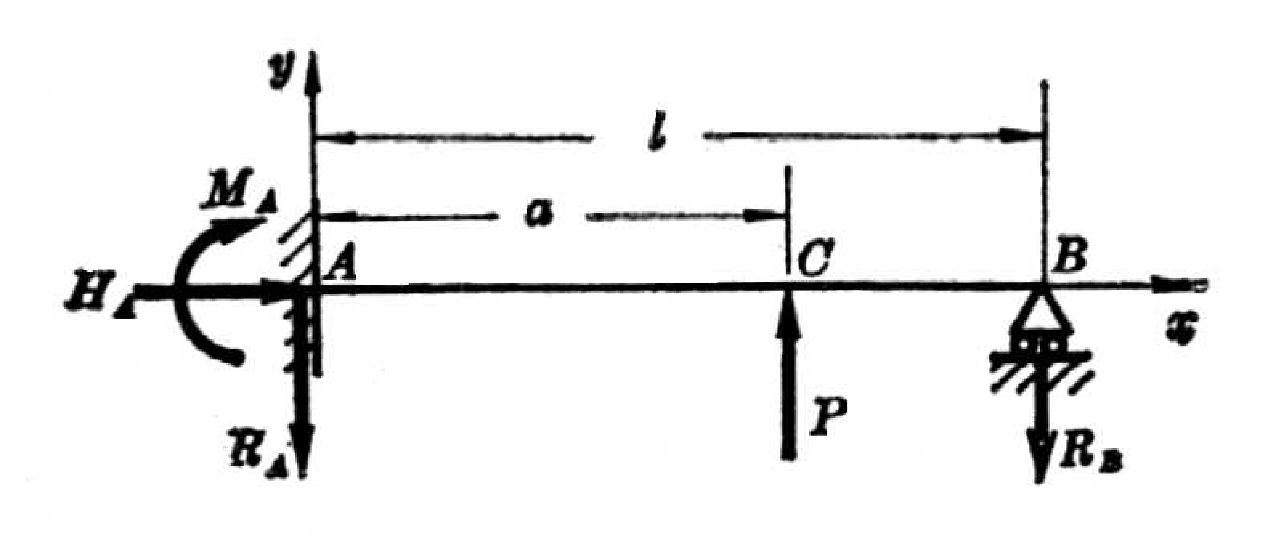
- 基本概念

◆ 静定基　　将静不定系统中的多余约束解除后，得到的“静定基本系统”。

◆ 相当系统　在静定基上加上外载荷以及多余约束力，便得到受力和变形与静不定系统完全相同的“相当系统”。

- 本例中

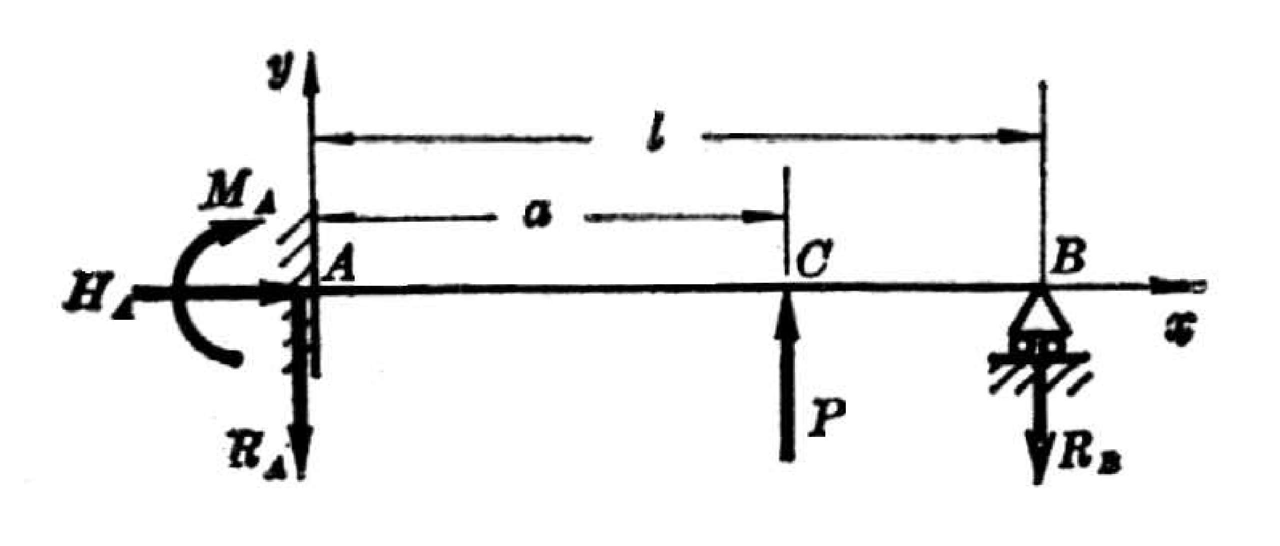
◆ 解除B处可动支座约束，得到静定基。

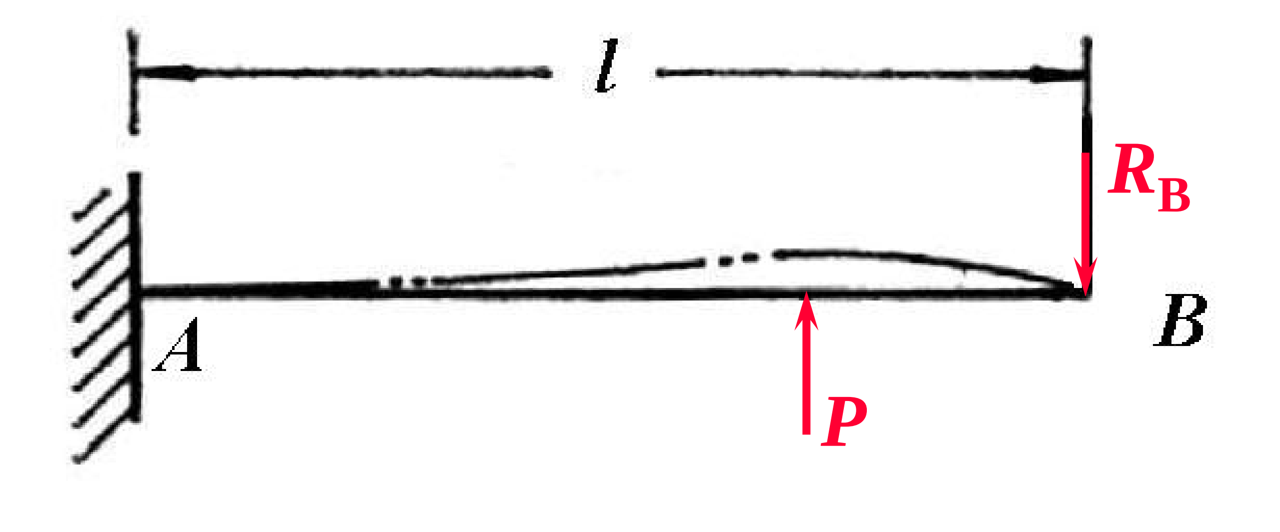


◆ 解除*B*处可动支座约束，得到静定基。

◆ 在静定基上加上*P*和R_B，得到相当系统。

◆ 求*B*点挠度用叠加法





◆ 在静定基上加上P和R_B, 得到相当系统。

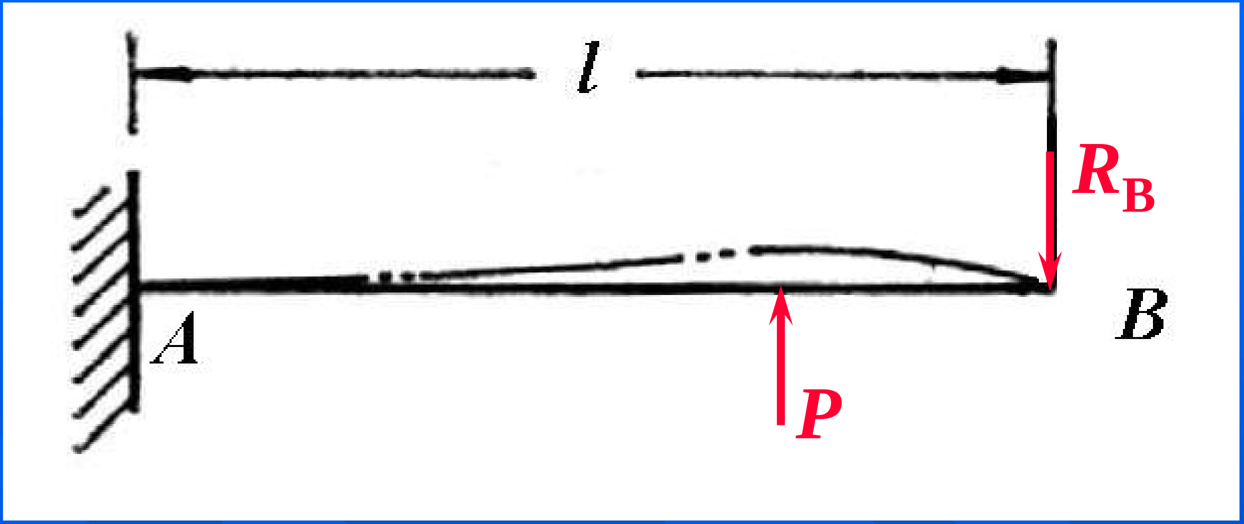
◆ 求B点挠度用叠加法

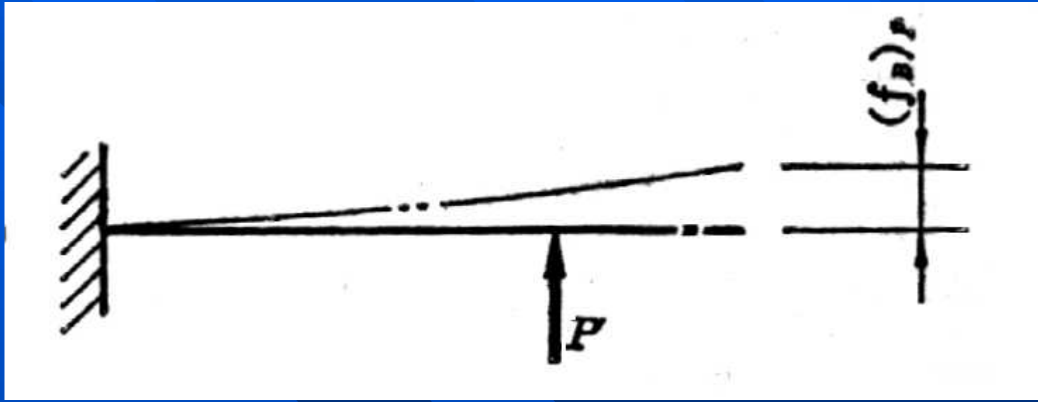
$$f_B=(f_B)_P+(f_B)_{R_B}$$

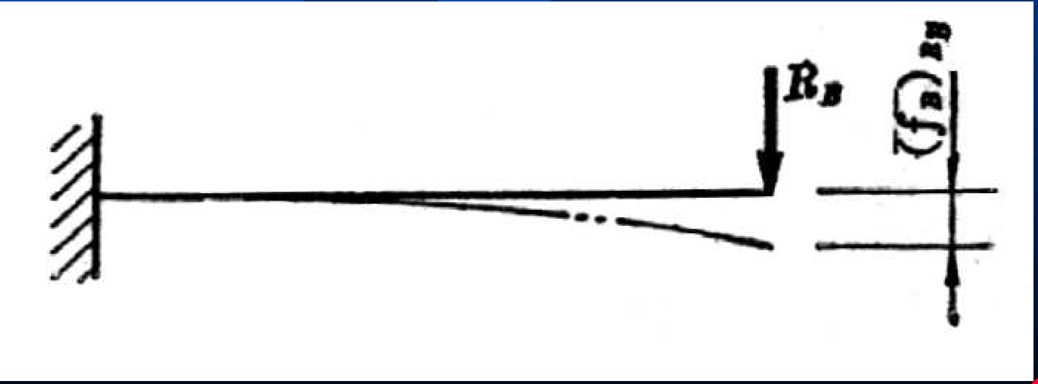
◆ 变形协调条件

$$f_B=(f_B)_P+(f_B)_{R_B}=0$$

◆ 具体计算B点挠度

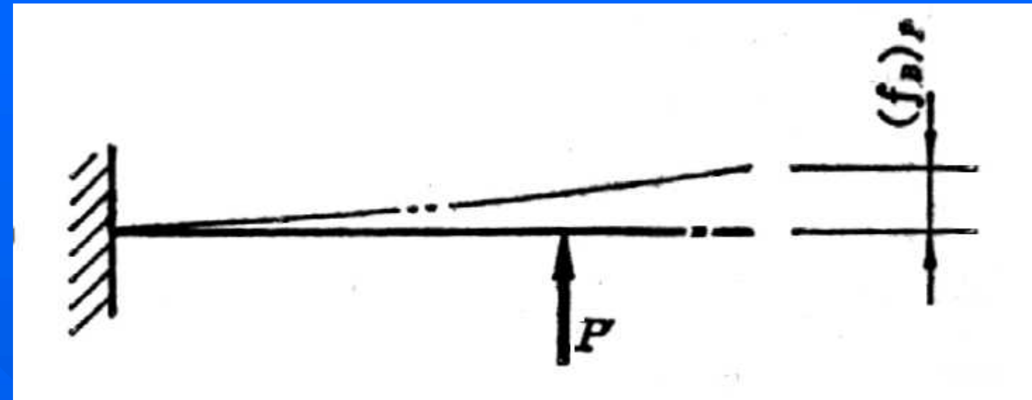


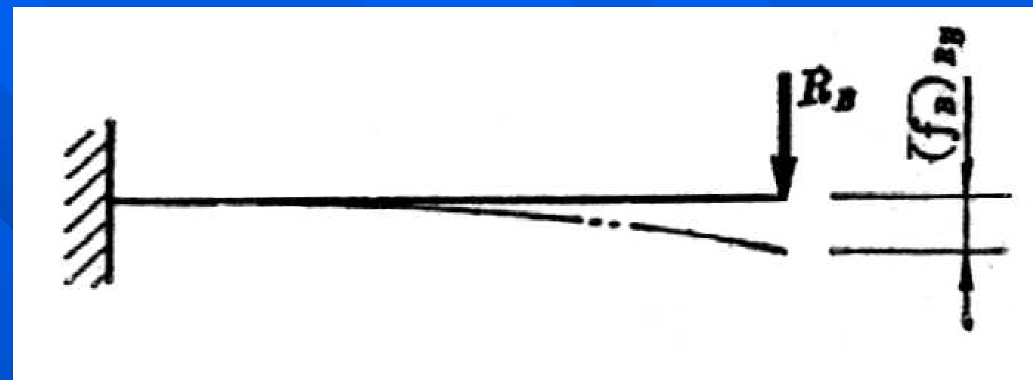




◆ 变形协调条件

$$f_B=(f_B)_P+(f_B)_{R_B}=0$$





◆ 具体计算B点挠度

由表6.1中的3

$$(f_B)_P=\frac{Pa^2}{6EI}(3l-a)$$

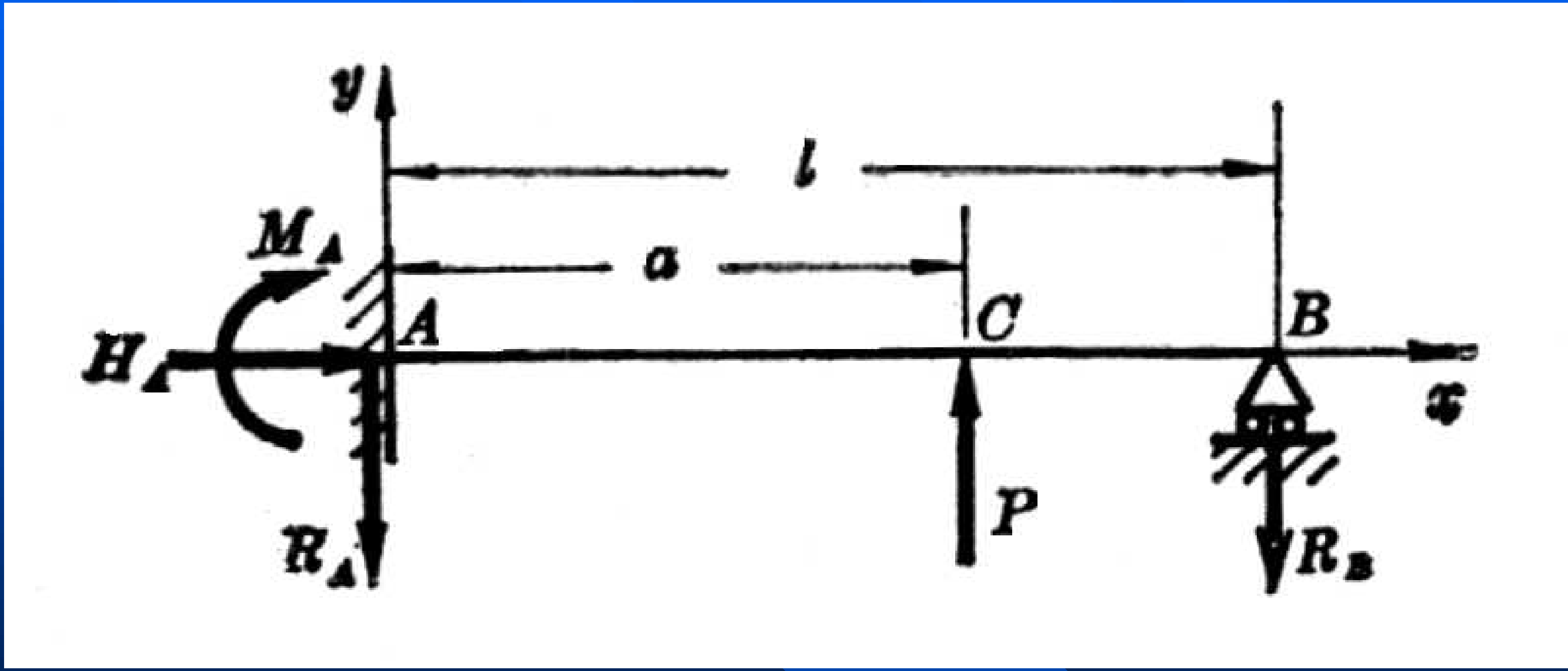
由表6.1中的2 $\quad (f_B)_{R_B}=-\frac{R_Bl^3}{3EI}$

代入变形协调条件，可解出 $\quad R_B=\frac{P}{2}\left(3\frac{a^2}{l^2}-\frac{a^3}{l^3}\right)$

求出R_B后，就可象求解静定梁一样求解了。

◆ 说明

静定基不是唯一的，可有多种选法。



§6.6 提高弯曲刚度的一些措施

梁的挠曲线微分方程为 $$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M(x)}{EI}$$

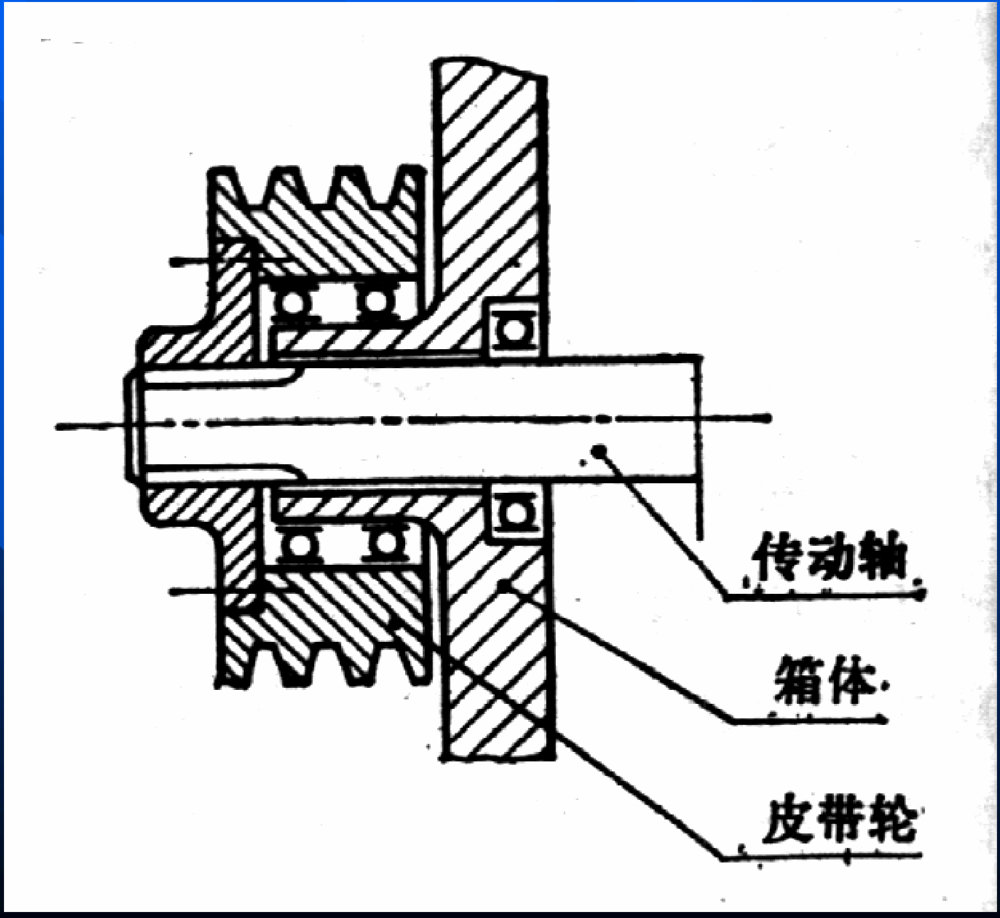
提高弯曲刚度的措施：

1 改善结构形式，

减小弯矩值

力不传到轴上，

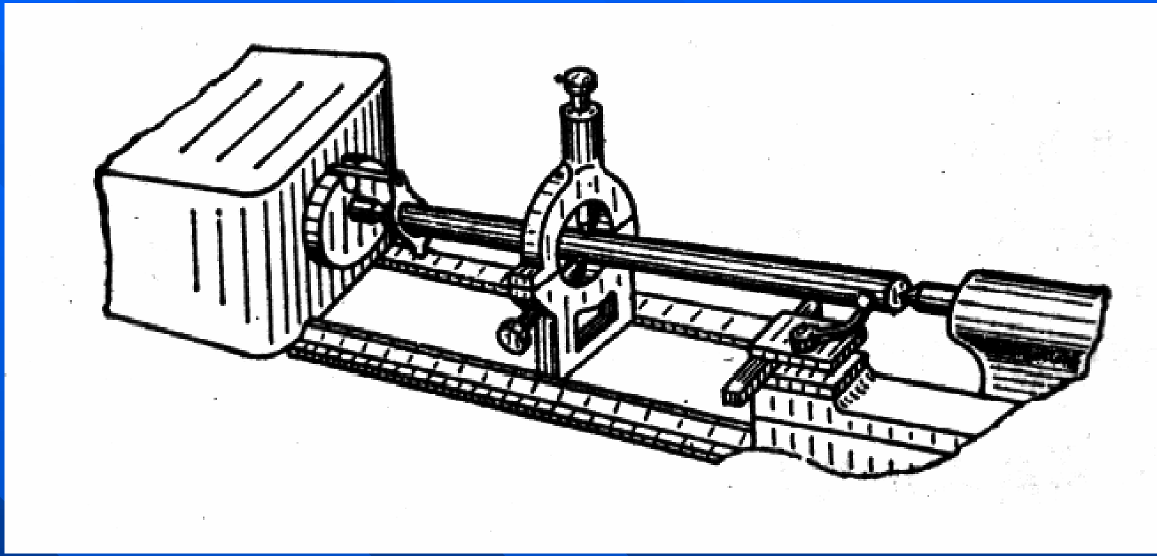
而由箱体承受。

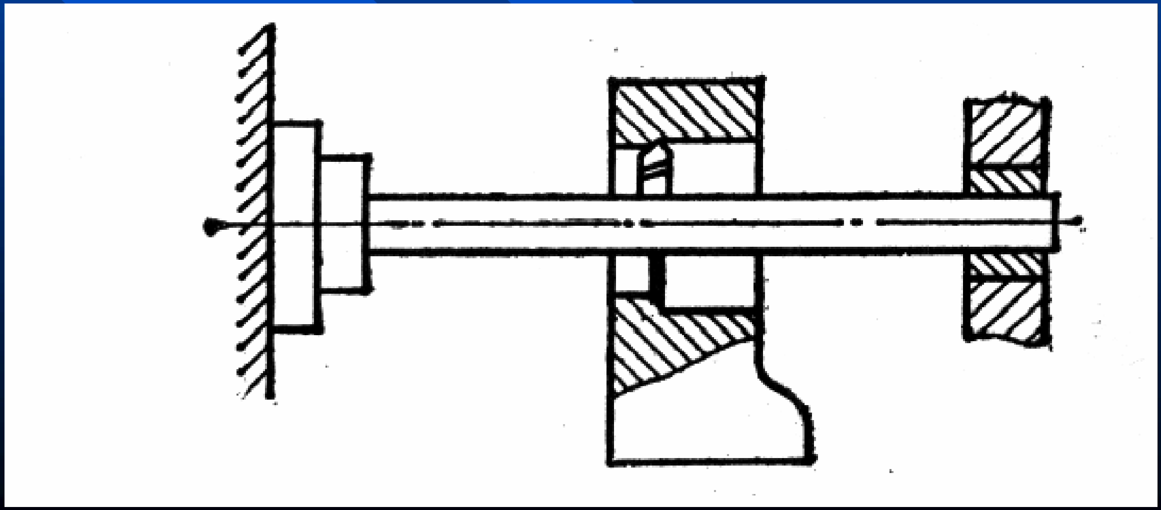


1 改善结构形式，减小弯矩值

- 缩小跨度或增加约束

梁受集中力作用时，挠度与跨度(l)的三次方成正比。





2 选择合理的截面形状

- 弹性模量与抗弯刚度

- 弹性模量与抗弯刚度
  - 抗弯刚度*EI*除与截面形状有关外，还与弹性模量有关。
  - 钢材的弹性模量较大，故用钢材制造的构件有较大的抗弯刚度。

材料名称	*E*(GPa)	μ
碳钢	196～216	0.24～0.28
合金钢	186～206	0.25～0.30
灰铸铁	78.5～157	0.23～0.27
铜及其合金	72.6～128	0.31～0.42
铝合金	70	0.33

- 钢材的弹性模量较大，故用钢材制造的构件有较大的抗弯刚度。
- 高强度合金钢与低碳钢的弹性模量接近，故选用高强度合金钢可提高构件的强度，但不能提高其刚度。

材料名称	E(GPa)	μ
碳钢	196～216	0.24～0.28
合金钢	186～206	0.25～0.30
灰铸铁	78.5～157	0.23～0.27
铜及其合金	72.6～128	0.31～0.42
铝合金	70	0.33

谢 谢 大 家！