材 料 力 学

第五章

弯 曲 应 力

南京航空航天大学
陶秋帆等

第五章　弯曲应力

本章内容:

1 纯弯曲

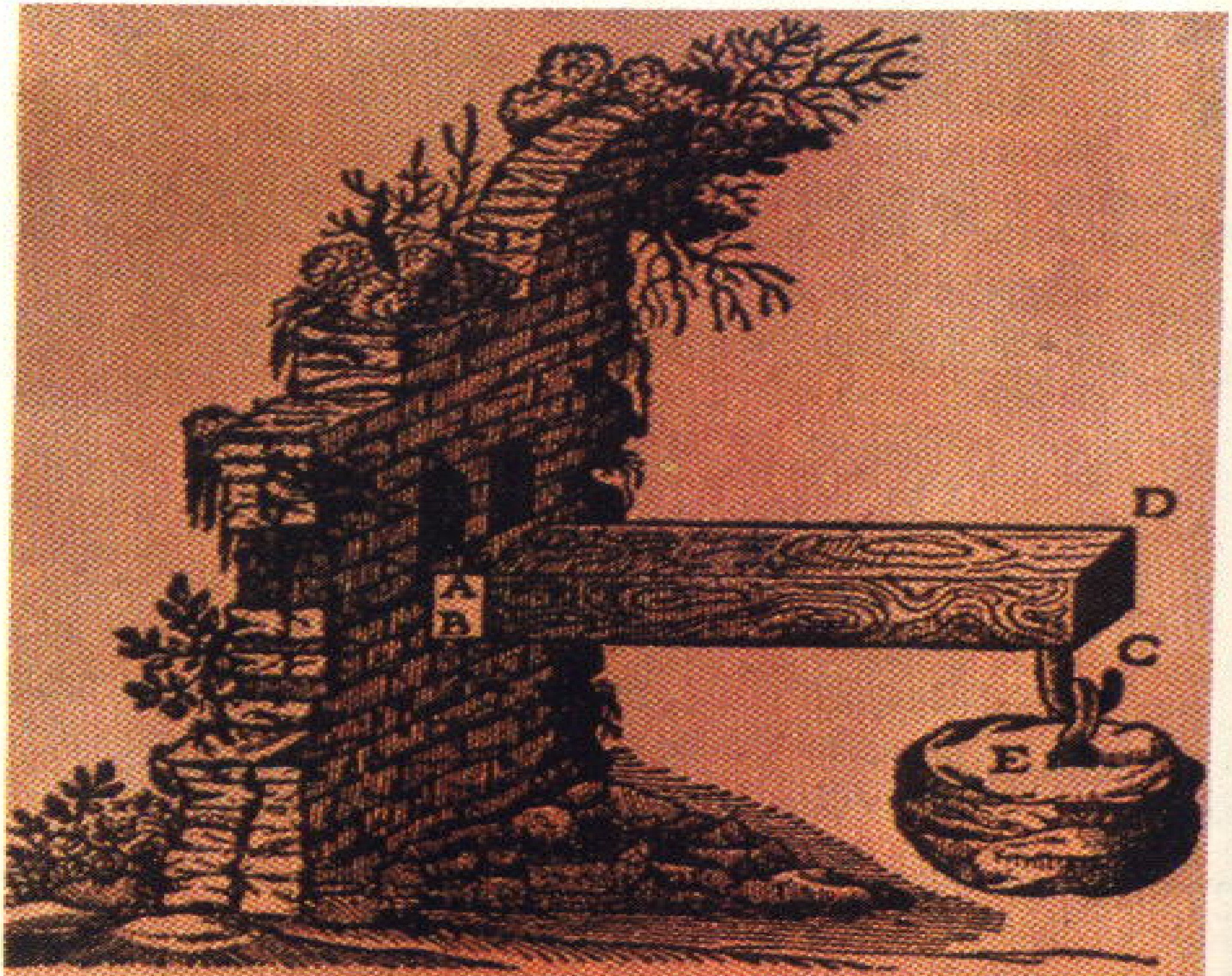
2 纯弯曲时的正应力

3 横力弯曲时的正应力

4 弯曲切应力

5* 关于弯曲理论的基本假设

6 提高弯曲强度的措施



伽利略做木梁弯曲试验的装置

§5.1 纯弯曲

- <u>横力弯曲</u>

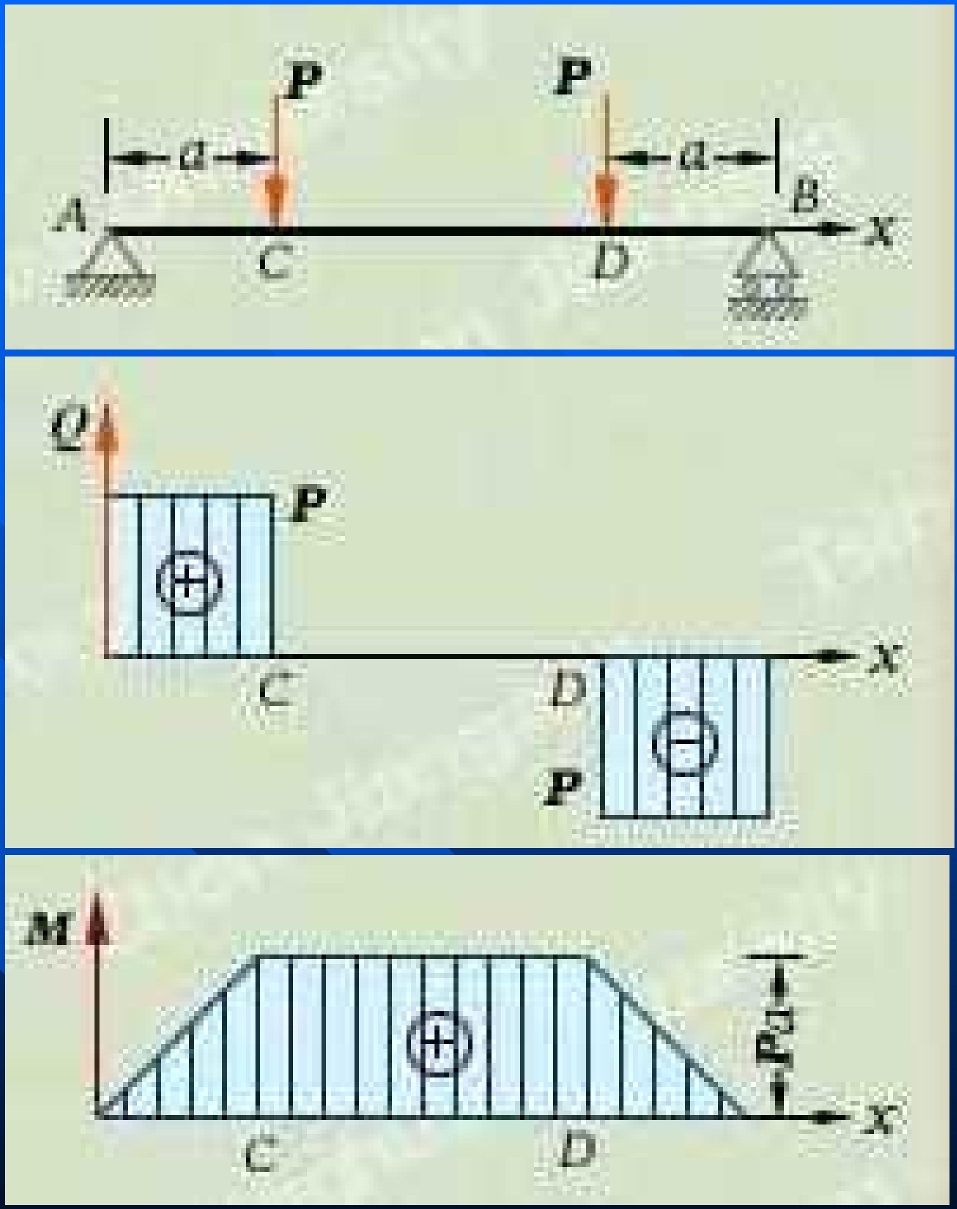
梁的横截面上同时有弯矩和剪力的弯曲。

- <u>纯弯曲</u>

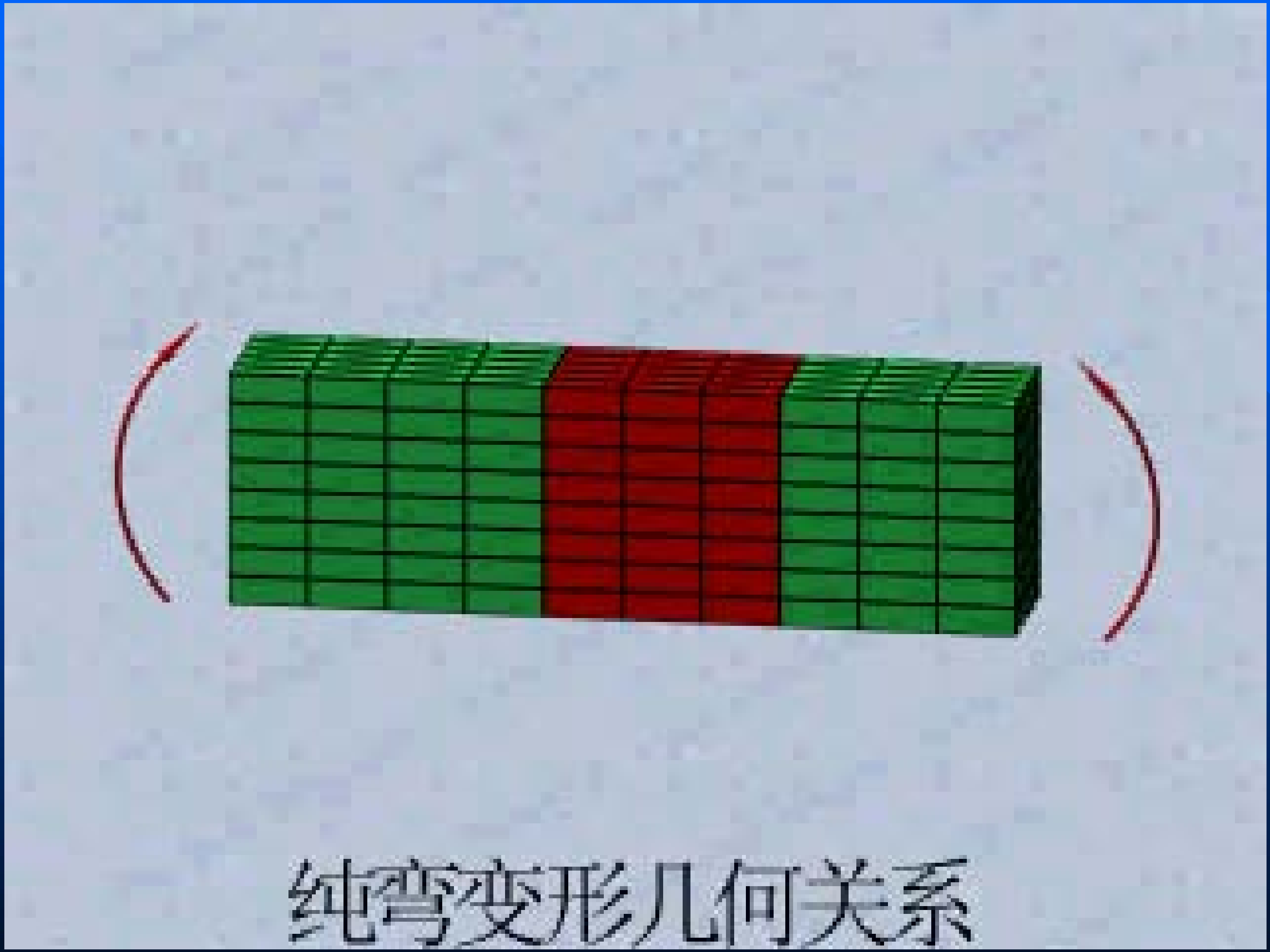
梁的横截面上只有弯矩时的弯曲。

⟶ 横截面上只有正应力而无切应力。

- 纯弯曲的<u>变形特征</u>



● 纯弯曲的变形特征

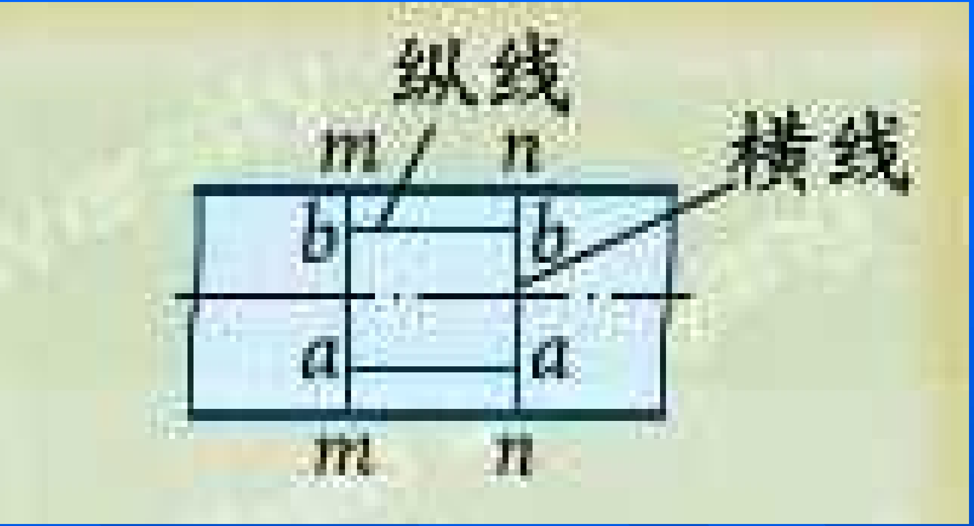


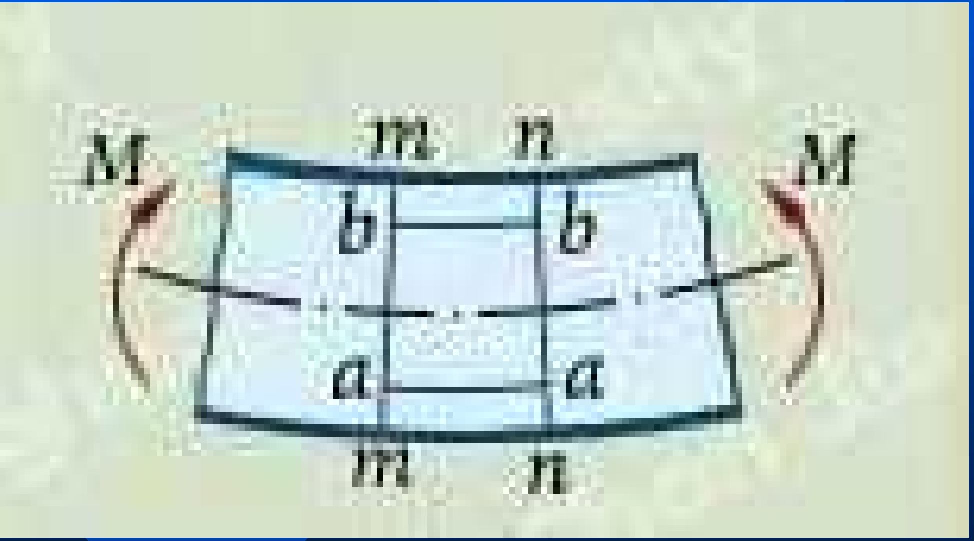
- 纯弯曲的<u>变形特征</u>
- 基本假设1: 平面假设

  变形前为平面的横截面变形后仍为平面，且仍垂直于梁的轴线。
- 基本假设2:

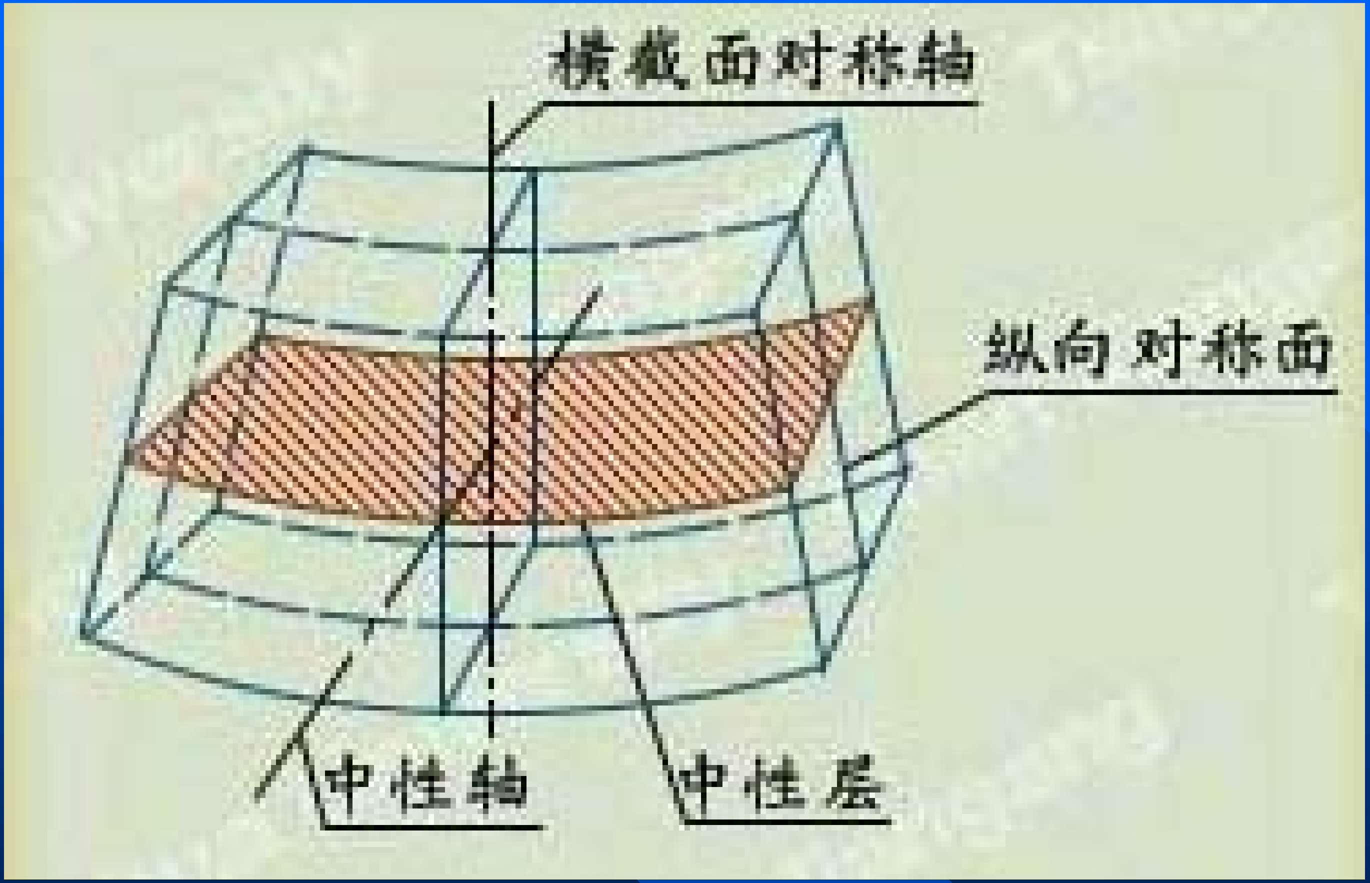
  纵向纤维无挤压假设

  纵向纤维间无正应力。
- <u>中性层与中性轴</u>





- 中性层与中性轴



§5.2 纯弯曲时的正应力

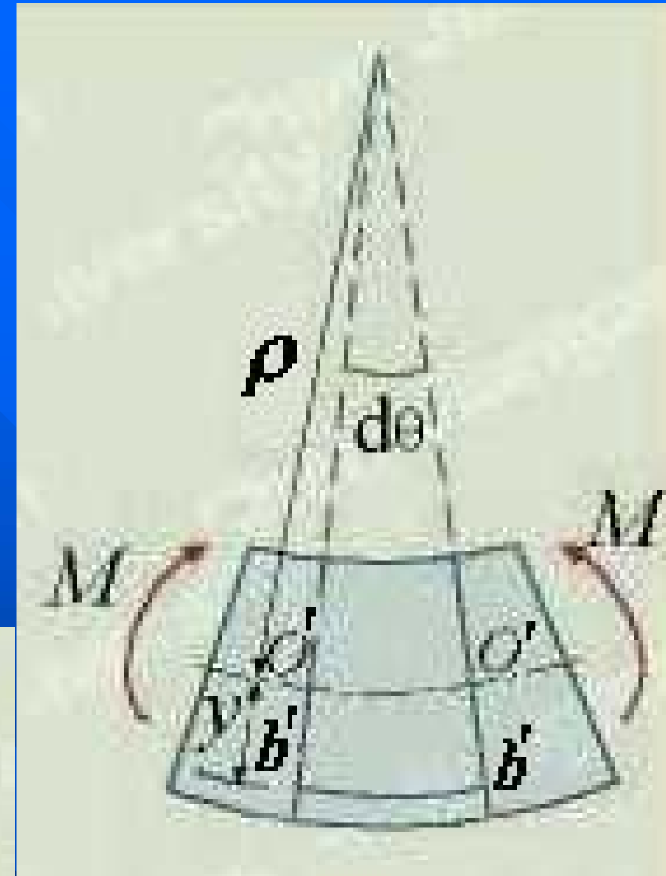
1 变形几何关系

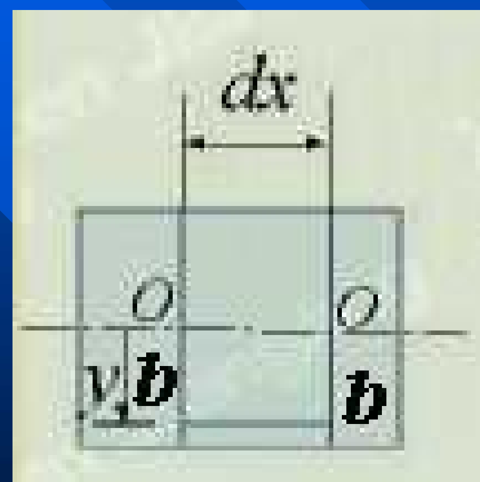
取坐标系如图，z轴为中性轴；

y轴为对称轴。

为求出距中性层 y处的应变，

取长dx的梁段研究：



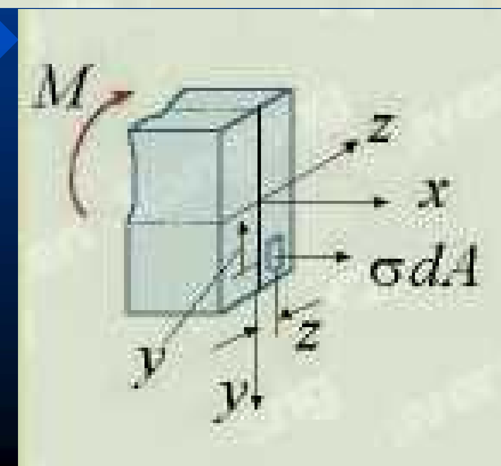


- 纵向线bb变形后的长度为：

$$b'b' = (\rho + y)\mathrm{d}\theta$$

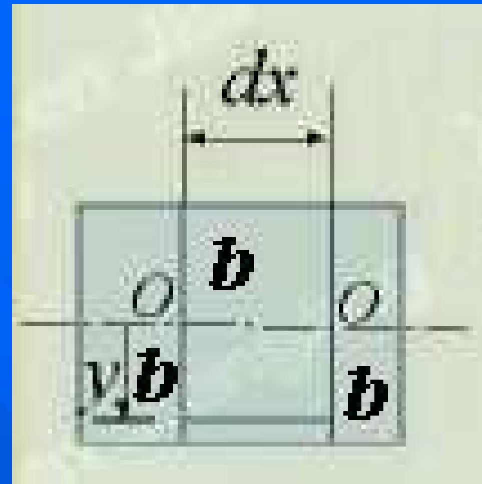
- 纵向线bb变形前的长度

中性层长度不变，所以有：



- 纵向线bb变形后的长度为:

$$b'b' = (\rho + y)\mathrm{d}\theta$$



- bb变形前的长度

中性层长度不变，所以

$$bb = OO = O'O' = \rho\mathrm{d}\theta$$

- 纵向线bb的应变为

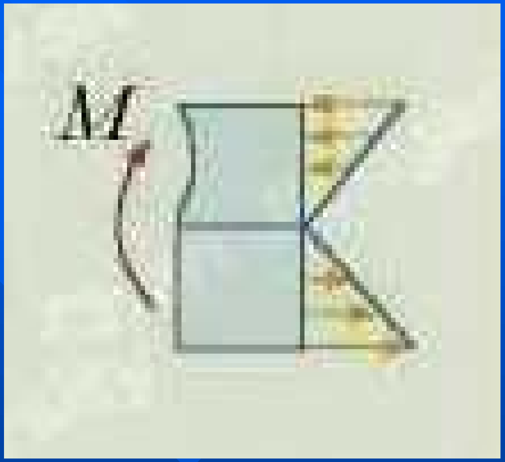
$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)\mathrm{d}\theta - \rho\mathrm{d}\theta}{\rho\mathrm{d}\theta} = \frac{y}{\rho}$$

即：纯弯曲时横截面上各点的纵向线应变沿截面高度呈线性分布。

2 物理关系

因为纵向纤维只受拉或压，当应力小于比例极限时，由胡克定律有:

$$\sigma = E\varepsilon \longrightarrow \sigma = E\frac{y}{\rho}$$



即：纯弯曲时横截面上任一点的正应力与它到中性轴的距离y成正比。

也即，正应力沿截面高度呈线性分布。

3 静力关系

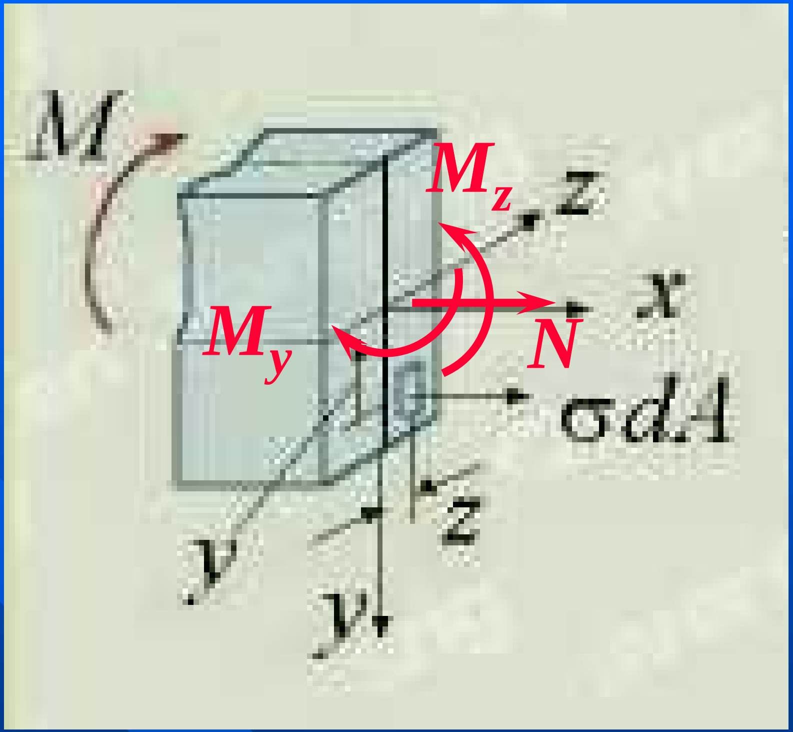
3 静力关系

对横截面上的内力系，有:

$$N=\int_A \sigma \mathrm{d}A$$

$$M_y=\int_A z\sigma \mathrm{d}A$$

$$M_z=\int_A y\sigma \mathrm{d}A$$

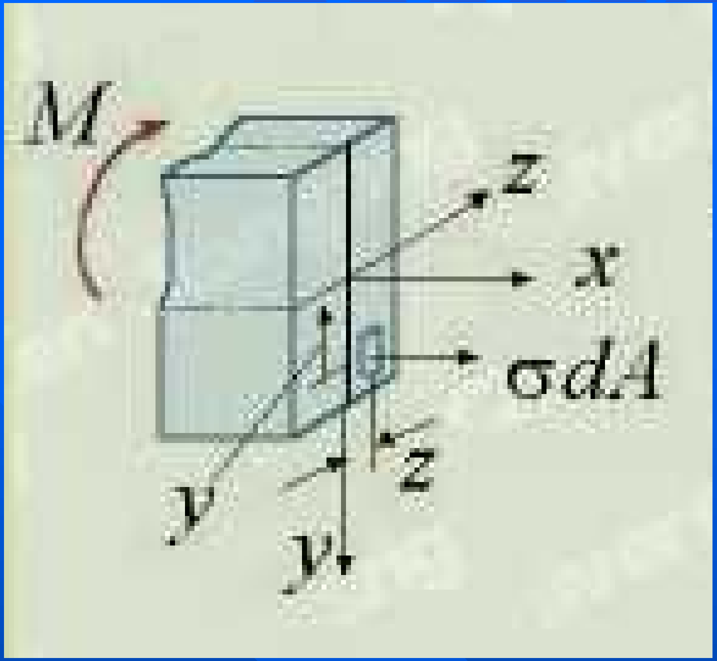


由梁段的平衡有: $\sum X=0 \qquad N=0$

$$\sum m_y=0 \qquad M_y=0$$

$$\sum m_z=0 \qquad M_z=M$$

对横截面上的内力系，有:



$$N=\int_A \sigma \mathrm{d}A$$

$$M_y=\int_A z\sigma \mathrm{d}A$$

$$M_z=\int_A y\sigma \mathrm{d}A$$

由梁段的平衡有: $N=0,\quad M_y=0,\quad M_z=M$

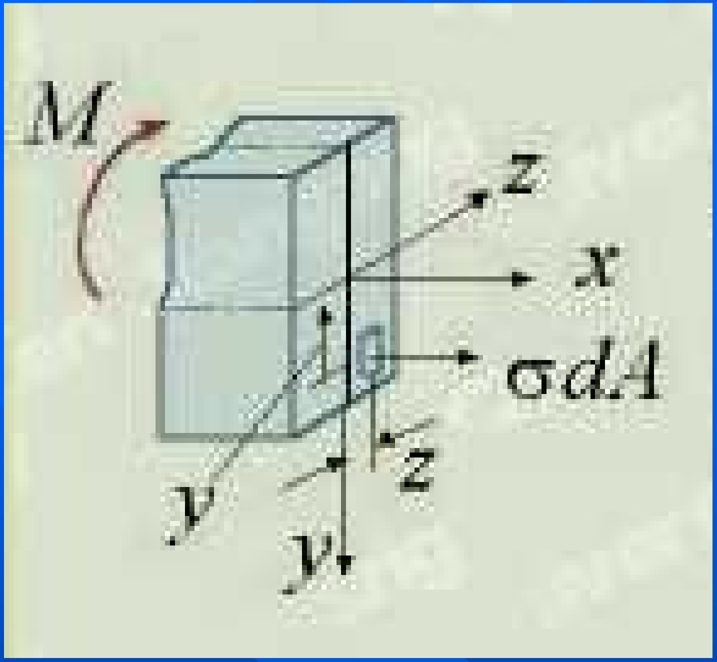
所以 $N=\int_A \sigma \mathrm{d}A=0 \longrightarrow \int_A E\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A=0$

$$\longrightarrow \frac{E}{\rho}\int_A y\,\mathrm{d}A=0 \longrightarrow \int_A y\,\mathrm{d}A=0 \longrightarrow S_z=0$$

$\longrightarrow$ z 轴通过形心。即: 中性轴通过形心。

$$M_y=\int_A z\sigma\,\mathrm{d}A,\quad M_z=\int_A y\sigma\,\mathrm{d}A$$

$$M_y=0,\qquad M_z=M$$



由 $$N=\int_A \sigma\,\mathrm{d}A=0$$

$\Rightarrow$ 中性轴通过形心。

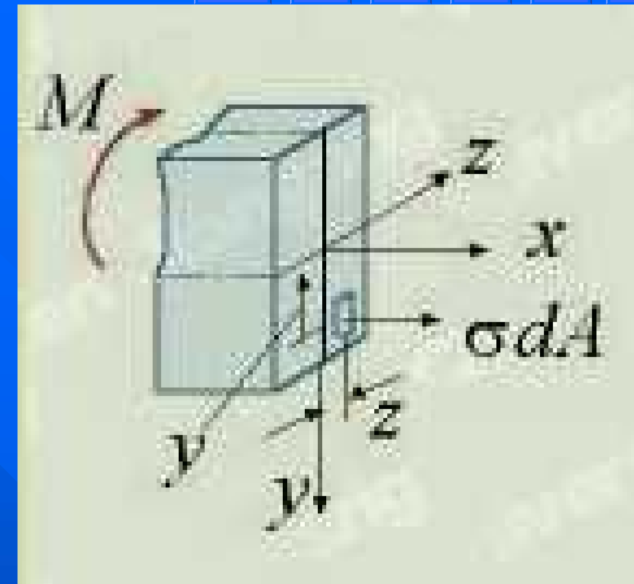
由 $$M_y=\int_A z\sigma\,\mathrm{d}A=0 \quad\Rightarrow\quad \int_A E\frac{y}{\rho}\cdot z\,\mathrm{d}A=0$$

$\Rightarrow$ $$\int_A yz\,\mathrm{d}A=0 \qquad \text{即：}\ I_{yz}=0$$

因为y轴是对称轴，上式自然满足。

$$M_y = \int_A z\sigma \,\mathrm{d}A, \quad M_z = \int_A y\sigma \,\mathrm{d}A$$

$$M_y = 0, \qquad M_z = M$$

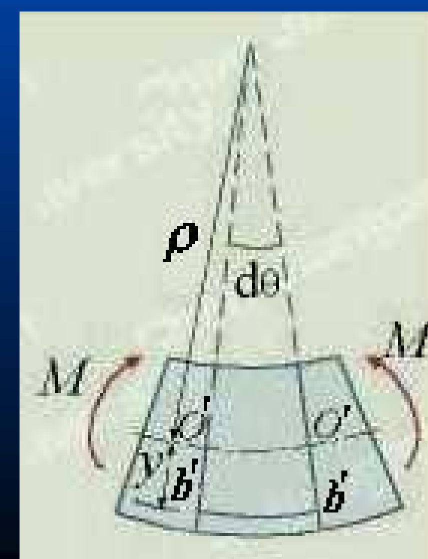


由 $M_z = M = \int_A y\sigma \,\mathrm{d}A$

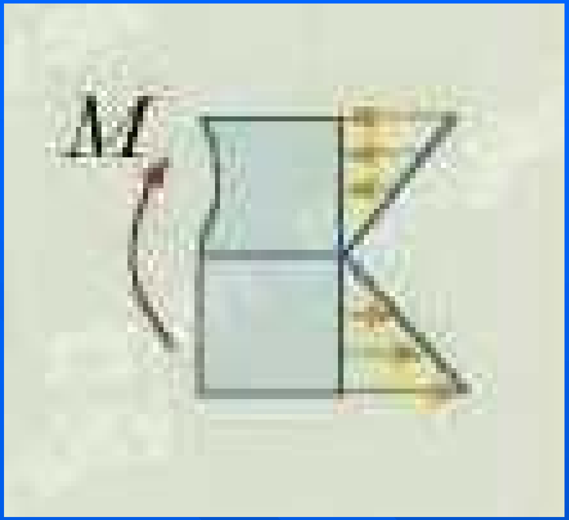
$\longrightarrow$ $M = \int_A E\dfrac{y}{\rho}\cdot y\,\mathrm{d}A = \dfrac{E}{\rho}\int_A y^2\,\mathrm{d}A = \dfrac{E}{\rho}I_z$

$\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI_z}}$ ——梁的抗弯刚度

将上式代入 $\sigma = E\dfrac{y}{\rho}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\sigma = \dfrac{My}{I_z}}$



纯弯曲时正应力公式 $\boxed{\sigma = \dfrac{My}{I_z}}$



- 公式的适用性
  - 由于推导过程并未用到矩形截面条件，因而公式适用于任何横截面具有纵向对称面，且载荷作用在对称面内的情况。
  - 公式是对等直梁得到的。对缓慢变化的变截面梁和曲率很小的曲梁也近似成立。
  - 公式是从纯弯曲梁推得，是否适用于一般情形（横力弯曲）？

§5.3 横力弯曲时的正应力

横力弯曲时，横截面上有切应力 → 平面假设不再成立

此外，横力弯曲时纵向纤维无挤压假设也不成立.

由弹性力学的理论，有结论：

当梁的长度l与横截面的高度h的比值： $\frac{l}{h} > 5$

则用纯弯曲的正应力公式计算横力弯曲时的正应力有足够的精度。

$l/h > 5$ 的梁称为细长梁。

- 最大正应力

横力弯曲时，弯矩是变化的。

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}y_{\max}}{I_z}$$

引入符号：$W=\dfrac{I_z}{y_{\max}}$ —— 抗弯截面系数

则有：$\sigma_{\max}=\dfrac{M_{\max}}{W}$

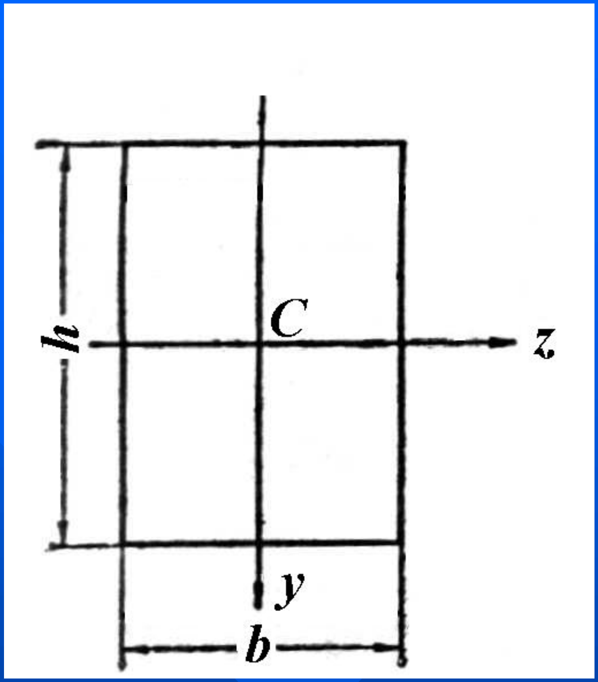
- 比较 拉压：$\sigma_{\max}=\dfrac{N_{\max}}{A}$ 扭转：$\tau_{\max}=\dfrac{T_{\max}}{W_t}$

- 两种常用截面的抗弯截面系数

◆ 矩形截面

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \qquad y_{\max} = \frac{h}{2}$$

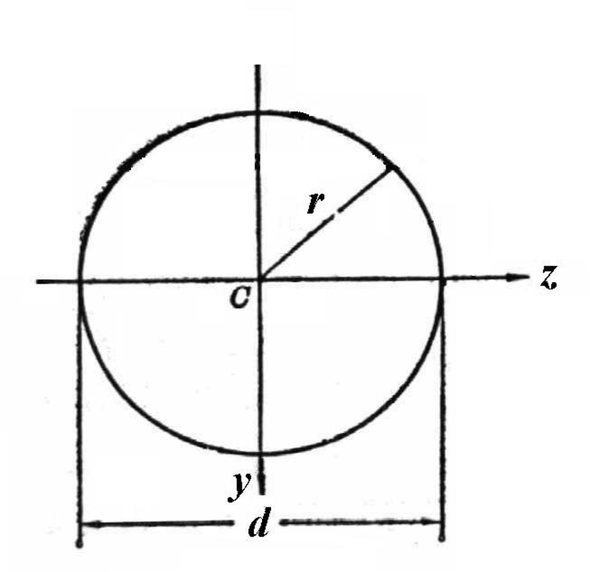
$$\Rightarrow \quad W = \frac{bh^2}{6}$$



◆ 圆形截面

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}, \qquad y_{\max} = \frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{\pi d^3}{32}$$



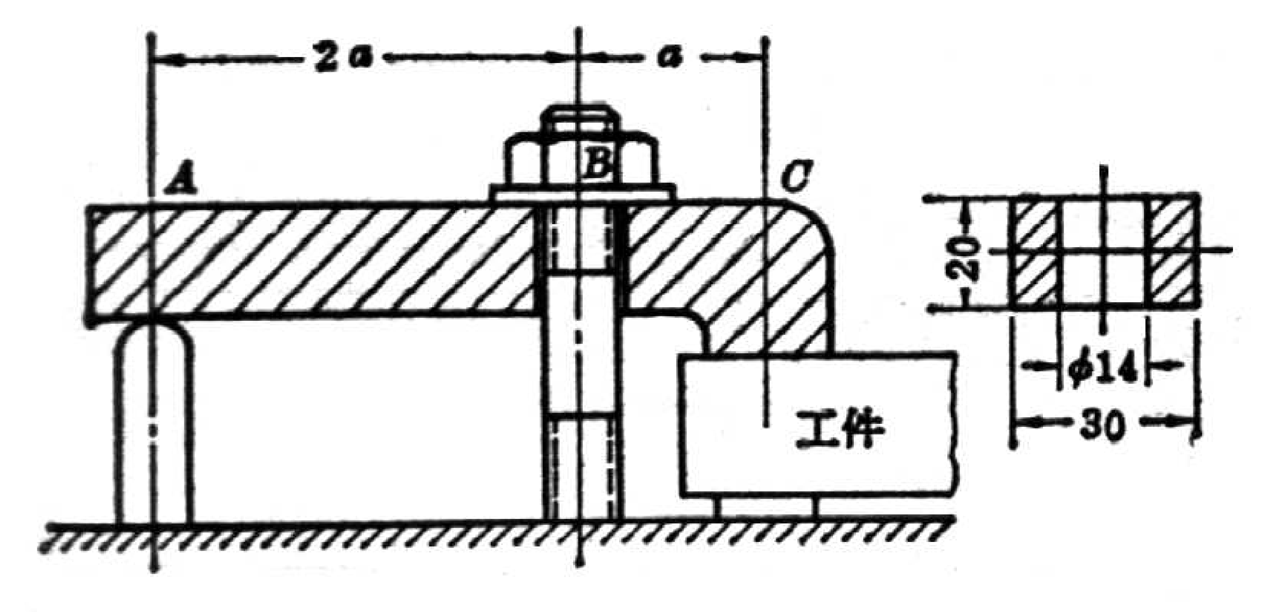
- 弯曲强度条件

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}\leq[\sigma]$$

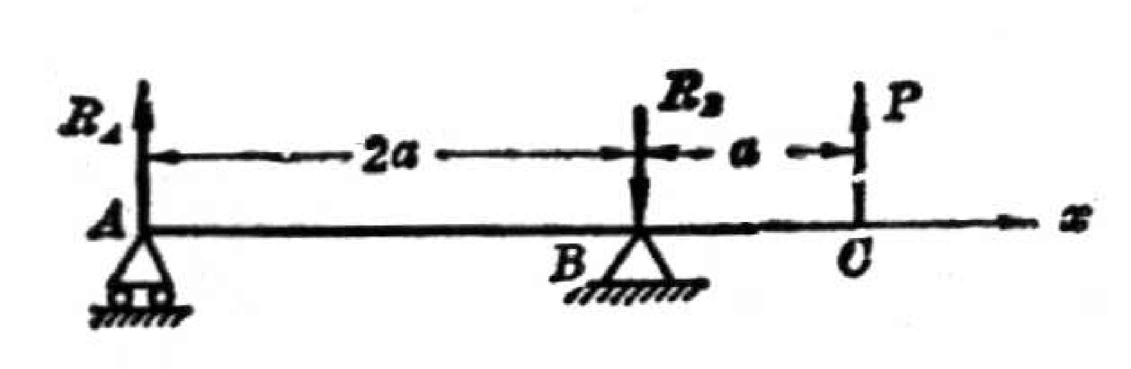
<u>注意</u>：当截面变化时，还需综合考虑*W*的值。

例 1（书例5.1）

已知：板长$3a$ =150mm，材料的许用应力[σ] =140MPa。



求：最大允许压紧力P。



解：压板可简化为如图的外伸梁。

(1) 求弯矩图

由微分关系，AC段、BC段的弯矩图为斜直线。

(1) 求弯矩图

由微分关系，AC段、BC段的弯矩图为斜直线。

作出弯矩图。

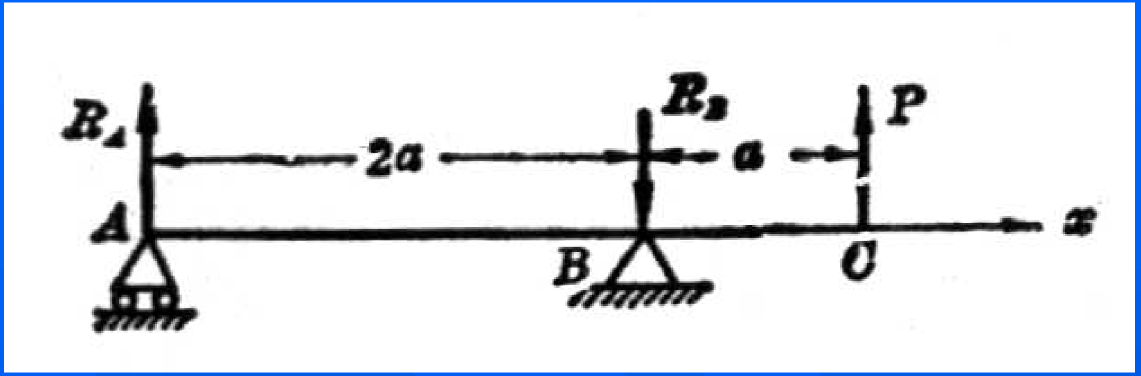
(2) 确定危险截面

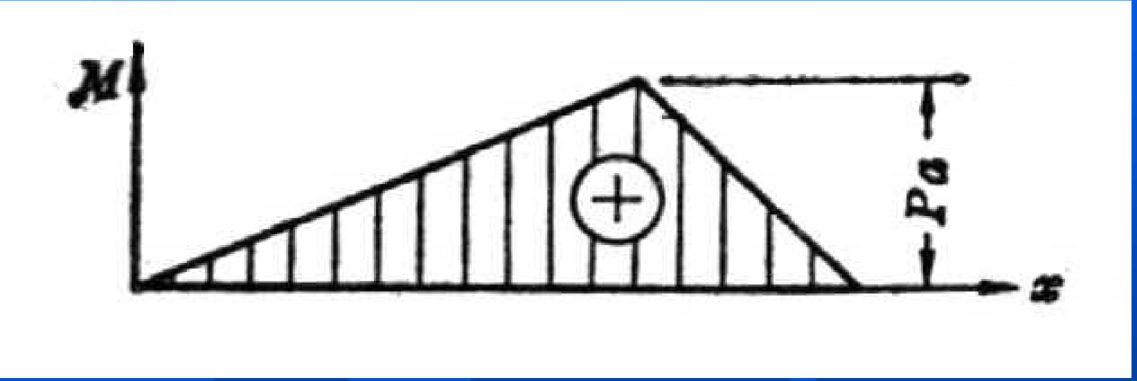
$$M_{\max} = M_B = Pa$$

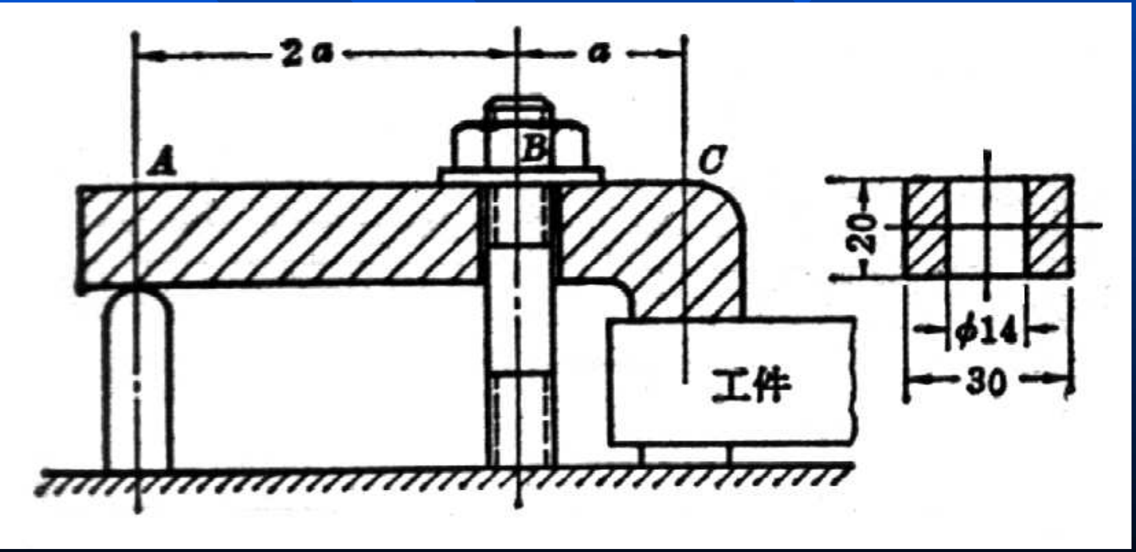
且B截面最薄弱。

→ B为危险截面。

(3) 计算B截面W



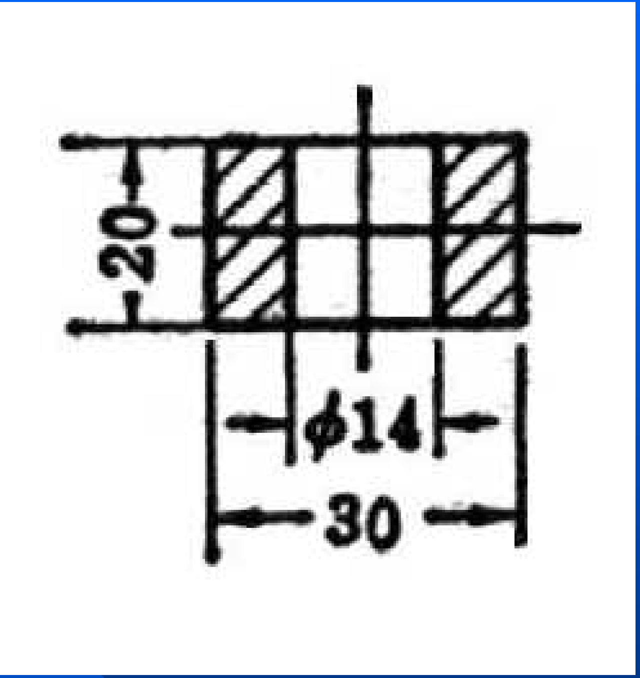




B为危险截面。 $M_{\max} = M_B = Pa$

(3) 计算B截面W

看成组合物体



$$I_z = I_{z1} - I_{z2}$$

$$= \frac{0.03 \times 0.02^3}{12} - \frac{0.014 \times 0.02^3}{12}$$

$$= 1.07 \times 10^{-8}\ \mathrm{m}^4$$

$$W = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{1.07 \times 10^{-8}}{1 \times 10^{-2}} = 1.07 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

B为危险截面。 $M_{\max} = M_B = Pa$

(3) 计算B截面W $W = 1.07 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$

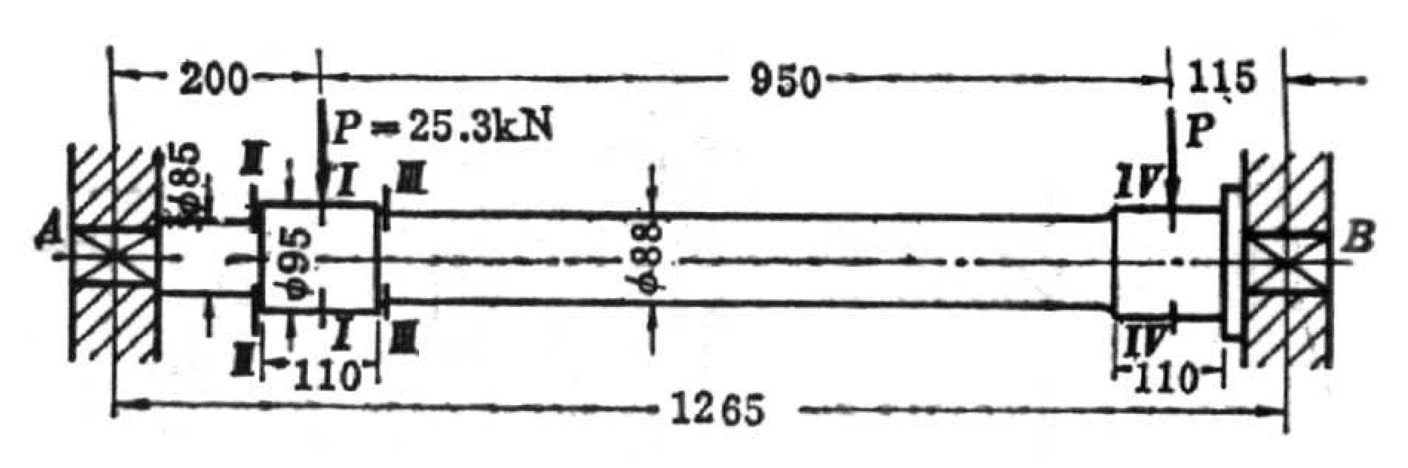
(4) 由强度条件计算P $\sigma_{\max} = \dfrac{M_{\max}}{W} \le [\sigma]$

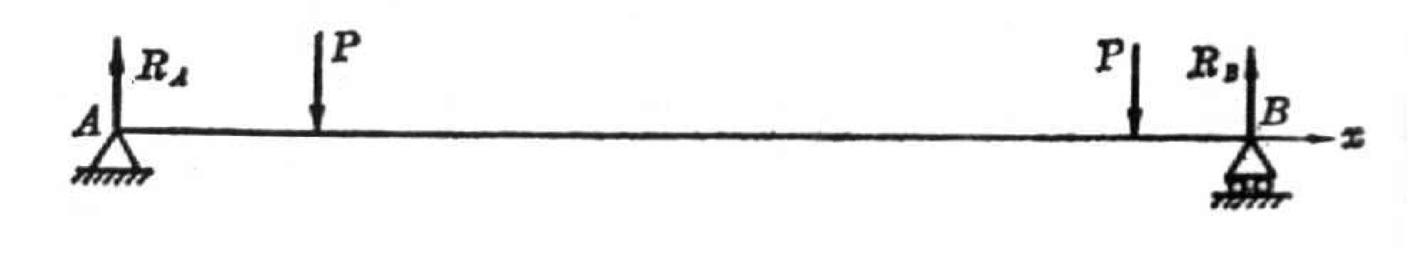
$\Rightarrow$ $M_{\max} \le W[\sigma]$ $\Rightarrow$ $Pa \le W[\sigma]$

$$\Rightarrow \quad P \le \frac{W[\sigma]}{a} = \frac{1.07 \times 10^{-8} \times 140 \times 10^{6}}{5 \times 10^{-2}} = 3\ \mathrm{kN}$$

例 2 (书例5.2)

已知： [σ]= 100 MPa， P = 25.3 kN。





求：校核心轴的强度。

解：计算简图如图。

(1) 求弯矩图

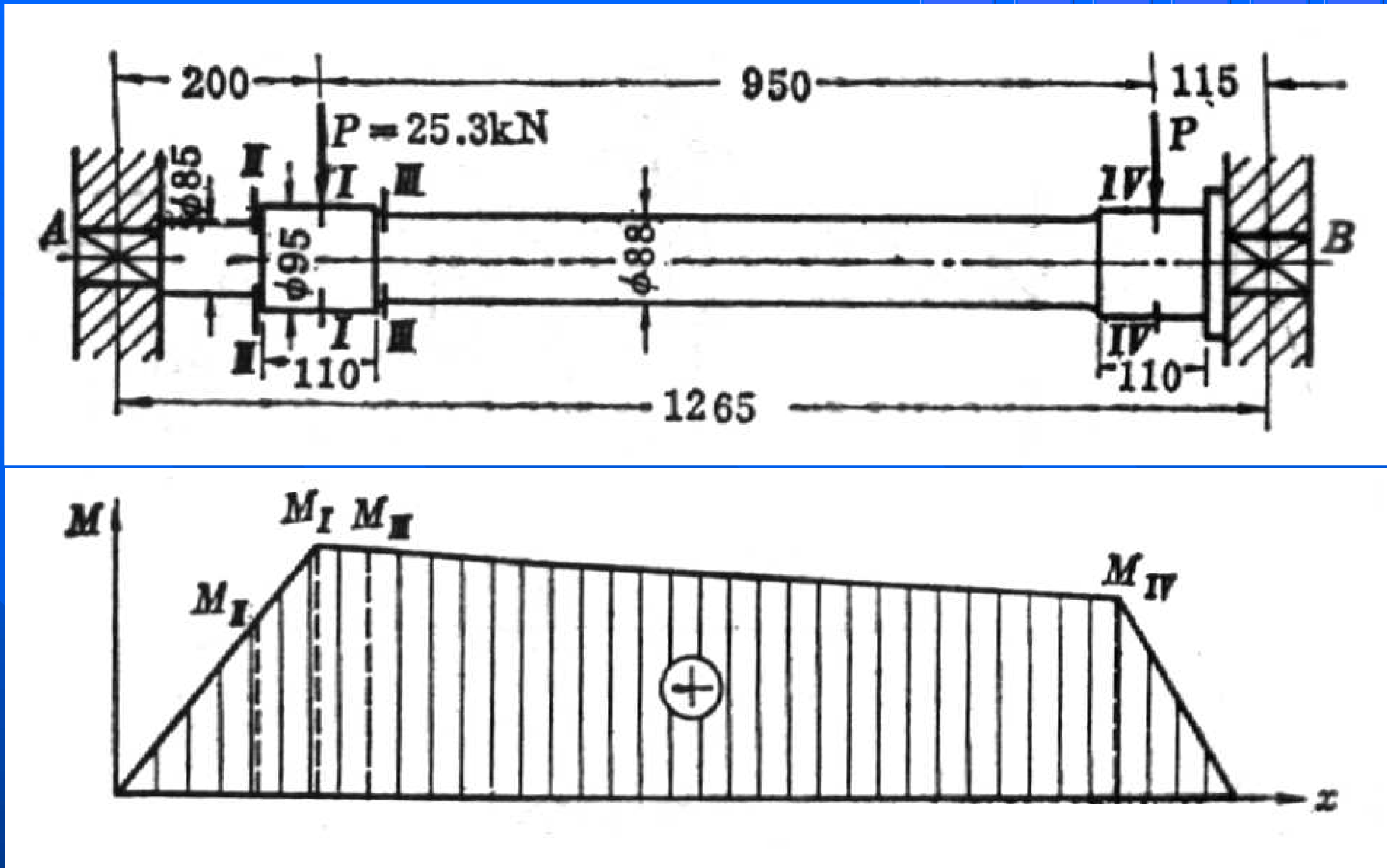
支反力 $R_A = 23.6\ \text{kN}, \quad R_B = 27\ \text{kN}$

(1)求弯矩图

支反力

$$R_A = 23.6\ \text{kN}$$

$$R_B = 27\ \text{kN}$$



(2) 确定危险截面

- I截面
- II截面
- III截面

(3) 强度校核

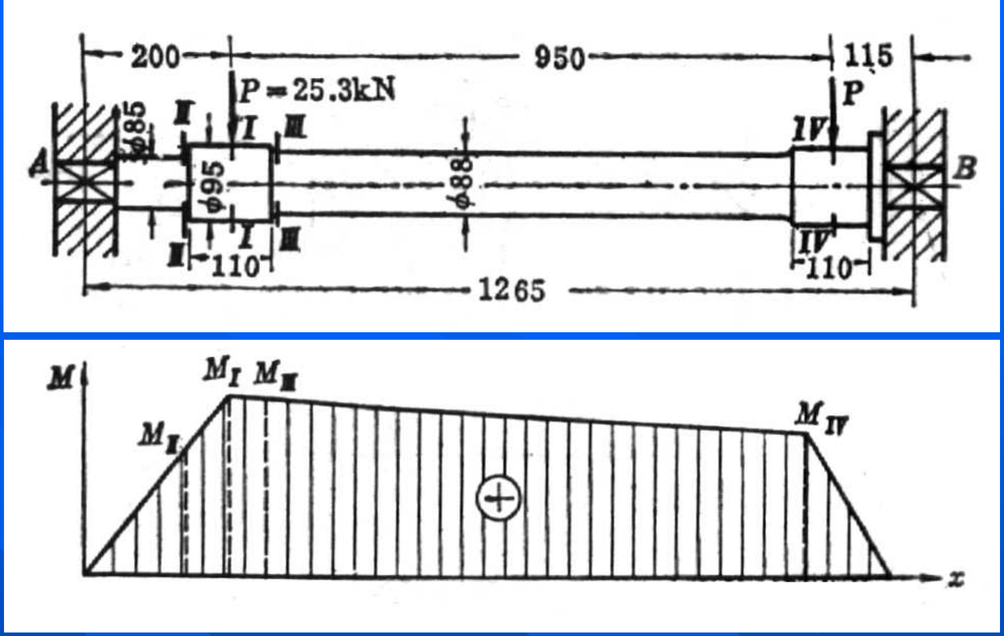
- I截面

$$M_I = M_{\max} = 4.72\ \text{kN·m}$$

(3) 强度校核

- I截面

$$M_I = M_{max} = 4.72\ \text{kN·m}$$



$$W_I = \frac{\pi d_1^3}{32}$$

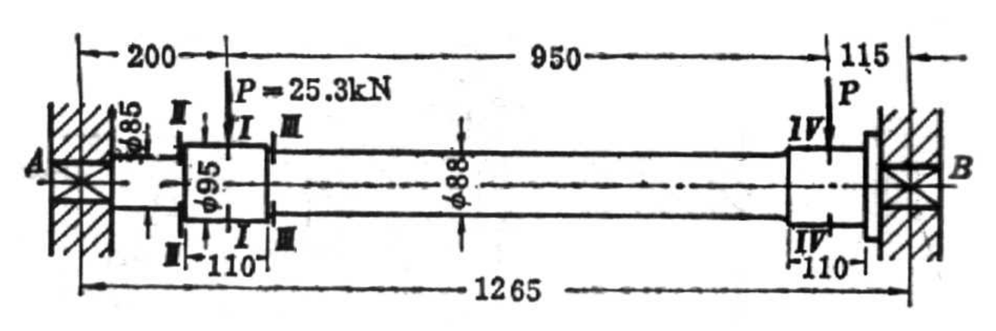
$$= \frac{\pi \times (95\times10^{-3})^3}{32} = 84.1\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

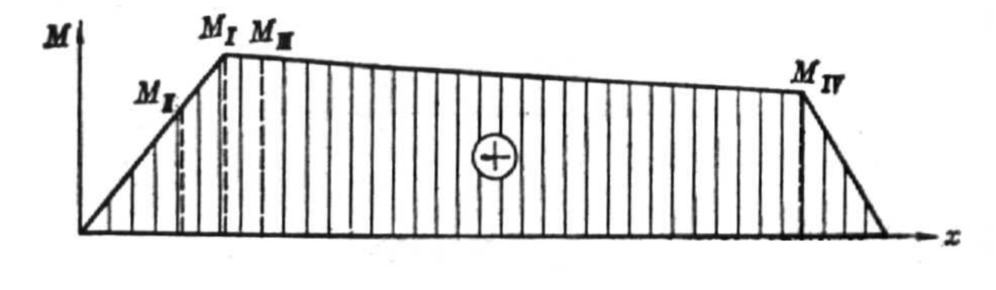
$$\sigma_I = \frac{M_I}{W_I} = 56.1\ \text{MPa} \le [\sigma]$$

- II截面 $\quad M_{II} = 3.42\ \text{kN·m}$

◆ II截面

$$M_{II} = 3.42\ \text{kN}\cdot\text{m}$$





$$W_{II} = \frac{\pi d_2^3}{32}$$

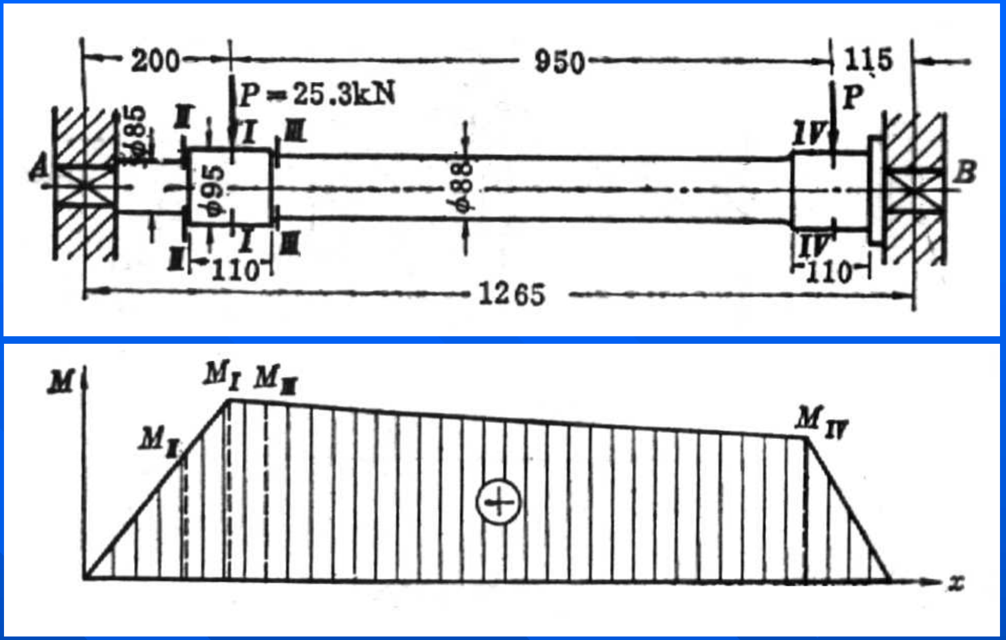
$$= \frac{\pi \times (85\times10^{-3})^3}{32} = 60.3\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$\sigma_{II} = \frac{M_{II}}{W_{II}} = 56.7\ \text{MPa} \le [\sigma]$$

◆ III截面 $\quad M_{III} = 4.64\ \text{kN}\cdot\text{m}$

◆ III截面

$$M_{III}=4.64\ \text{kN}\cdot\text{m}$$



$$W_{III}=\frac{\pi d_3^3}{32}$$

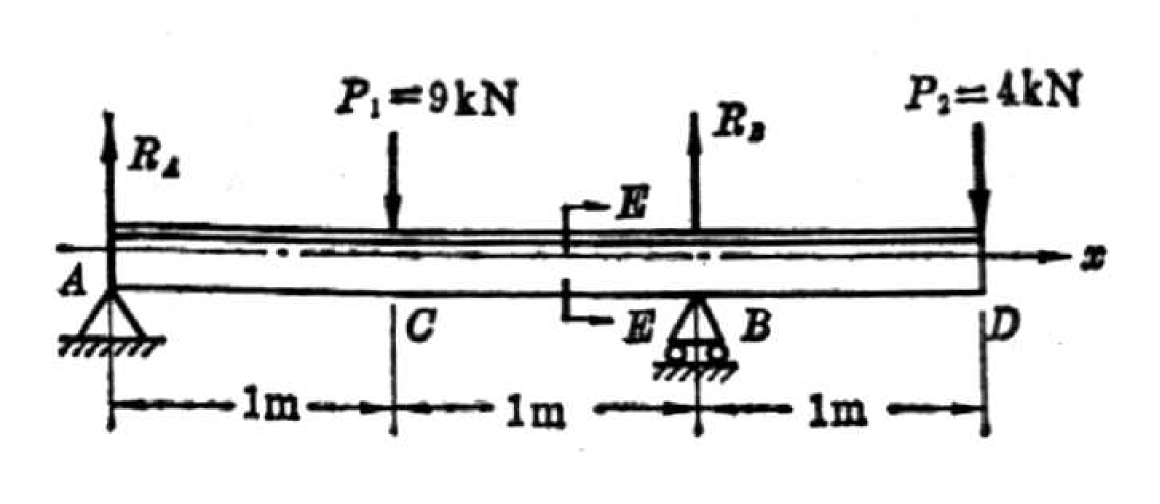
$$=\frac{\pi\times(88\times10^{-3})^3}{32}=66.9\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

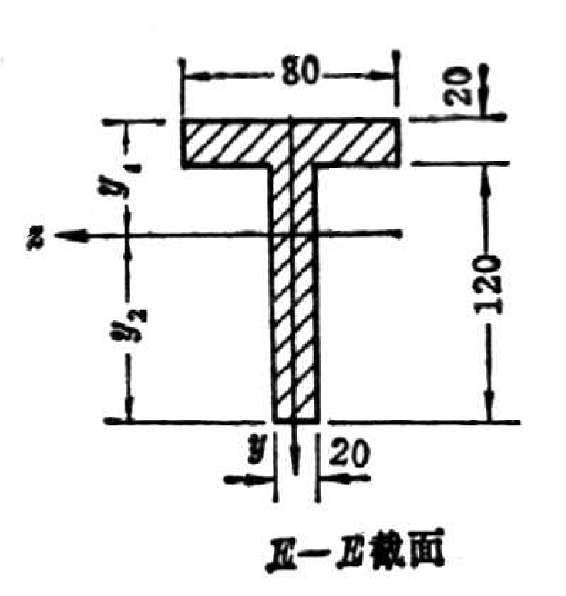
$$\sigma_{III}=\frac{M_{III}}{W_{III}}=69.4\ \text{MPa}\le[\sigma]$$

- 结论　满足强度要求。
- 注意　最大正应力并非发生在弯矩最大的截面。

例 3（书例5.3)

已知：T形截面铸铁梁，$[\sigma_t]=30$ MPa，$[\sigma_c]=160$ MPa。$I_z=763\text{cm}^4$，且 $|y_1|=52\text{mm}$。





求：校核梁的强度。

解：(1) 求弯矩图

- 支反力 $R_A=2.5\,\text{kN},\ R_B=10.5\,\text{kN}$
- 作出弯矩图

(1) 求弯矩图

- 支反力

$$R_A = 2.5\ \text{kN},$$

$$R_B = 10.5\ \text{kN}$$

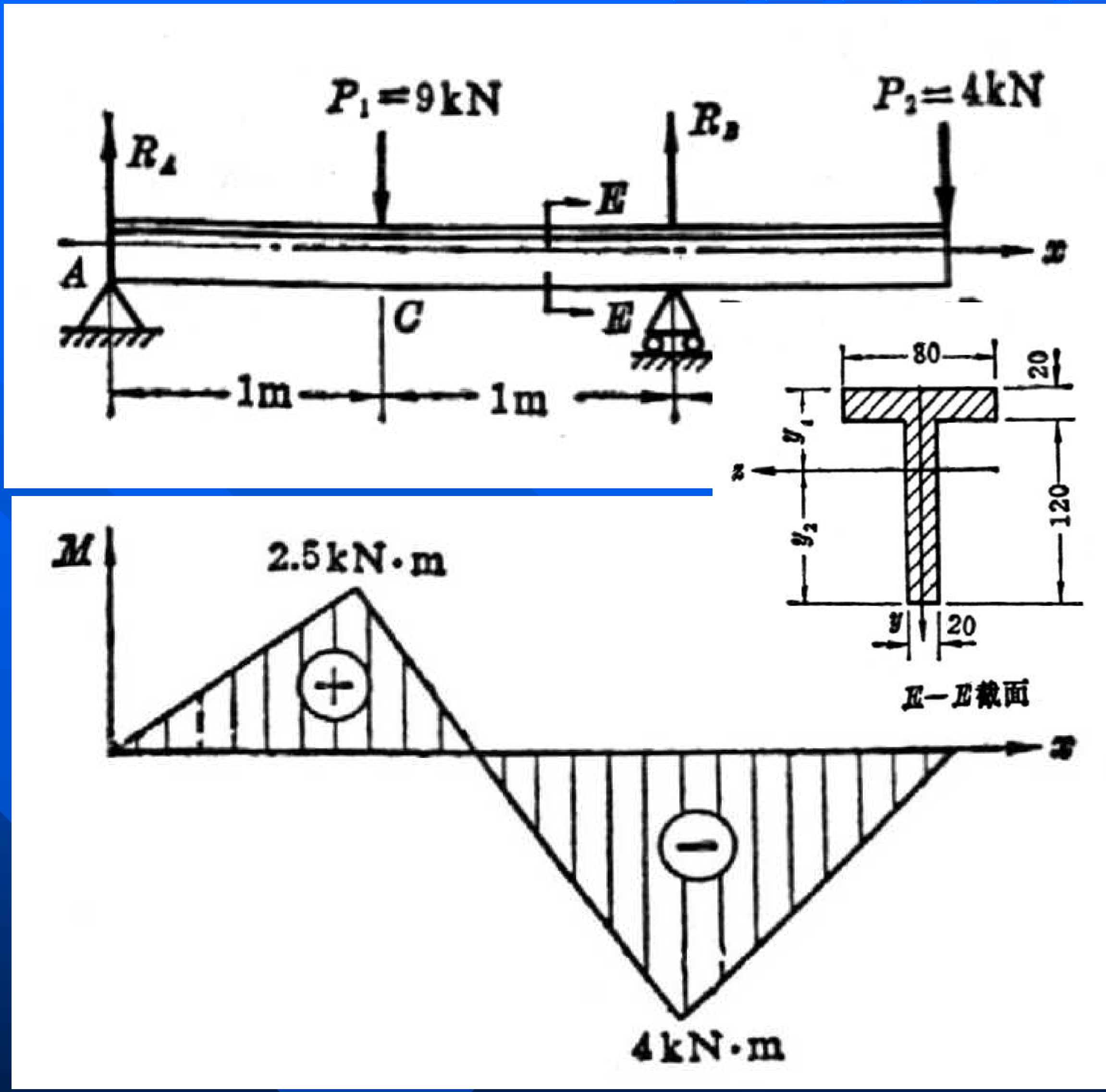
- 作出弯矩图

最大正弯矩为:

$$M_C = 2.5\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

最大负弯矩为:

$$M_B = -4\ \text{kN}\cdot\text{m}$$



(2) 确定危险截面

- B截面
- C截面

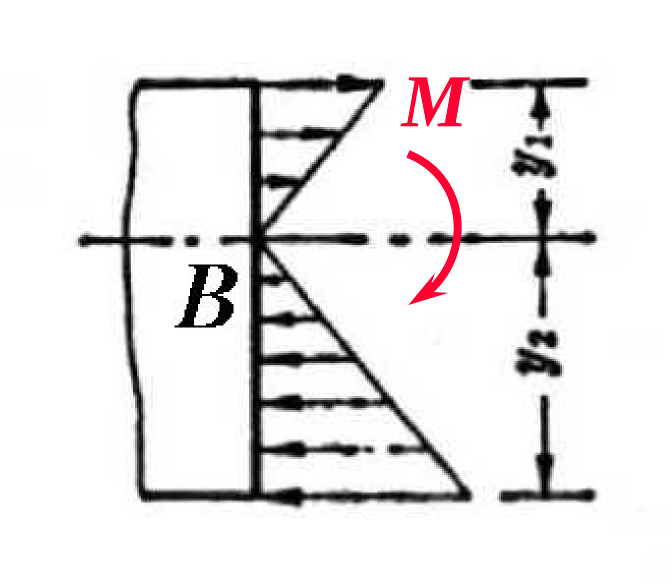
最大正弯矩为： $M_C = 2.5\ \mathrm{kN \cdot m}$

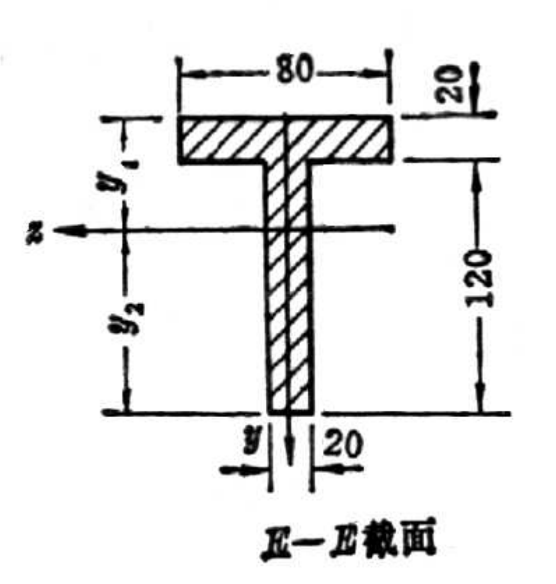
最大负弯矩为： $M_B = -4\ \mathrm{kN \cdot m}$

(2) 确定危险截面 ◆ B截面 ◆ C截面

(3) 强度校核

◆ B截面





$$\sigma_{1t} = \frac{M_B y_1}{I_z} = 27.2\ \mathrm{MPa} \prec [\sigma_t] = 30\ \mathrm{MPa}$$

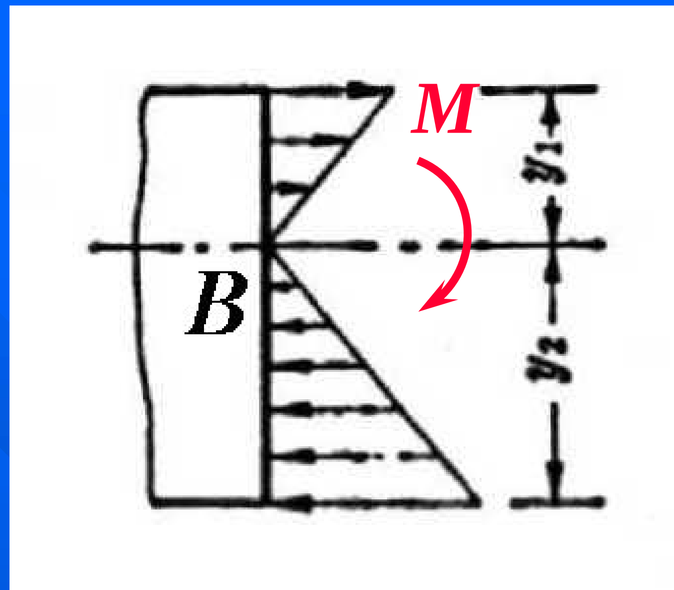
$$\sigma_{1c} = \frac{M_B y_2}{I_z} = 46.2\ \mathrm{MPa} \prec [\sigma_c] = 160\ \mathrm{MPa}$$

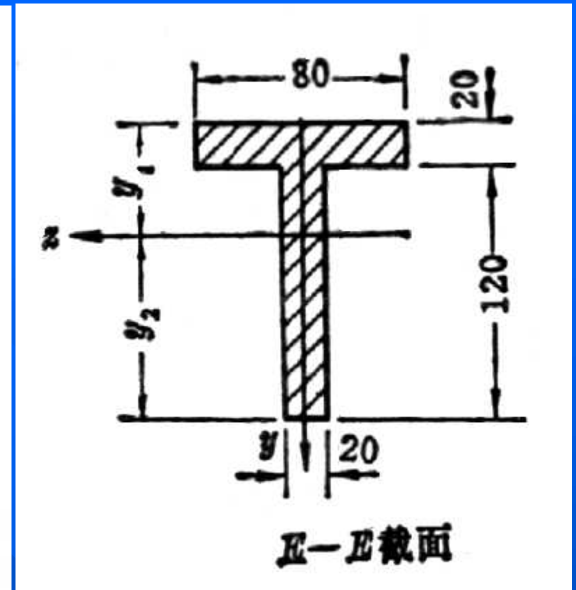
(3) 强度校核

- B截面

$$\sigma_{1t}=\frac{M_B y_1}{I_z}=27.2\ \mathrm{MPa}$$

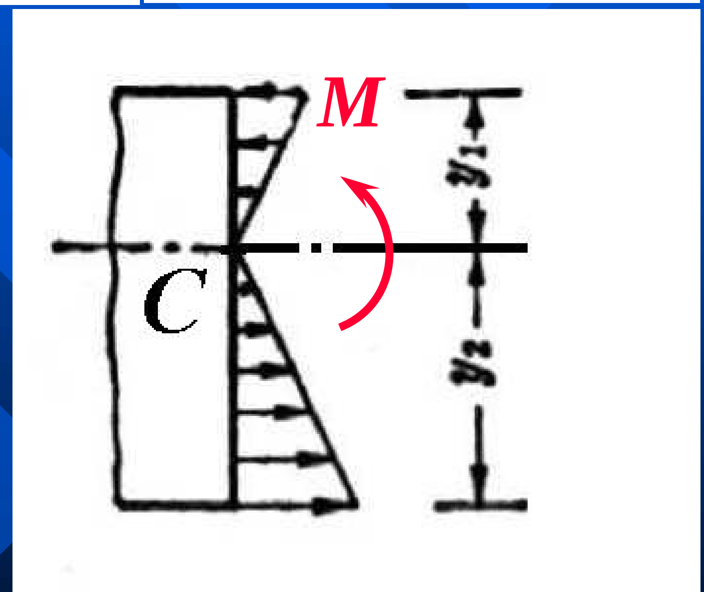
$$\sigma_{1c}=\frac{M_B y_2}{I_z}=46.2\ \mathrm{MPa}$$





- C截面　显然，$\sigma_{2c}<\sigma_{1c}$

$$\sigma_{2t}=\frac{M_C y_2}{I_z}=28.8\ \mathrm{MPa}\prec[\sigma_t]=30\ \mathrm{MPa}$$



- 结论　满足强度要求。

§5.4 弯曲切应力

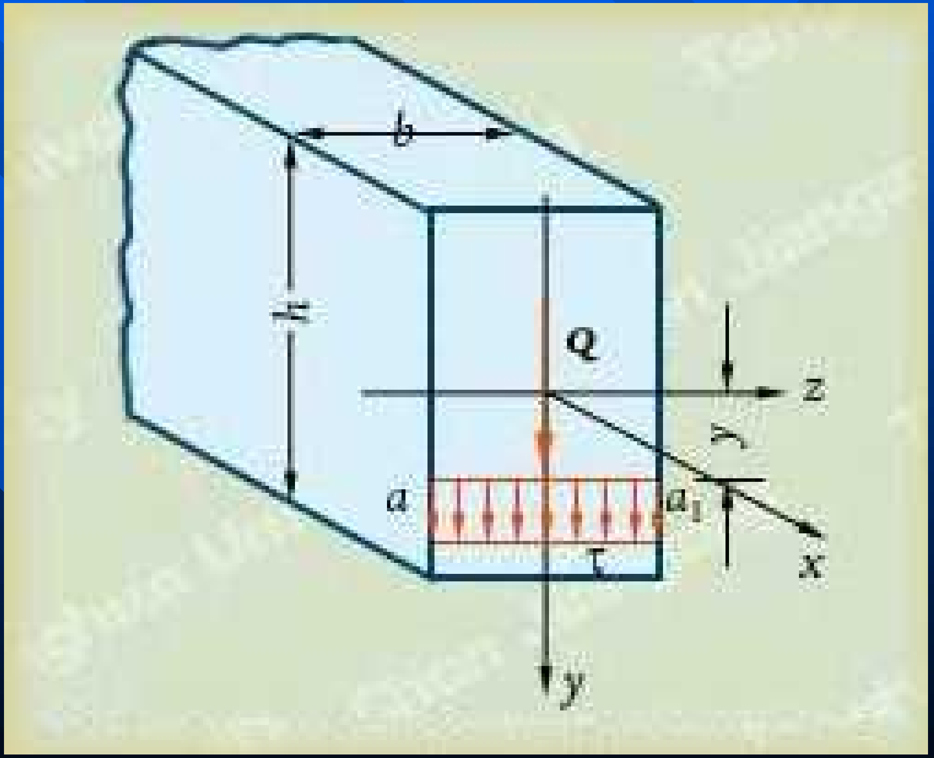
横力弯曲时,横截面上既有正应力,又有切应力。

推导切应力公式的方法:

假设切应力的分布规律，然后根据平衡条件求出切应力。

按截面形状，分别讨论。

1 矩形截面梁



- 切应力分布假设

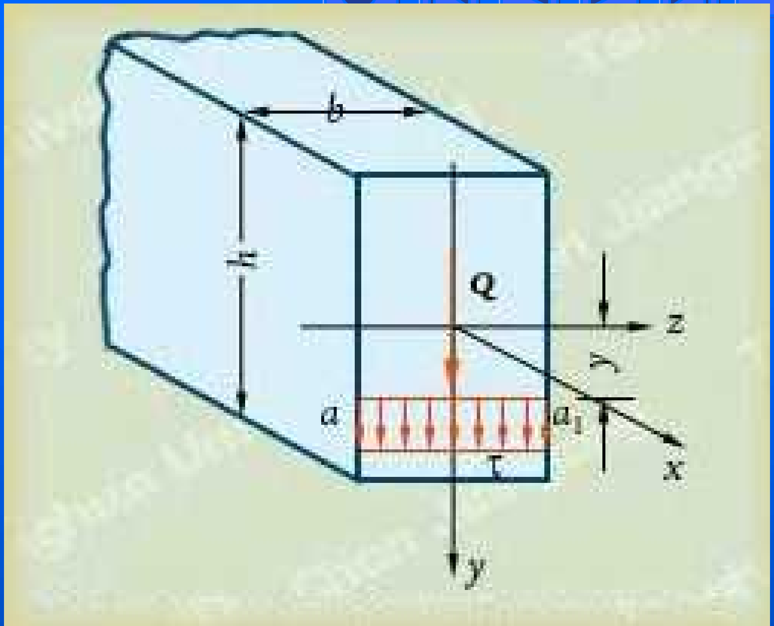
(1) 各点切应力方向平行于剪力Q;

1 矩形截面梁

- 切应力分布假设

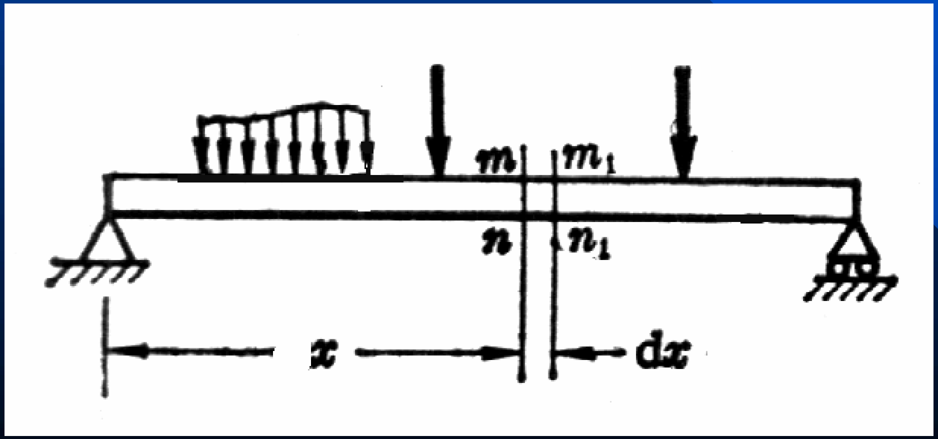
(1) 各点切应力方向平行于剪力Q;

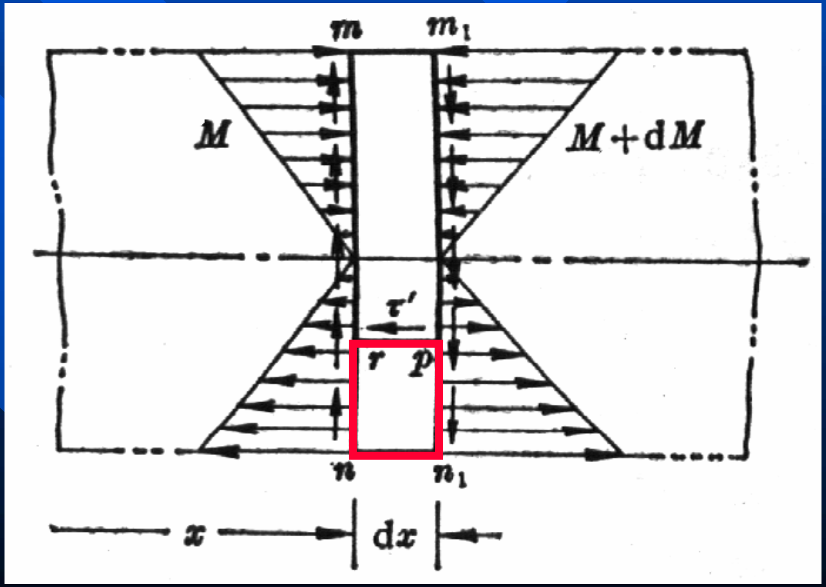
(2) 切应力沿宽度均匀分布。



- 用平衡条件导出切应力公式

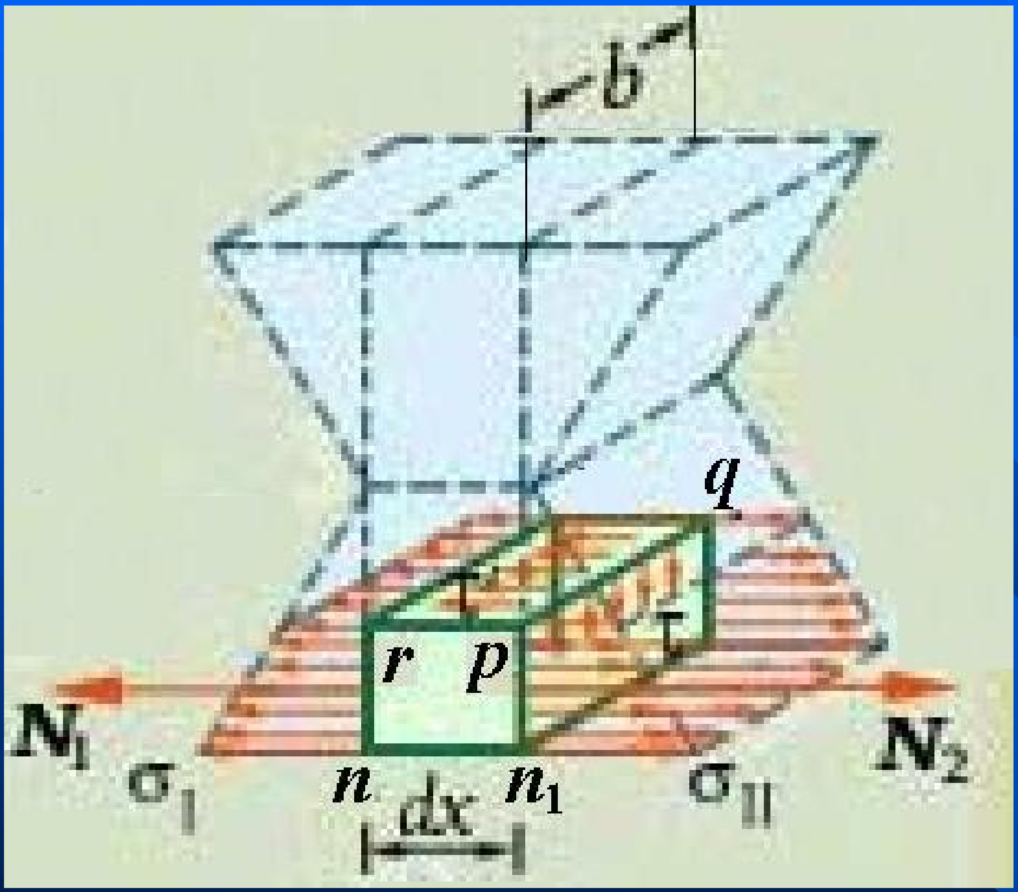
◆ 取研究对象

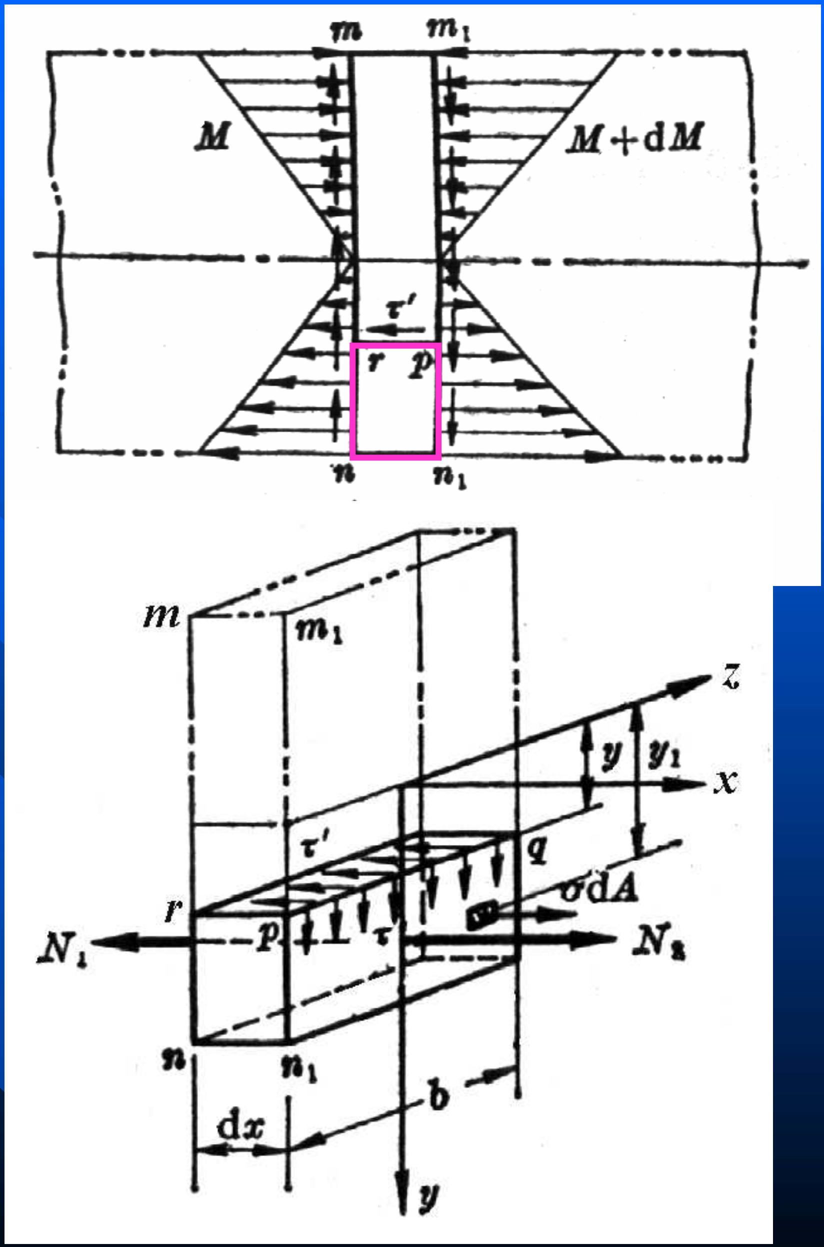




● 用平衡条件导出切应力公式

◆ 取研究对象





- 由切应力互等定理

$$\tau' = \tau$$

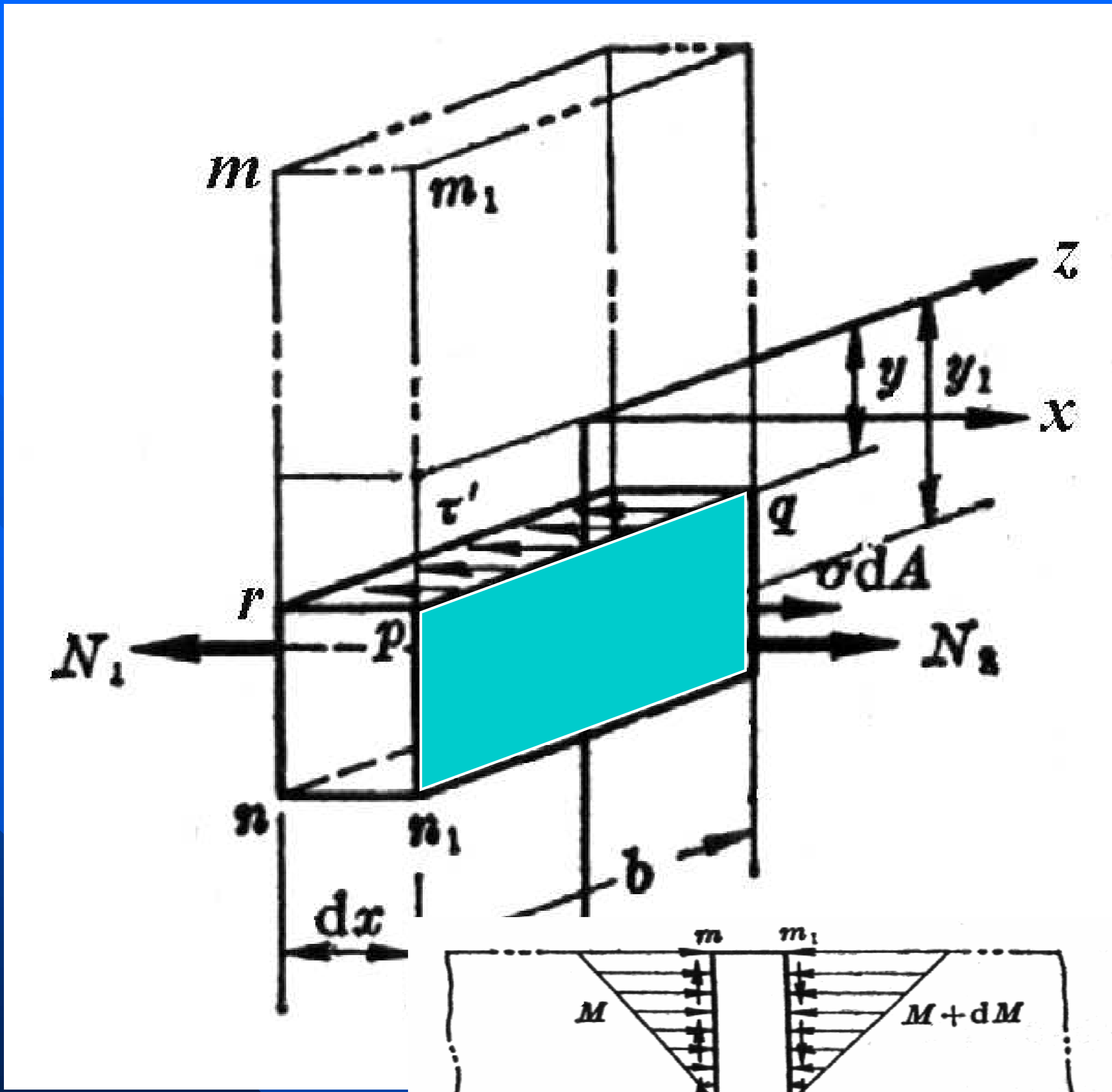
- 右截面上的N_2

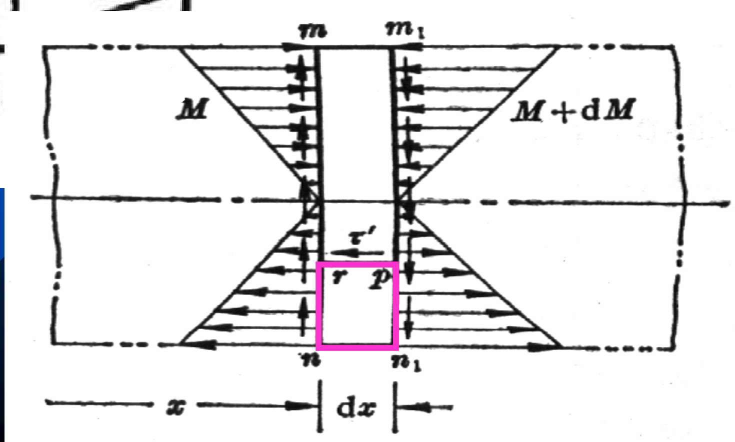
$$N_2 = \int_{A_1} \sigma \,\mathrm{d}A$$

A_1为右截面 pn_1的面积。

右截面正应力为:

$$\sigma = \frac{(M + \mathrm{d}M)y_1}{I_z}$$

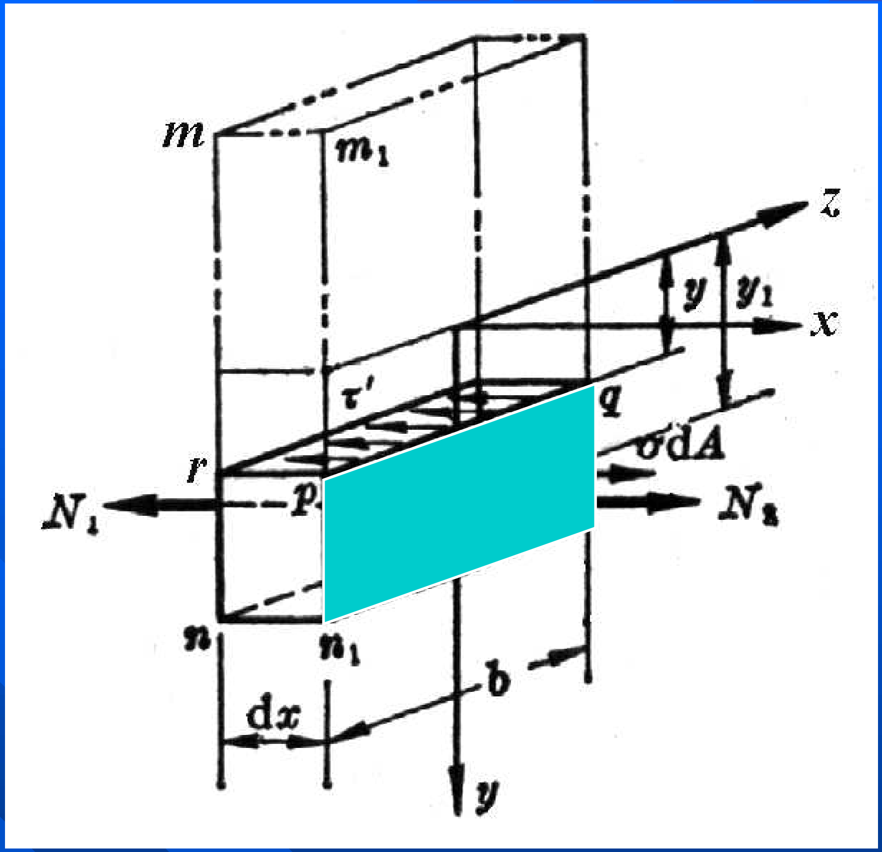




◆ 右截面上的N_2

$$N_2 = \int_{A_1} \sigma \, \mathrm{d}A$$

$$\sigma = \frac{(M + dM)y_1}{I_z}$$



$$\Longrightarrow N_2 = \int_{A_1} \frac{(M + \mathrm{d}M)y_1}{I_z} \mathrm{d}A$$

$$= \frac{(M + \mathrm{d}M)}{I_z} \int_{A_1} y_1 \, \mathrm{d}A = \frac{(M + \mathrm{d}M)}{I_z} S_z^*$$

其中：$S_z^* = \int_{A_1} y_1 \, \mathrm{d}A$

——y以下的面积对中性轴的静矩。

- 右截面上的N_2

$$N_2 = \frac{(M + \mathrm{d}M)}{I_z} S_z^*$$

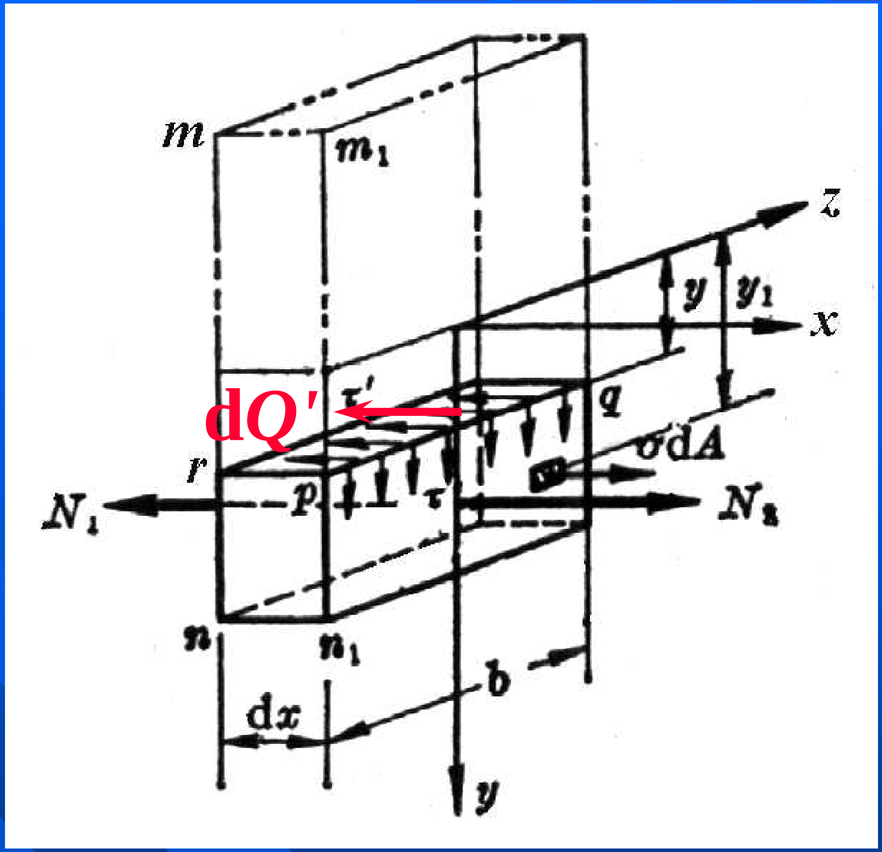
其中：$S_z^* = \int_{A_1} y_1 \, \mathrm{d}A$

- 左截面上的N_1

同理可得：$N_1 = \frac{M}{I_z} S_z^*$

- 上表面上的dQ'　　$\mathrm{d}Q' = \tau' b \, \mathrm{d}x$
- x方向平衡条件

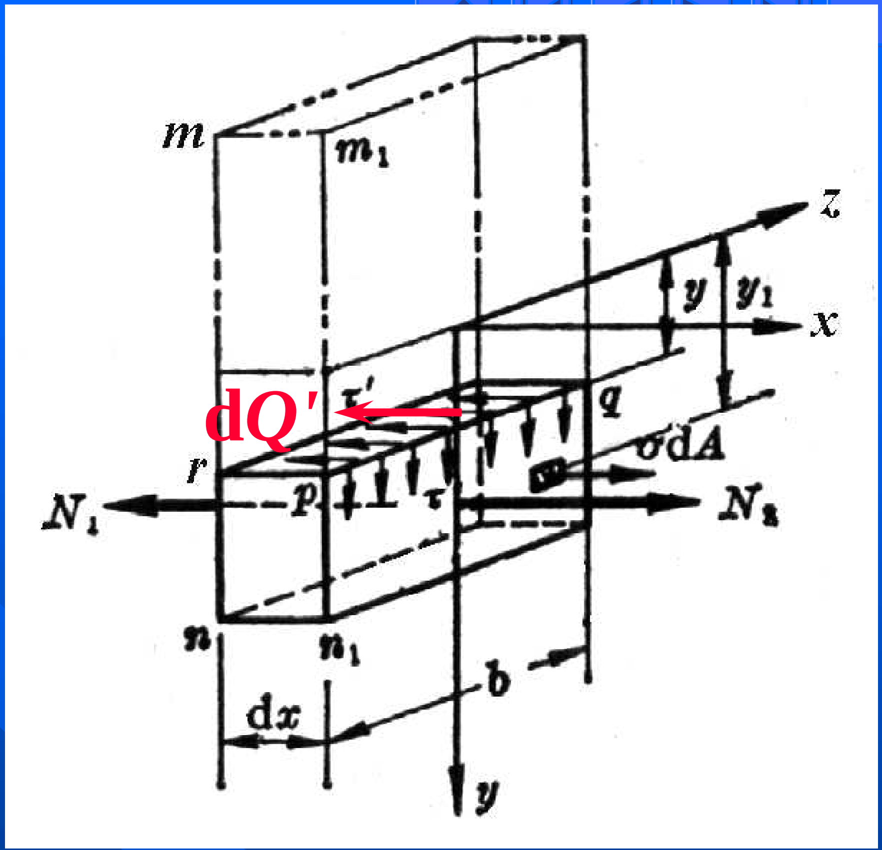
$$\sum X = 0 \qquad N_2 - N_1 - \mathrm{d}Q' = 0$$



$$N_2 = \frac{(M + \mathrm{d}M)}{I_z} S_z^*$$

$$N_1 = \frac{M}{I_z} S_z^*$$

$$\mathrm{d}Q' = \tau' b \,\mathrm{d}x$$



- x方向平衡条件

$$\sum X = 0 \quad N_2 - N_1 - \mathrm{d}Q' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(\cancel{M} + \mathrm{d}M)}{I_z} S_z^* - \cancel{\frac{M}{I_z} S_z^*} - \tau' b \,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}M}{I_z} S_z^* - \tau' b \,\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau' = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{S_z^*}{I_z b}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}M}{I_z} S_z^* - \tau' b \, \mathrm{d}x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tau' = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{S_z^*}{I_z b}$$

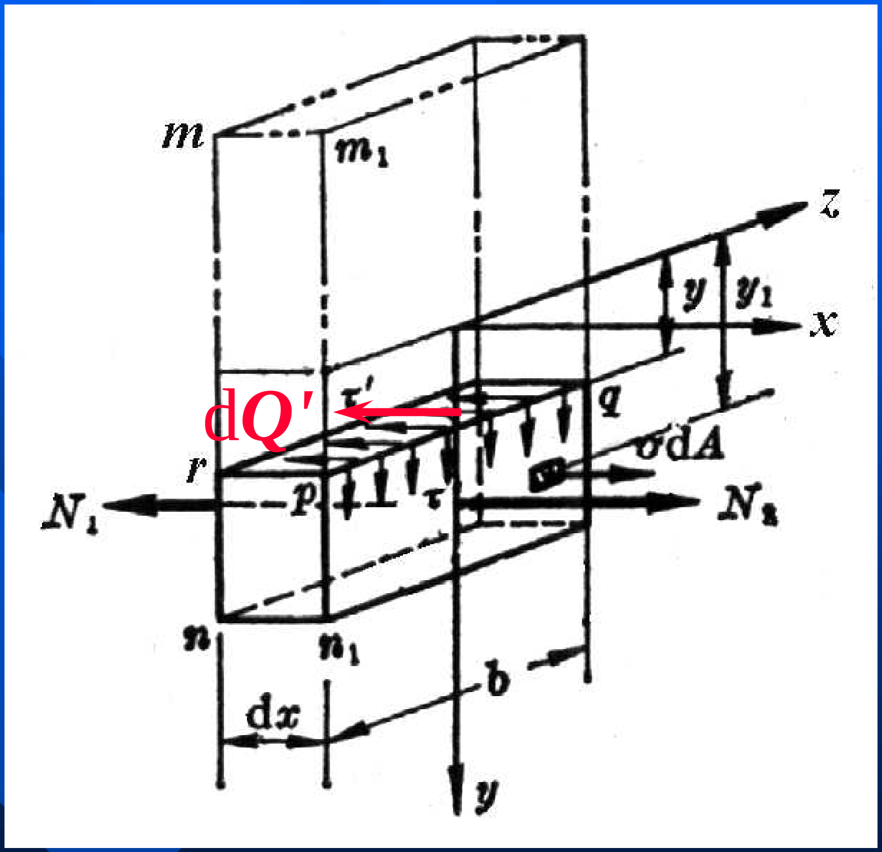
- 由微分关系 $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = Q$

$$\Longrightarrow \quad \tau' = \frac{QS_z^*}{I_z b}$$

- 由切应力互等定理，得

$$\boxed{\tau = \frac{QS_z^*}{I_z b}}$$

- 计算S_z^*

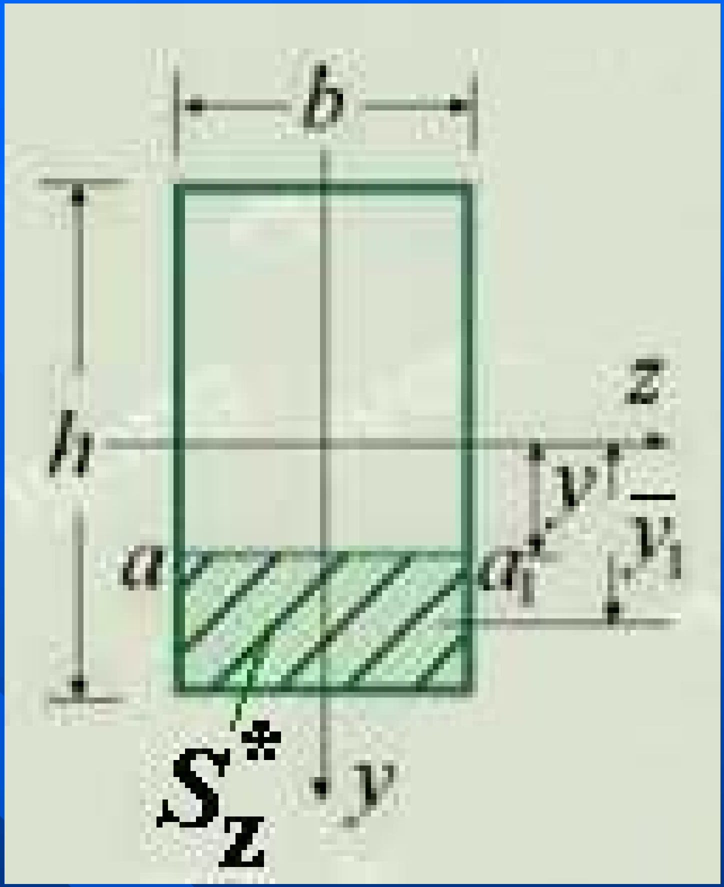


◆ 由切应力互等定理，得

$$\boxed{\tau = \frac{QS_z^*}{I_z b}}$$

◆ 计算S_z^*

可用公式 $S_z^* = A_1 \cdot \bar{y}_1$



$$S_z^* = b(\frac{h}{2} - y) \cdot [y + \frac{1}{2}(\frac{h}{2} - y)]$$

$$= b(\frac{h}{2} - y) \cdot \frac{1}{2}(\frac{h}{2} + y)$$

所以：

$$\Rightarrow \quad S_z^* = \frac{b}{2}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

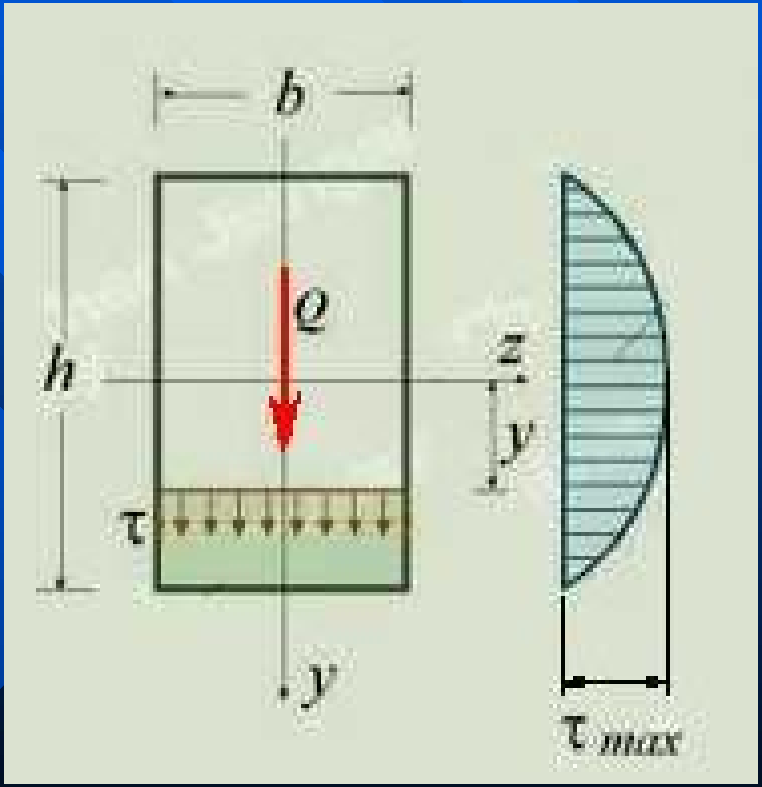
$$\tau = \frac{Q}{2I_z}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

$$\Longrightarrow \quad S_z^* = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

所以： $\tau = \dfrac{Q}{2I_z}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right)$ ——距中性层 y处的切应力公式

◆ 切应力分布

切应力沿截面高度按抛物线规律变化。



在上下边缘处 $\tau = 0$

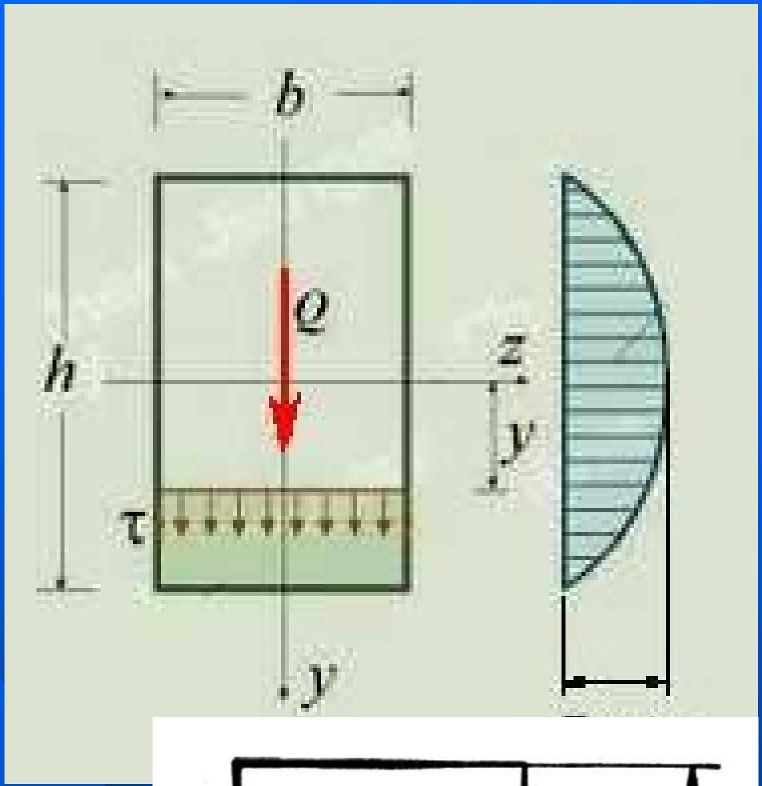
在中性层处 $\tau = \tau_{\max} = \dfrac{Qh^2}{8I_z}$

因为 $I_z = \dfrac{bh^3}{12} \Longrightarrow \tau_{\max} = \dfrac{3}{2}\dfrac{Q}{bh}$

在中性层处 $\tau = \tau_{\max} = \dfrac{Qh^2}{8I_z}$

因为 $I_z = \dfrac{bh^3}{12} \Longrightarrow \tau_{\max} = \dfrac{3}{2}\dfrac{Q}{bh}$

即：最大切应力是平均剪应力的1.5倍。

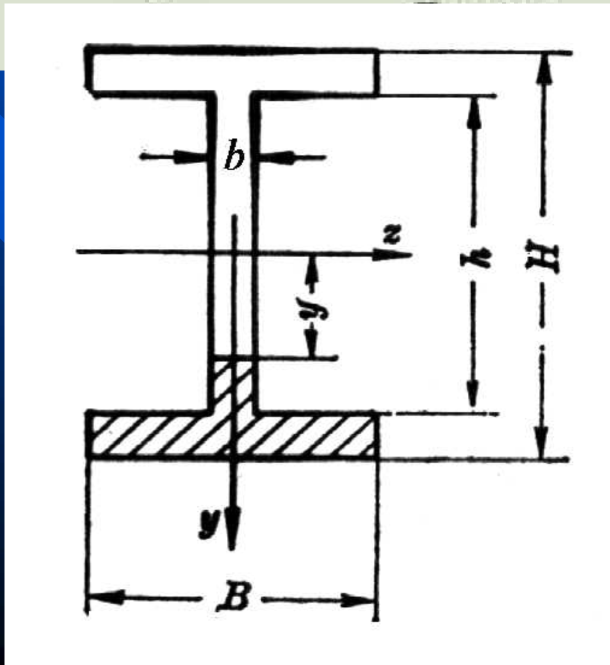


2 工字形截面梁

工字形截面梁由腹板和翼缘组成。

- 腹板的切应力

腹板是矩形，切应力公式同矩形截面梁。

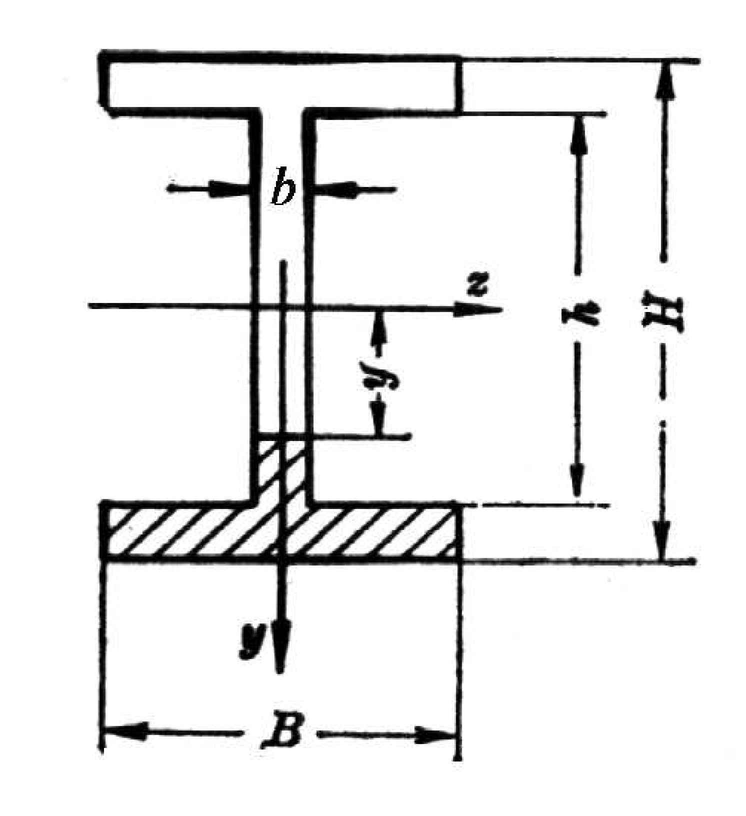


2 工字形截面梁

- 腹板的切应力

腹板是矩形，切应力公式同矩形截面梁:

$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z b}$$



- 计算S_z^*

$$S_z^* = B(\frac{H}{2} - \frac{h}{2}) \cdot [\frac{h}{2} + \frac{1}{2}(\frac{H}{2} - \frac{h}{2})]$$

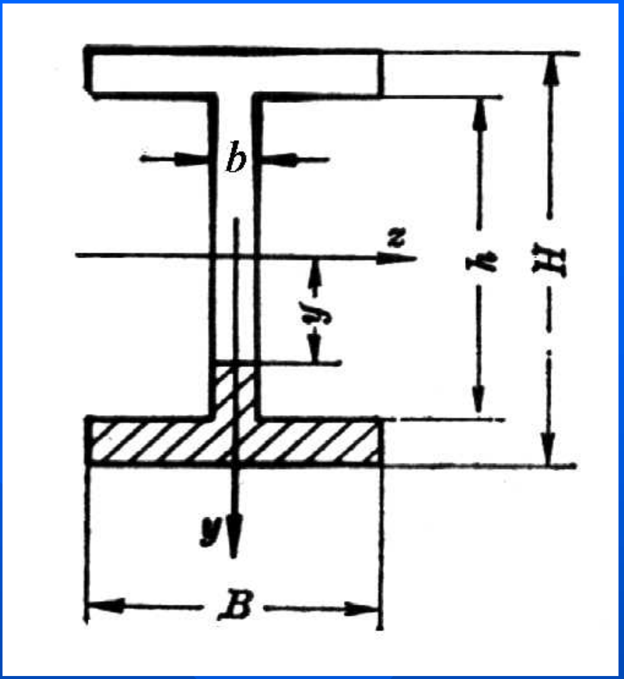
$$+ b(\frac{h}{2} - y) \cdot [y + \frac{1}{2}(\frac{h}{2} - y)]$$

◆ 计算S_z^*

$$S_z^* = B\left(\frac{H}{2}-\frac{h}{2}\right)\cdot\left[\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2}-\frac{h}{2}\right)\right]$$

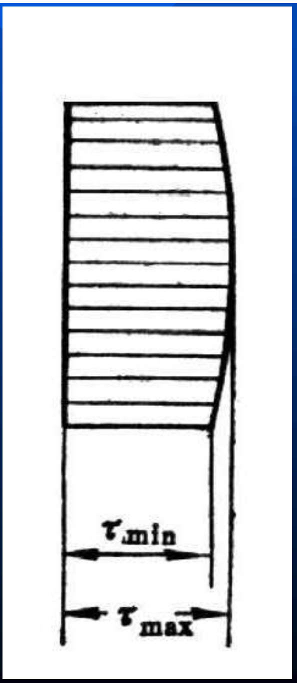
$$+b\left(\frac{h}{2}-y\right)\cdot\left[y+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}-y\right)\right]$$

$$=\frac{B}{8}(H^2-h^2)+\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$



则，距中性层 y处的切应力公式为:

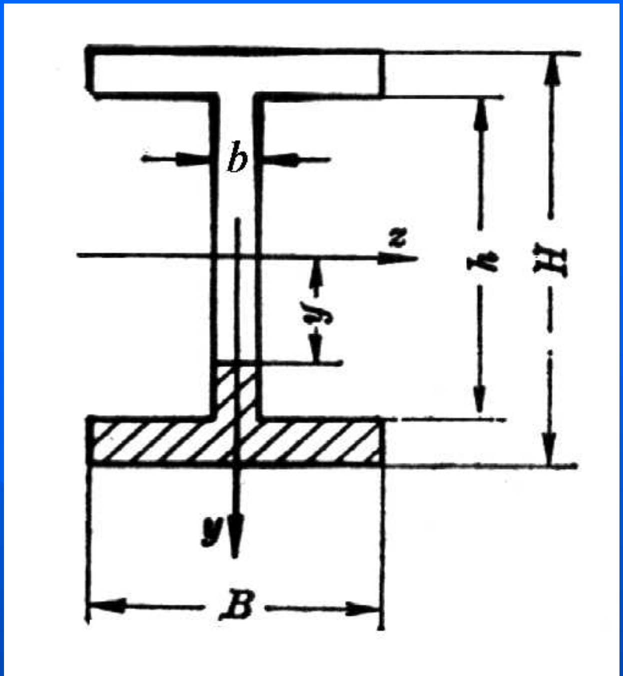
$$\tau=\frac{Q}{I_z b}\left[\frac{B}{8}(H^2-h^2)+\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\right]$$



切应力分布如图。

距中性层 y处的切应力公式为:

$$\tau = \frac{Q}{I_z b}\left[\frac{B}{8}(H^2 - h^2) + \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\right]$$



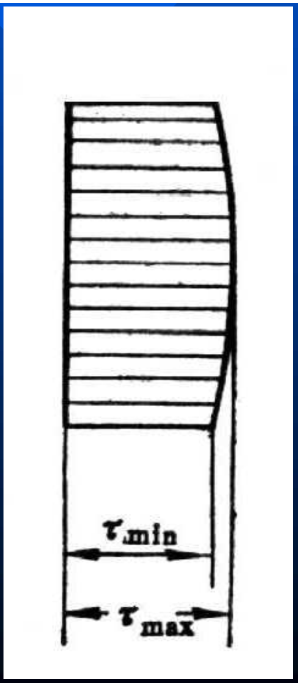
切应力分布如图。

- 最大切应力发生在<u>中性轴</u>处

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{I_z b}\left[\frac{BH^2}{8} - (B-b)\frac{h^2}{8}\right]$$

- 最小切应力发生在 $y=\pm h/2$ 处

$$\tau_{\min} = \frac{Q}{I_z b}\left(\frac{BH^2}{8} - \frac{Bh^2}{8}\right)$$

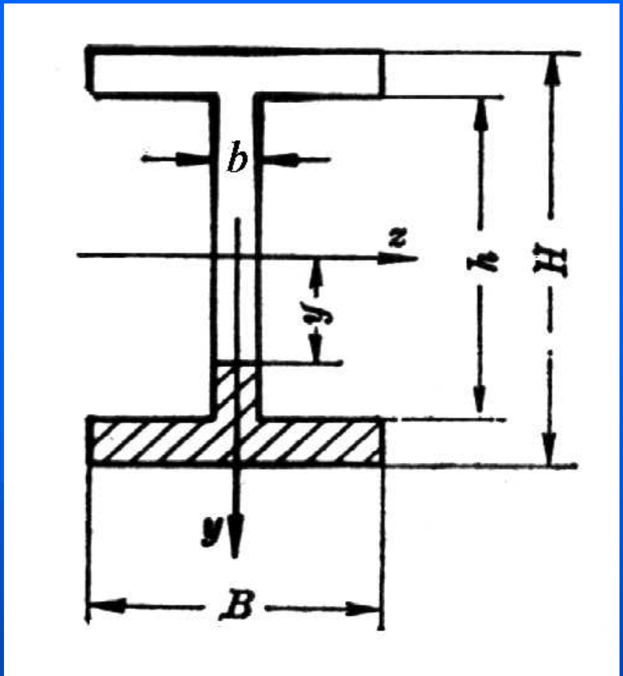


◆ 最大切应力发生在中性轴处

$$\tau_{\max}=\frac{Q}{I_z b}[\frac{BH^2}{8}-(B-b)\frac{h^2}{8}]$$

◆ 最小切应力发生在 $y=\pm h/2$ 处

$$\tau_{\min}=\frac{Q}{I_z b}(\frac{BH^2}{8}-\frac{Bh^2}{8})$$

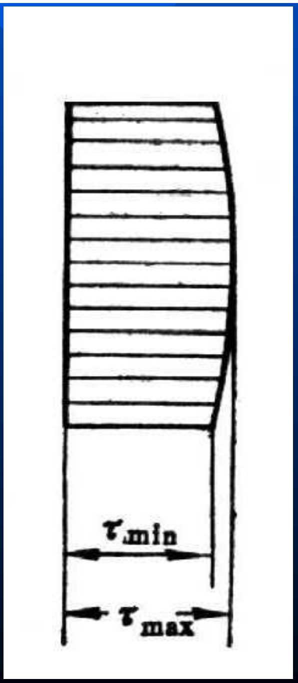


◆ 腹板切应力的近似公式

因为: (1)腹板切应力近似为均匀分布;

(2)腹板负担了绝大部分剪力。

近似公式:
$$\tau=\frac{Q}{hb}$$

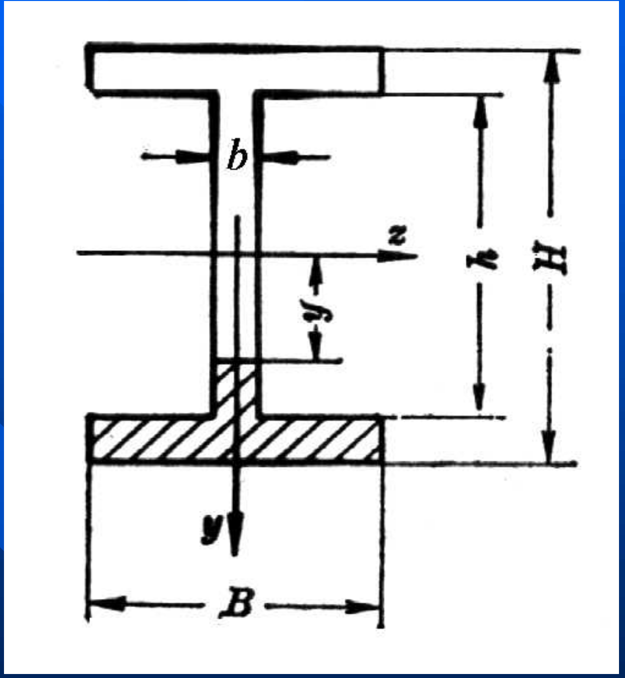


◆ 腹板切应力的近似公式

因为: (1)腹板切应力近似为均匀分布;

(2)腹板负担了绝大部分剪力。

近似公式: $$\tau = \frac{Q}{hb}$$



● 翼缘的切应力

◆ 特点

(1) 除了有平行于剪力Q的切应力分量外，还有与剪力Q垂直的切应力分量;

(2) 切应力数值与腹板的切应力相比较小。

3 圆形截面梁

- 切应力分布的特点

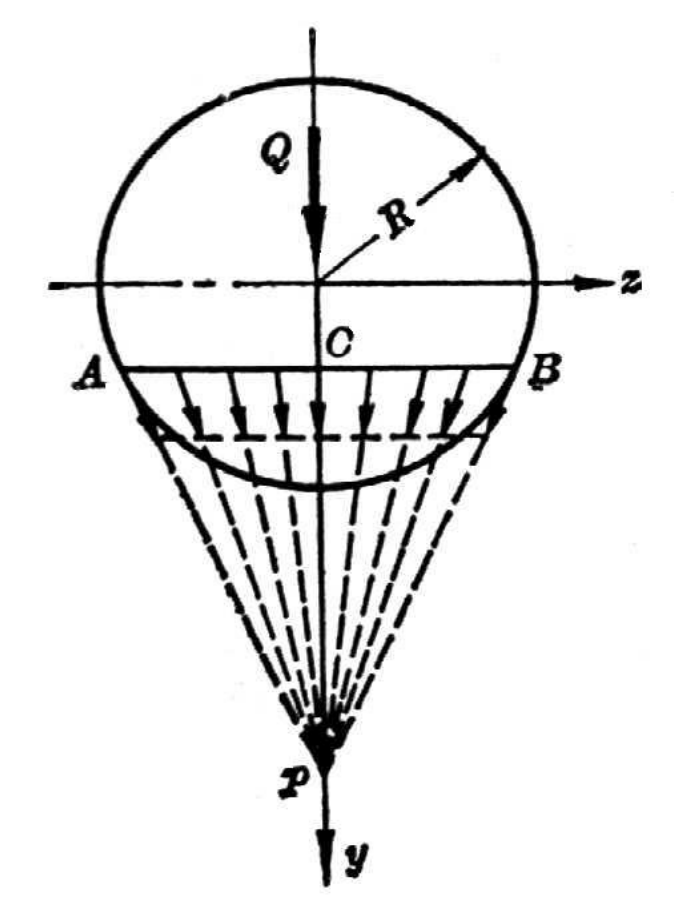
(1) 边缘各点的切应力与圆周相切；

(2) y轴上各点的切应力沿y轴。

- 假设

(1) AB弦上各点的切应力作用线通过同一点 p；

(2) AB弦上各点的切应力沿 y轴的分量 τ_y相等。



所以，对τ_y可用矩形截面梁的公式 $\tau_y = \dfrac{QS_z^*}{I_z b}$

所以，对τ_y可用矩形截面梁的

公式 $$\tau_y = \frac{QS_z^*}{I_z b}$$

式中，b为AB弦的长度，$S_z{}^*$为AB弦以外的面积对z轴的静矩。

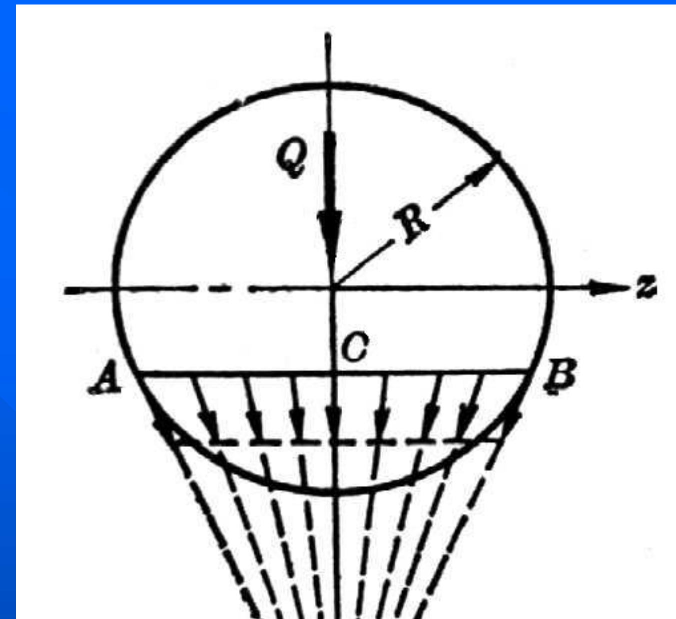
- 最大切应力

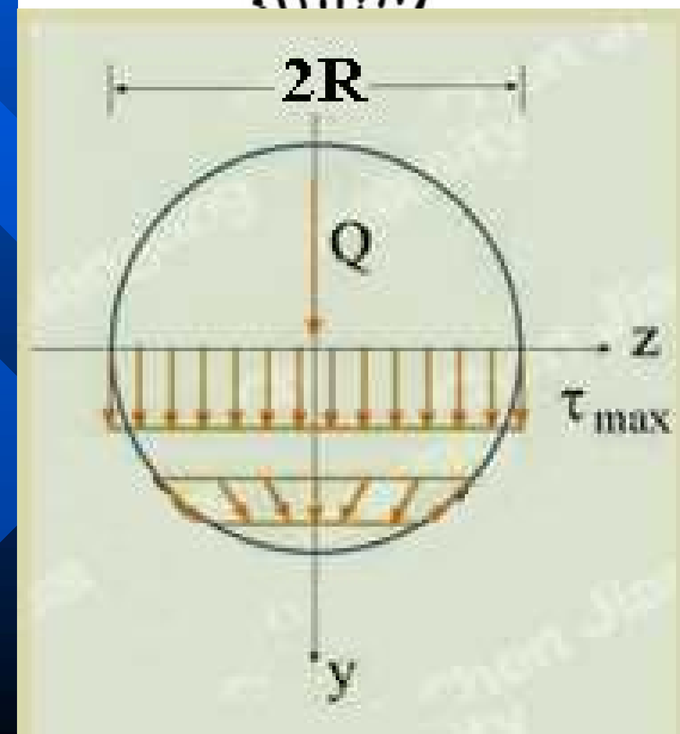
最大切应力发生在中性轴上。

中性轴上的切应力的方向？

中性轴处 $b = 2R$

$$S_z^* = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot \frac{4R}{3\pi} \Longrightarrow S_z^* = \frac{2}{3}R^3$$





$$\tau_y = \frac{QS_z^*}{I_z b}$$

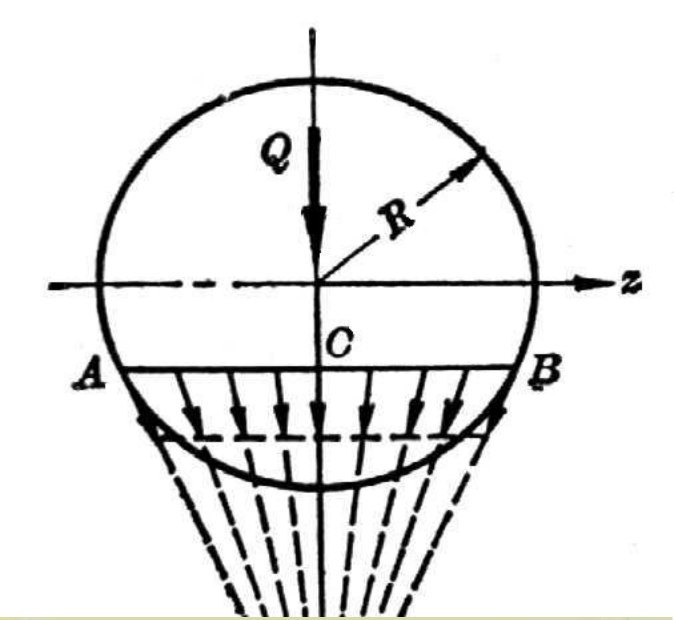
中性轴处　　$b = 2R$

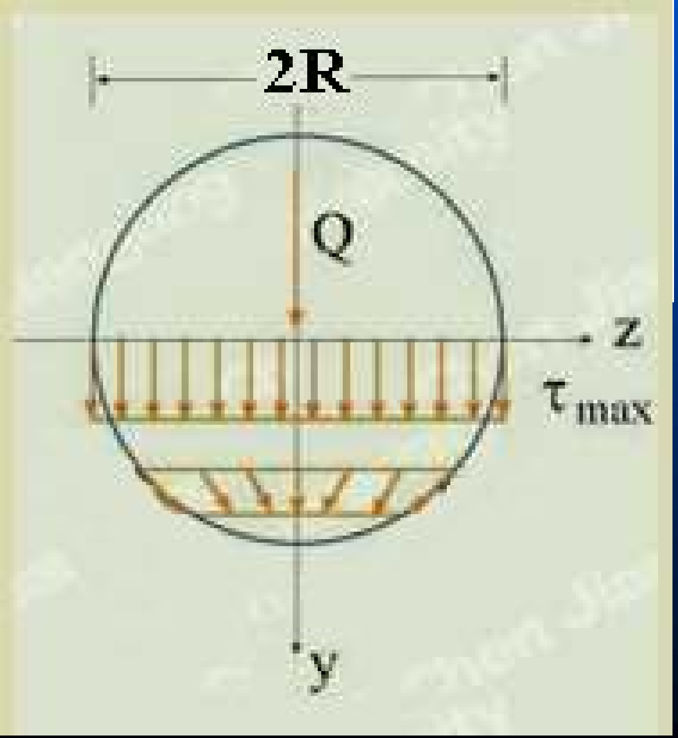
$$S_z^* = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot \frac{4R}{3\pi} \Rightarrow S_z^* = \frac{2}{3}R^3$$

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi R^2}$$

最大切应力是平均切应力的1.33倍。

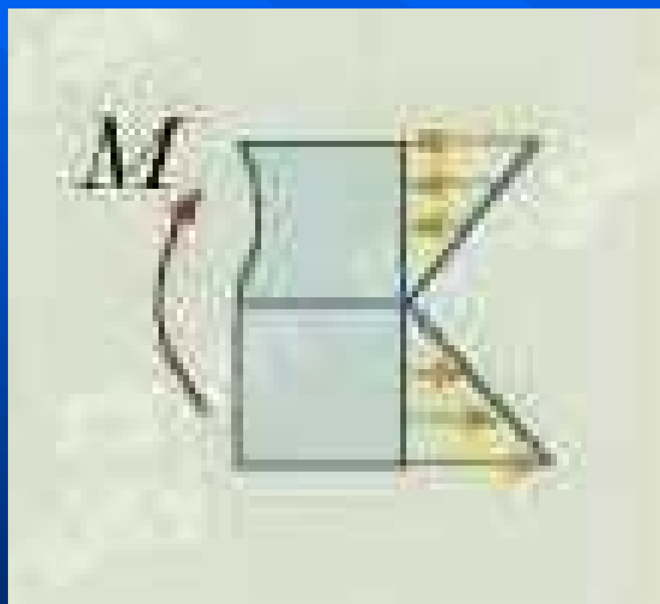


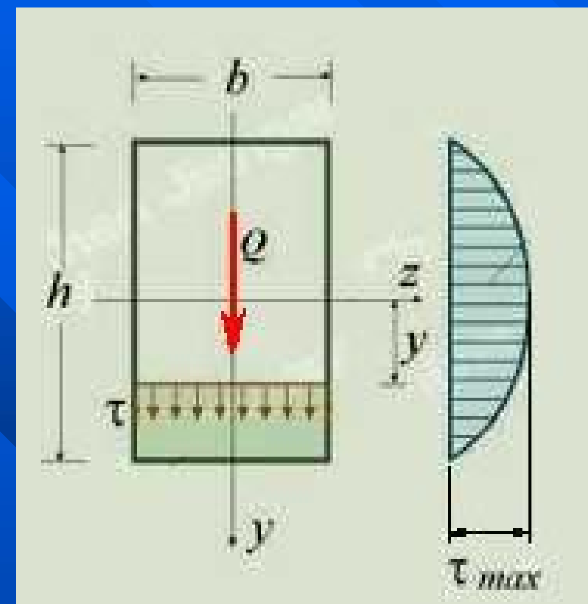


4 弯曲切应力强度条件

- 强度条件

弯曲时横截面上正应力和切应力的分布为：





正应力最大处，切应力为零，是单向拉压状态；
切应力最大处，正应力为零，是纯剪切状态。

正应力最大处，切应力为零，是单向拉压状态；
切应力最大处，正应力为零，是纯剪切状态。

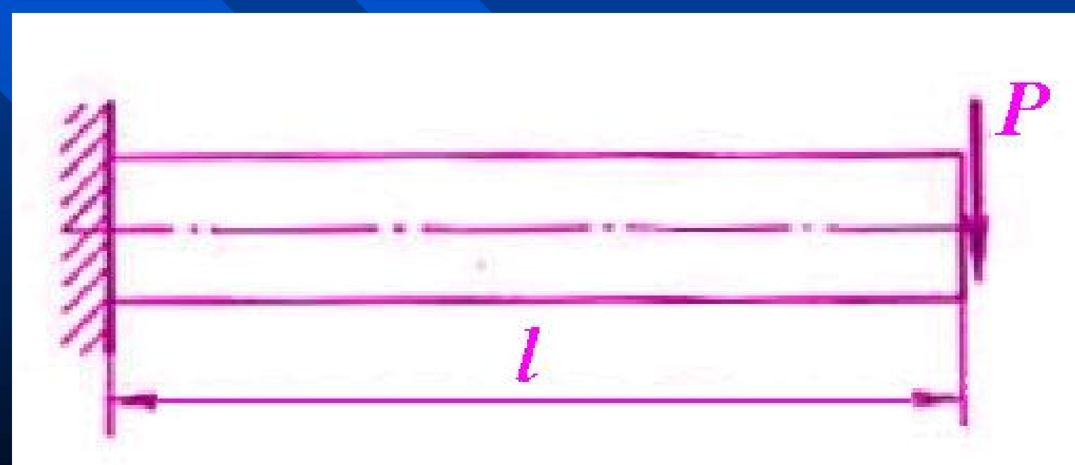
弯曲切应力强度条件为

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S^*_{z\max}}{I_z b} \leq [\tau]$$

- 实心截面梁正应力与切应力的比较

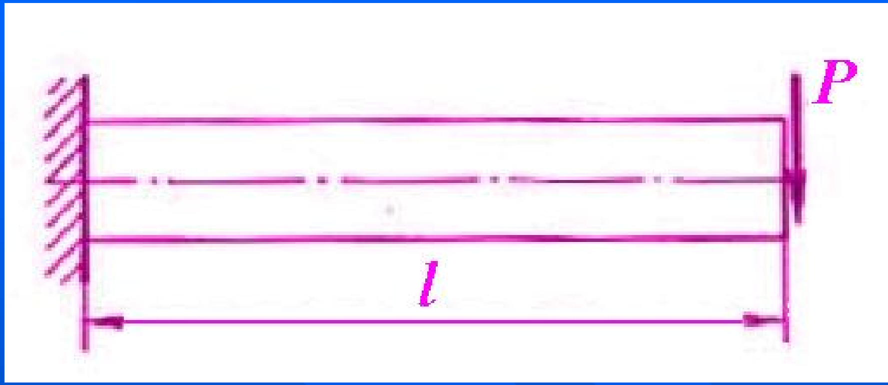
$$\sigma_{\max} = \frac{Pl}{W_z}$$

$$\tau_{\max} = \frac{PS^*_z}{I_z b}$$



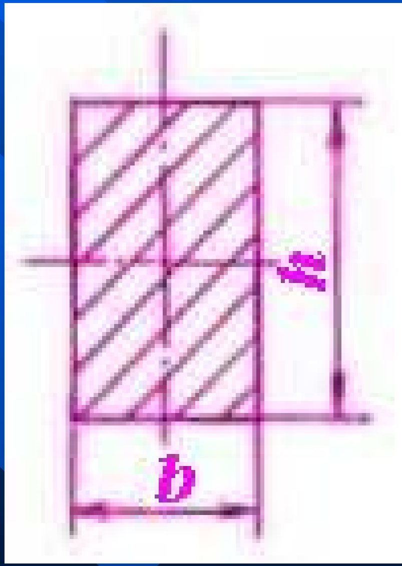
- 实心截面梁正应力与切应力的比较

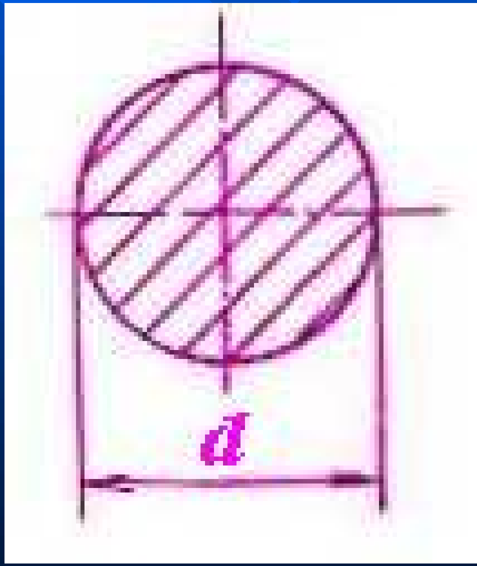
$$\sigma_{\max} = \frac{Pl}{W_z}, \quad \tau_{\max} = \frac{PS_z^*}{I_z b}$$



- 对矩形截面梁

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 4\frac{l}{h}$$





- 对圆形截面梁

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 6\frac{l}{d}$$

- 对矩形截面梁 $$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 4\frac{l}{h}$$
- 对圆形截面梁 $$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 6\frac{l}{d}$$

所以，对实心截面梁通常不需要校核剪切强度。

- 需要校核剪切强度几种情况

(1) 弯矩较小而剪力很大的情况：短粗梁，或在支座附近作用有较大的集中力；

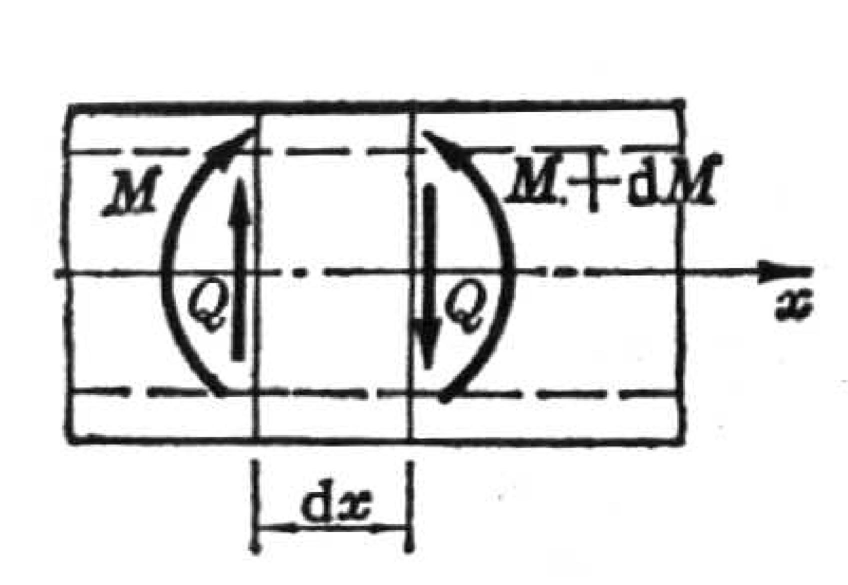
(2) 非标准的腹板较高且较薄的工字梁；

(3) 梁上的焊缝、铆钉或胶合面。

例 1（书例5.4)

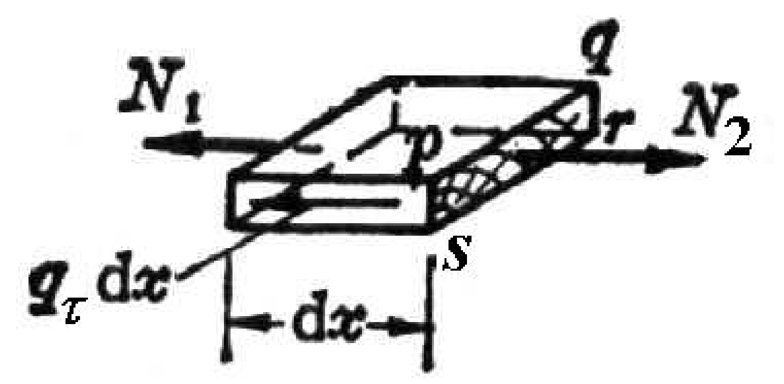
已知：由木板胶合而成的梁。

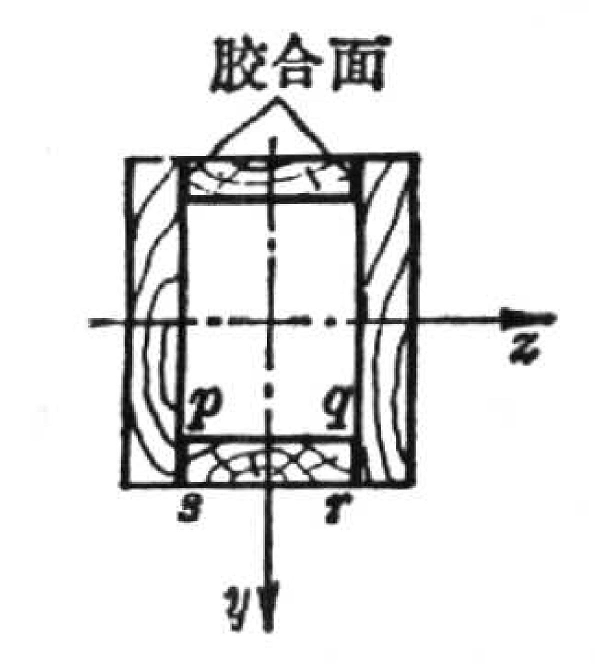
求：胶合面上沿x方向单位长度的剪力。



解：无法直接用公式。

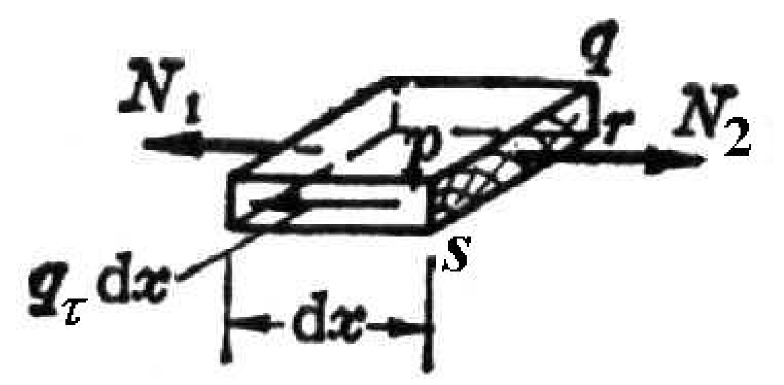
取一微段：

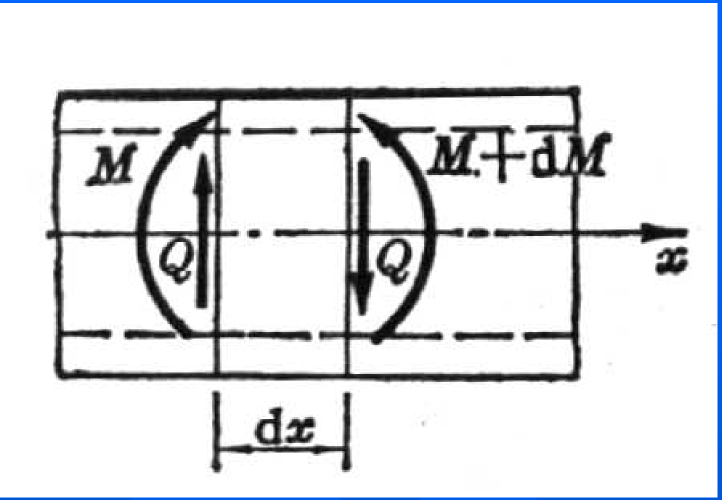


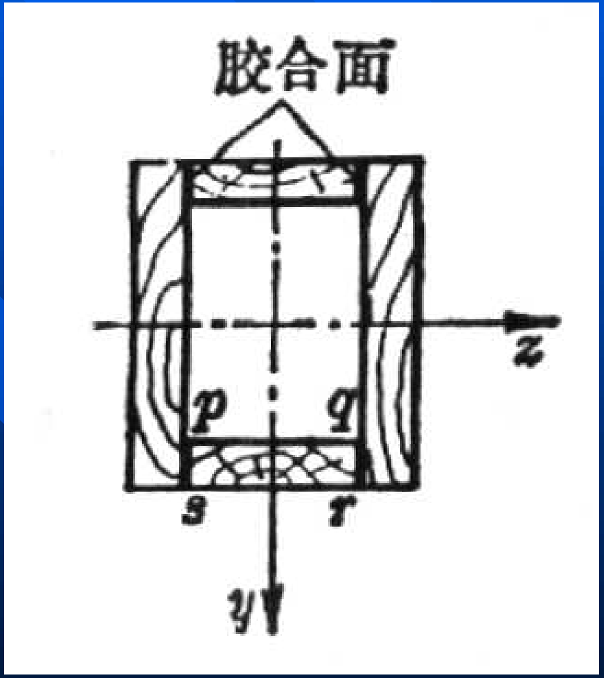


与推导剪应力公式的方法相同，有

取一微段：







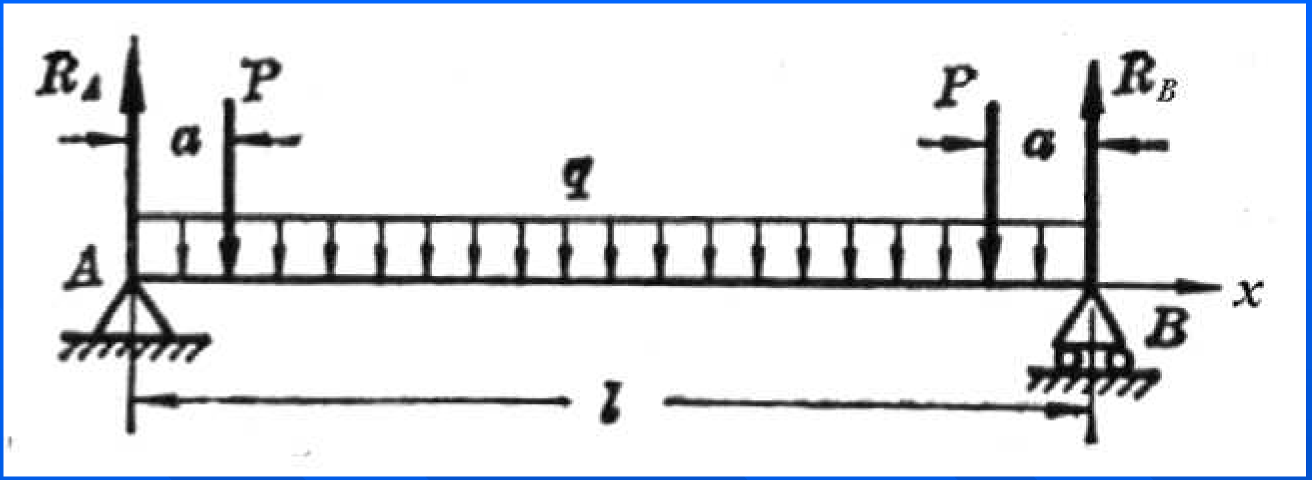
与推导切应力公式相同，有

$$N_1=\frac{M}{I_z}S_z^*,\quad N_2=\frac{(M+\mathrm{d}M)}{I_z}S_z^*$$

$$\sum X=0\qquad N_2-N_1-2q_\tau\,\mathrm{d}x=0$$

$$\Rightarrow\qquad q_\tau=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\frac{S_z^*}{I_z}=\frac{1}{2}\frac{QS_z^*}{I_z}$$

例 2 (书例5.5)



已知：l =2m，a=0.2m，q=10 kN/m，P =200 kN，$[\sigma]$=160 MPa，$[\tau]$=100MPa。

求：选择工字钢型号 。

解：(1) 求剪力图和弯矩图

- 支反力 $R_A = 210\,\text{kN}$，$R_B = 210\,\text{kN}$
- 作出剪力图和弯矩图

◆ 作出剪力图和弯矩图

最大弯矩

$$M_{max} = 45\,\mathrm{kN \cdot m}$$

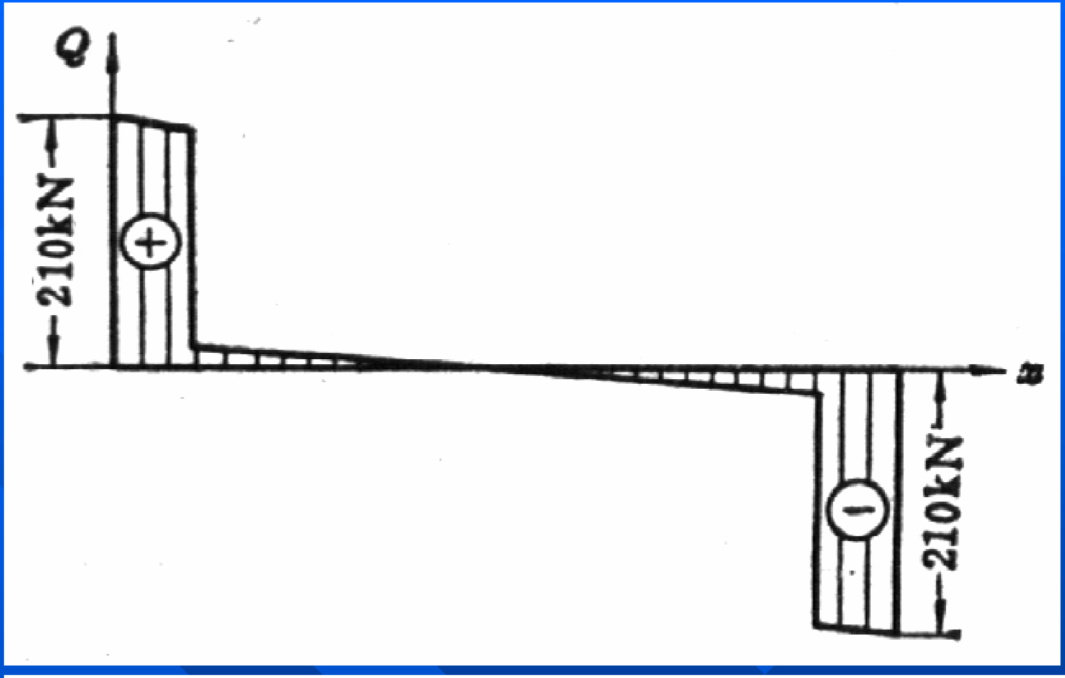
最大剪力

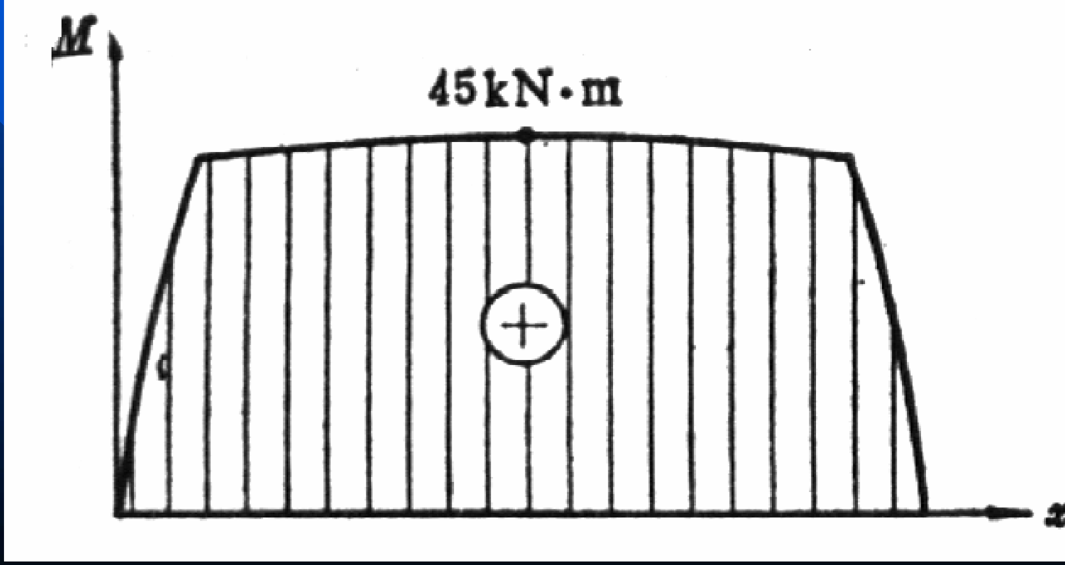
$$Q_{max} = 210\,\mathrm{kN}$$

◆ 先根据最大弯矩选择工字钢型号

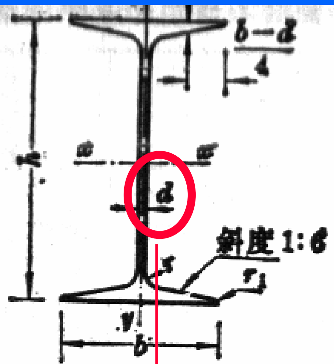
$$W_z = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = 281\,\mathrm{cm}^3$$

◆ 查型钢表(p. 416)





◆ 查型钢表(p. 416) $W_z = 281\text{cm}^3$



符号意义:

h——高度；
b——腿宽度；
d——腰厚度；
t——平均腿厚度；
r——内圆弧半径；
r_1——腿端圆弧半径；
I——惯性矩；
W——截面系数；
i——惯性半径；
S——半截面的静力矩。

$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z b}$$

单位为：cm

型号	尺寸mm						截面面积 cm^2	理论重量 kg/m	参考数值						
									x-x				y-y		
	h	b	d	t	r	r_1			I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	$I_x:S_x$	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm
10	100	68	4.5	7.6	6.5	3.3	14.345	11.261	245	49.0	4.14	8.59	33.0	9.72	1.52
12.6	126	74	5.0	8.4	7.0	3.5	18.118	14.223	488	77.5	5.20	10.8	46.9	12.7	1.61
14	140	80	5.5	9.1	7.5	3.8	21.516	16.890	712	102	5.76	12.0	64.4	16.1	1.73
16	160	88	6.0	9.9	8.0	4.0	26.131	20.513	1130	141	6.58	13.8	93.1	21.2	1.89
18	180	94	6.5	10.7	8.5	4.3	30.756	24.143	1660	185	7.36	15.4	122	26.0	2.00
20a	200	100	7.0	11.4	9.0	4.5	35.578	27.929	2370	237	8.15	17.2	158	31.5	2.12
20b	200	102	9.0	11.4	9.0	4.5	39.578	31.069	2500	250	7.96	16.9	169	33.1	2.06
22a	220	110	7.5	12.3	9.5	4.8	42.128	33.070	3400	309	8.99	18.9	225	40.9	2.31
22b	220	112	9.5	12.3	9.5	4.8	46.528	36.524	3570	325	8.78	18.7	239	42.7	2.27
25a	250	116	8.0	13.0	10.0	5.0	48.541	38.105	5020	402	10.2	21.6	280	48.3	2.40
25b	250	118	10.0	13.0	10.0	5.0	53.541	42.030	5280	423	9.94	21.3	309	52.4	2.40

- 查型钢表(p. 416)　　$W_z = 281\,\text{cm}^3$
- 选22a工字钢

查型钢表得，对22a工字钢：

$$W_z = 309\,\text{cm}^3, \quad \frac{I_z}{S_z^*} = 18.9\ \text{cm}$$

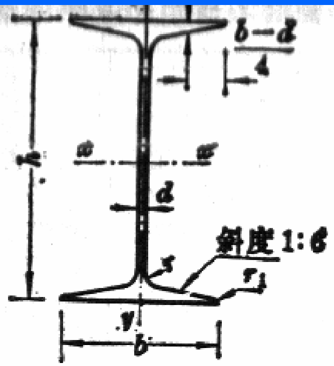
腹板厚度：$b = d = 0.75\,\text{cm}$

- 校核剪切强度

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z^*}{I_z b} = 148\ \text{MPa} \succ [\tau] = 100\ \text{MPa}$$

所以，选22a工字钢，剪切强度不够，需重选。

所以，选22a工字钢，剪切强度不够，需重选。



符号意义：

h——高度；
b——腿宽度；
d——腰厚度；
t——平均腿厚度；
r——内圆弧半径；
r_1——腿端圆弧半径；
I——惯性矩；
W——截面系数；
i——惯性半径；
S——半截面的静力矩。

型号	尺寸mm						截面面积 cm²	理论重量 kg/m	参考数值						
									x-x				y-y		
	h	b	d	t	r	r_1			I_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	$I_x:S_x$	I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm
10	100	68	4.5	7.6	6.5	3.3	14.345	11.261	245	49.0	4.14	8.59	33.0	9.72	1.52
12.6	126	74	5.0	8.4	7.0	3.5	18.118	14.223	488	77.5	5.20	10.8	46.9	12.7	1.61
14	140	80	5.5	9.1	7.5	3.8	21.516	16.890	712	102	5.76	12.0	64.4	16.1	1.73
16	160	88	6.0	9.9	8.0	4.0	26.131	20.513	1130	141	6.58	13.8	93.1	21.2	1.89
18	180	94	6.5	10.7	8.5	4.3	30.756	24.143	1660	185	7.36	15.4	122	26.0	2.00
20a	200	100	7.0	11.4	9.0	4.5	35.578	27.929	2370	237	8.15	17.2	158	31.5	2.12
20b	200	102	9.0	11.4	9.0	4.5	39.578	31.069	2500	250	7.96	16.9	169	33.1	2.06
22a	220	110	7.5	12.3	9.5	4.8	42.128	33.070	3400	309	8.99	18.9	225	40.9	2.31
22b	220	112	9.5	12.3	9.5	4.8	46.528	36.524	3570	325	8.78	18.7	239	42.7	2.27
25a	250	116	8.0	13.0	10.0	5.0	48.541	38.105	5020	402	10.2	21.6	280	48.3	2.40
25b	250	118	10.0	13.0	10.0	5.0	53.541	42.030	5280	423	9.94	21.3	309	52.4	2.40

- 查型钢表(p. 416)，重选25*b*工字钢:

$$W_z = 423\,\text{cm}^3,\quad \frac{I_z}{S_z^*} = 21.3\,\text{cm},\quad b = d = 1.0\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow\quad \tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z^*}{I_z b} = 98.6\,\text{MPa} \prec [\tau] = 100\,\text{MPa}$$

所以，选25*b*工字钢可同时满足正应力和切应力强度条件。

注：若选25*a*工字钢，则：$\tau_{\max} = 121.5\,\text{MPa}$

§5.6 提高弯曲强度的措施

弯曲正应力是控制梁的强度的主要因素。

弯曲正应力强度为：

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}\leq[\sigma]$$

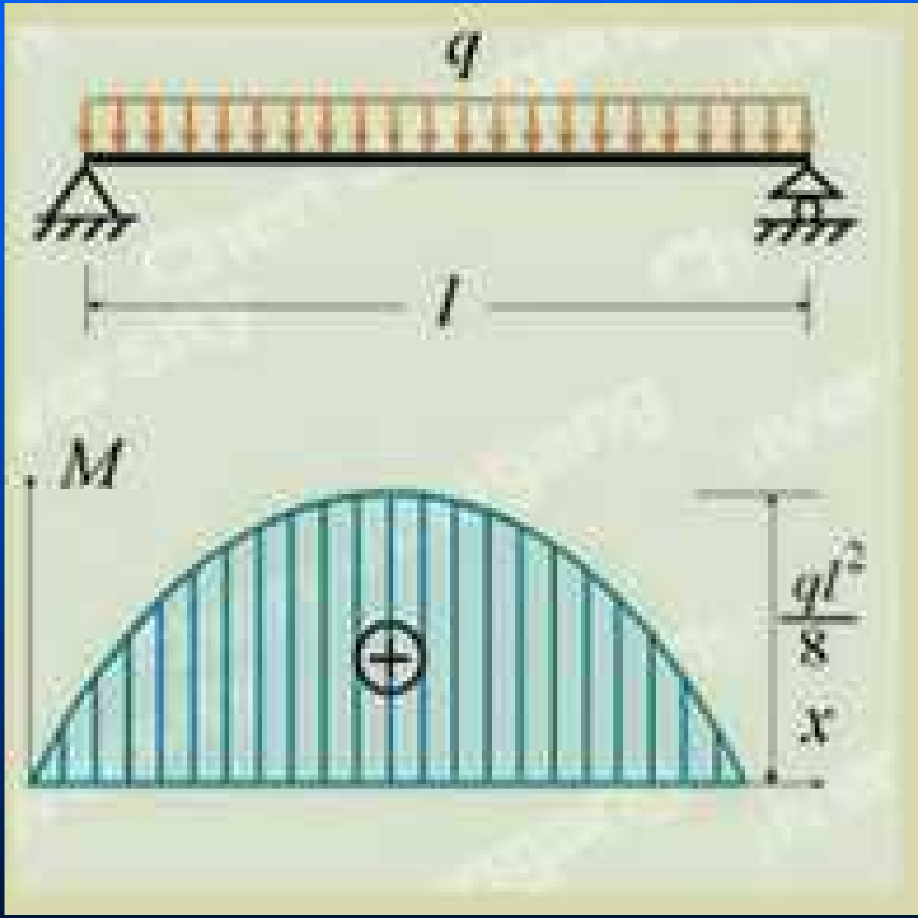
从上式可知，要提高梁的弯曲强度，应减小最大弯矩$M_{\max}$和提高抗弯截面系数W。

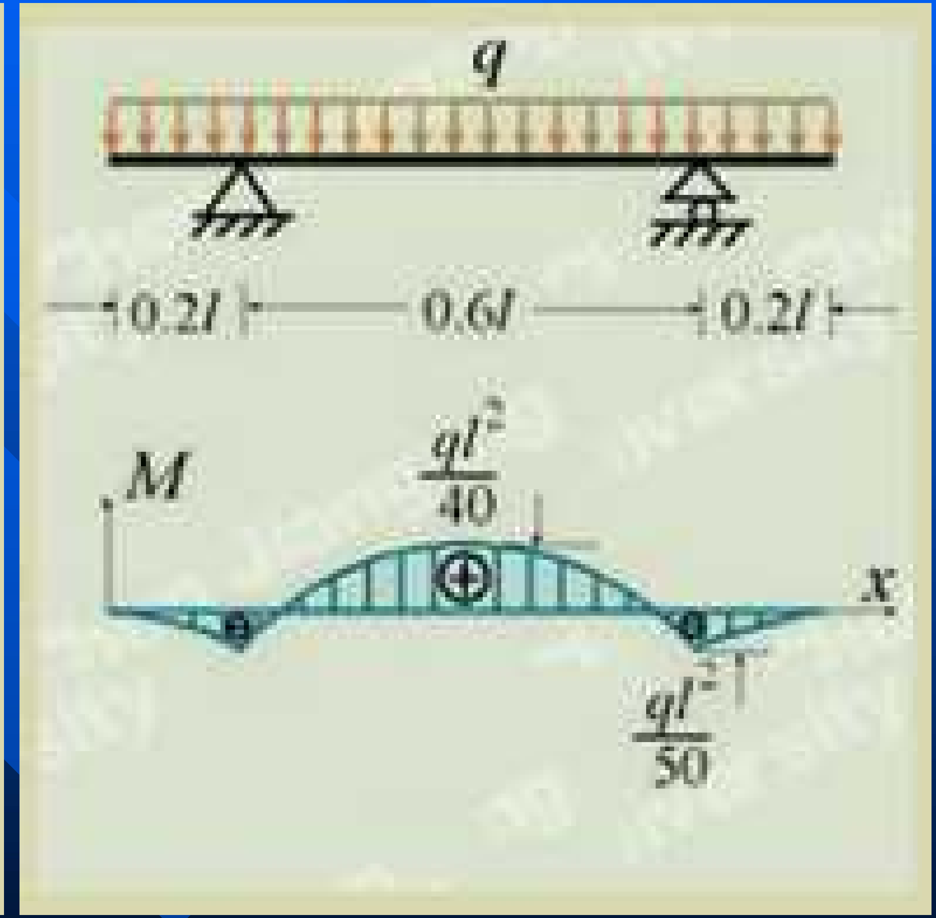
1 减小最大弯矩

(1) 合理布置支座的位置

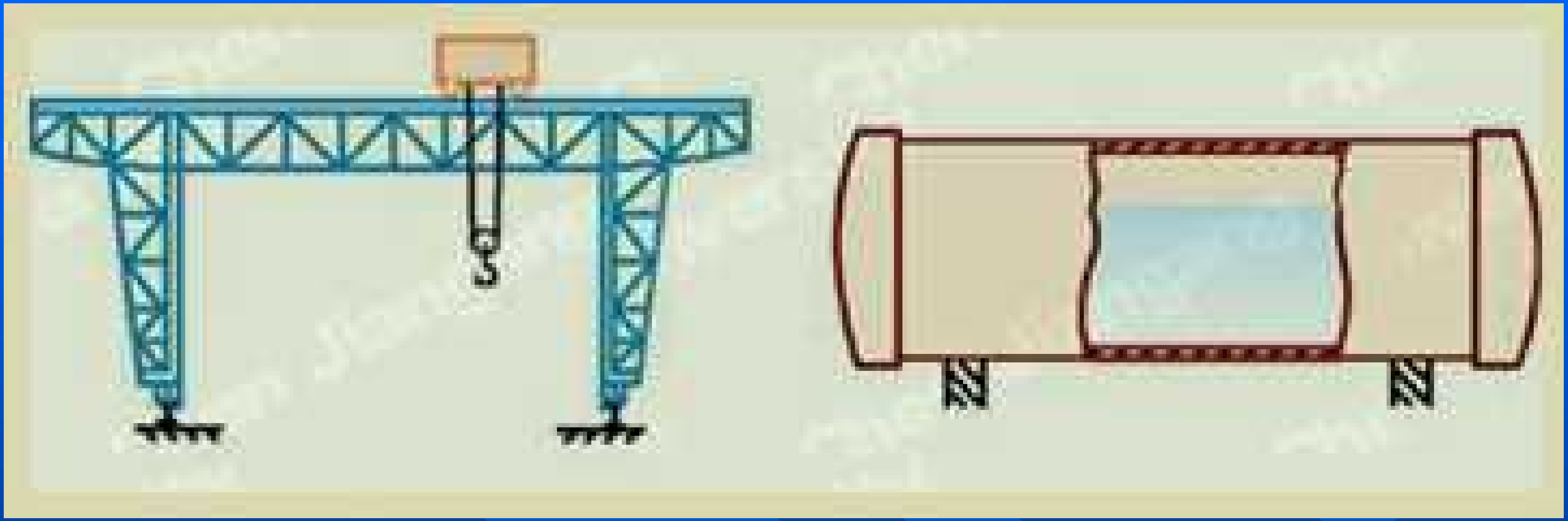
1 减小最大弯矩

(1) 合理布置支座的位置

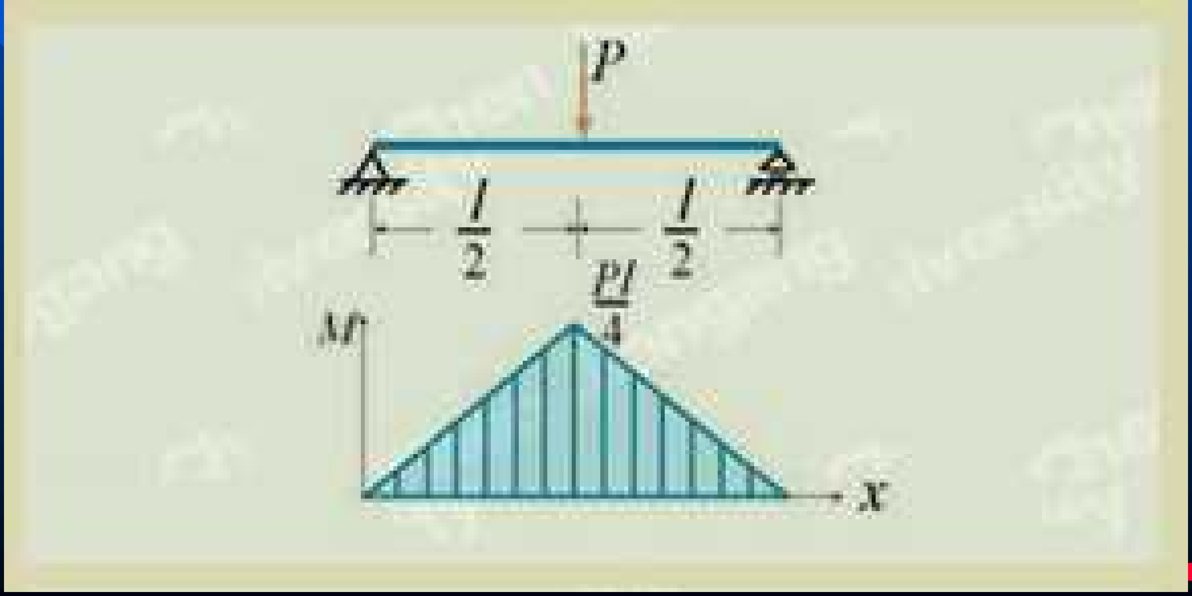




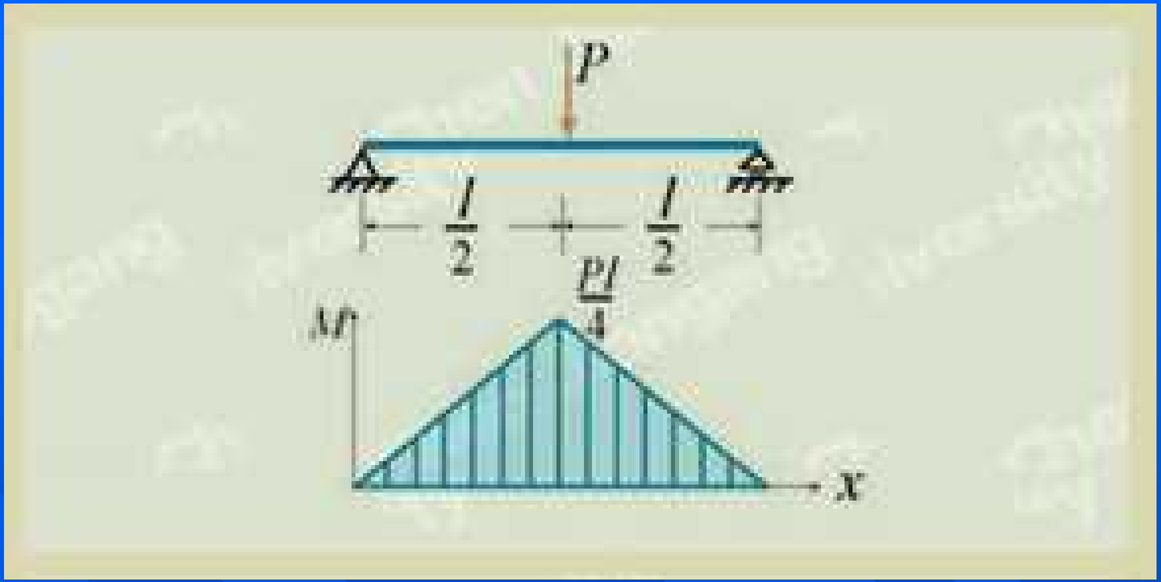
◆ 工程例子



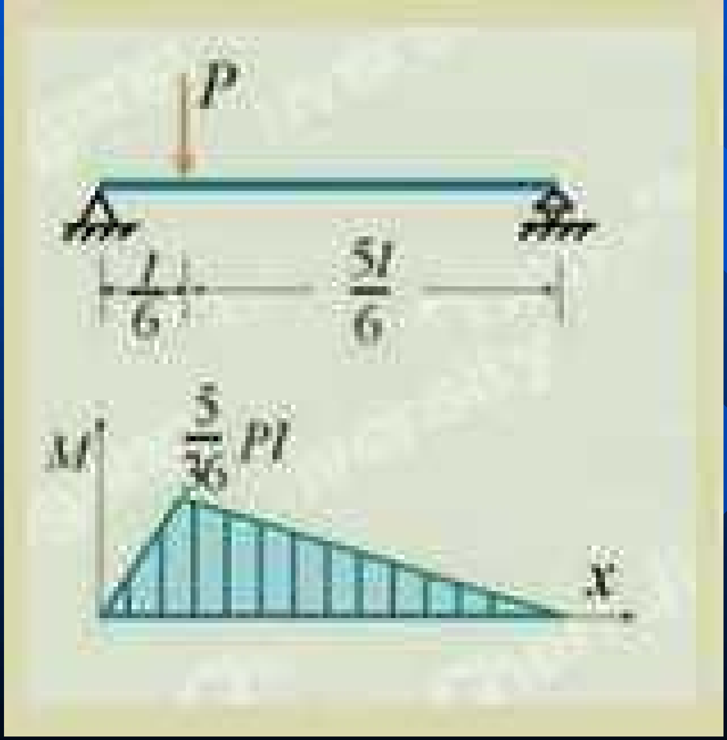
(2) 合理布置载荷



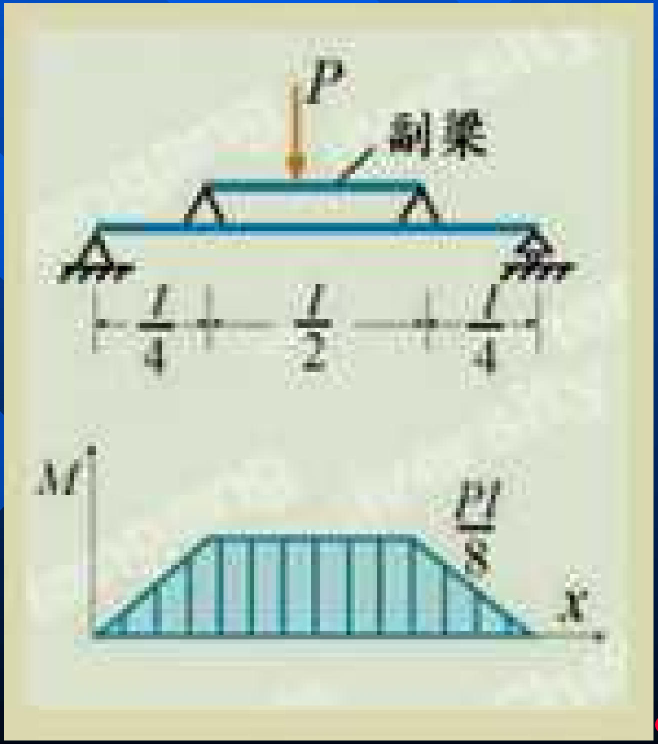
(2) 合理布置载荷



P
$\frac{l}{2}$
$\frac{l}{2}$
$\frac{Pl}{4}$
M
x



P
$\frac{l}{6}$
$\frac{5l}{6}$
$\frac{5}{36}Pl$
M
x

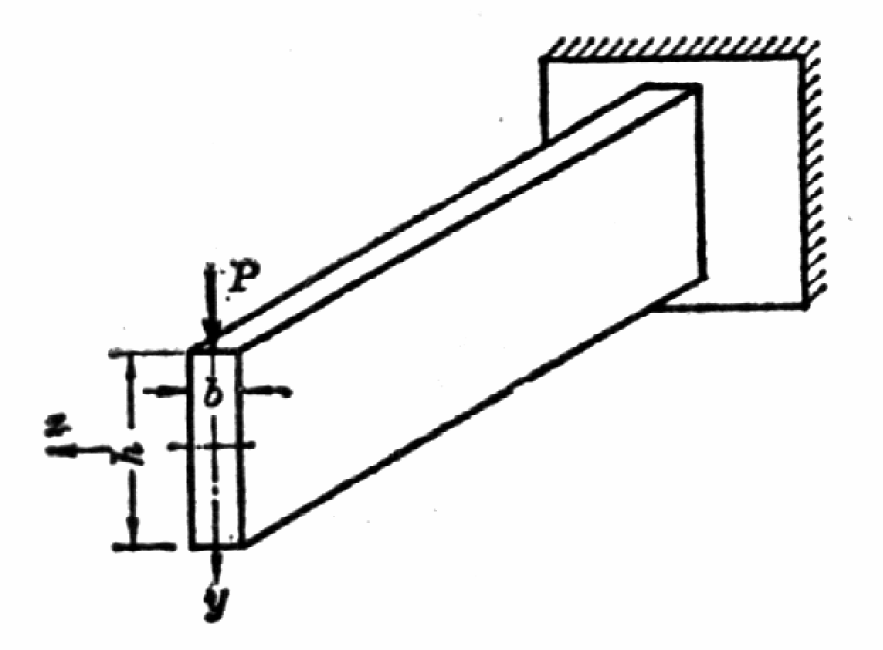


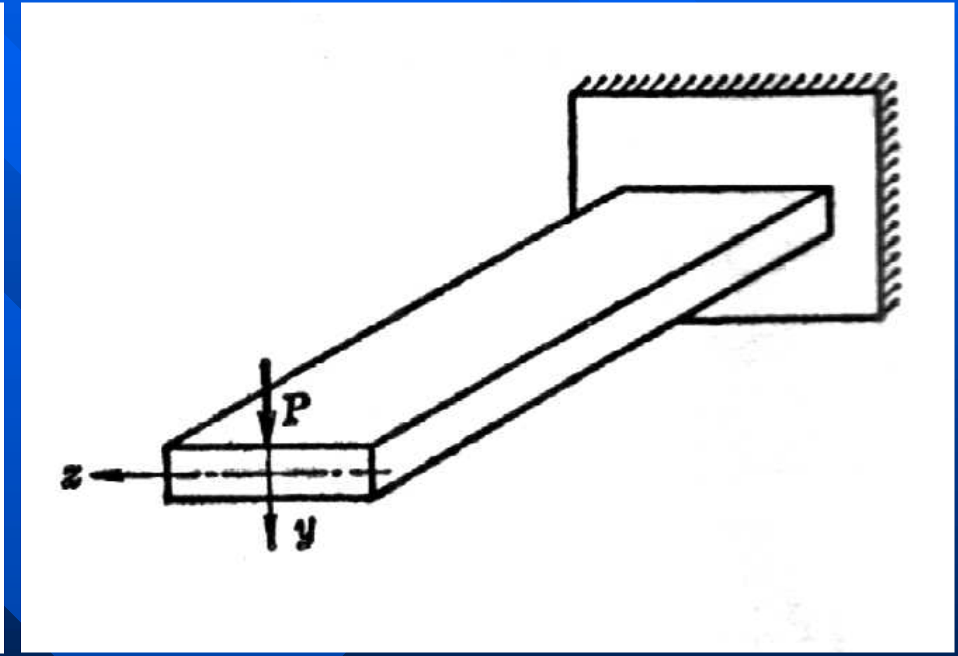
P
副梁
$\frac{l}{4}$
$\frac{l}{2}$
$\frac{l}{4}$
$\frac{Pl}{8}$
M
x

2 提高抗弯截面系数

在截面积A相同的条件下，提高抗弯截面系数。

- 矩形截面梁的放置

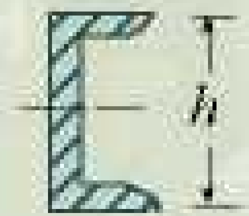
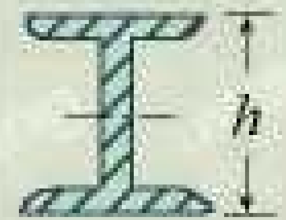




- 几种常用截面的比较　　用比值W/A来衡量

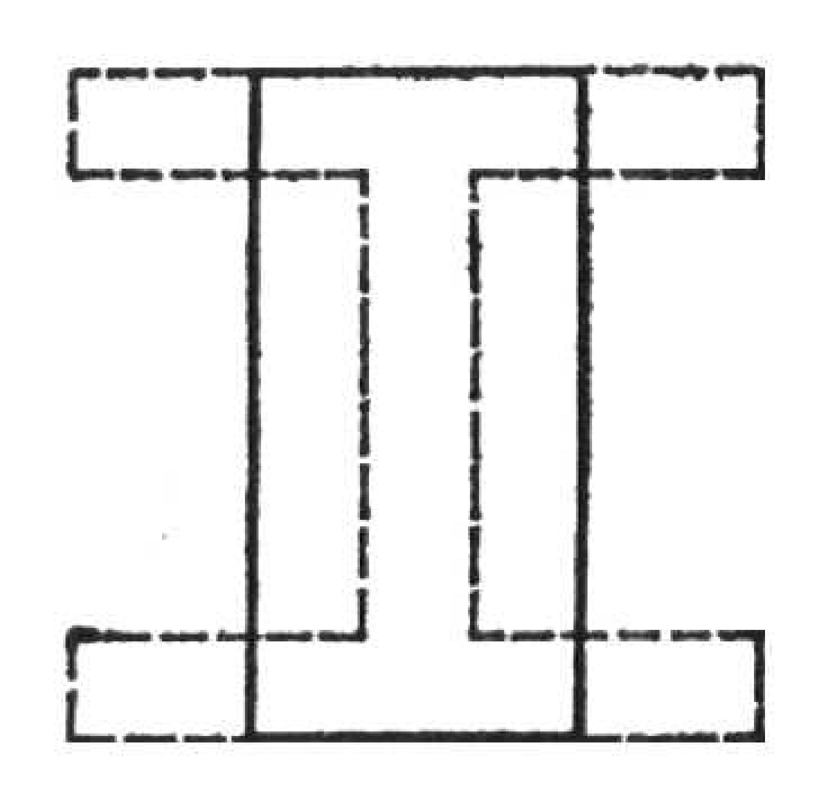
◆ 几种常用截面的比较　　用比值 W/A 来衡量

常见截面的 W/A 值

矩形	圆形	环形	槽钢	工字钢
		 内径 $d=0.8h$		
$0.167h$	$0.125h$	$0.205h$	$(0.27\text{-}0.31)h$	$(0.29\text{-}0.31)h$

可看出：材料远离中性轴的截面(环形、槽形、工字形等)比较经济合理。

可看出：材料远离中性轴的截面(环形、槽形、工字形等)比较经济合理。



- 根据<u>材料特性</u>选择合理截面

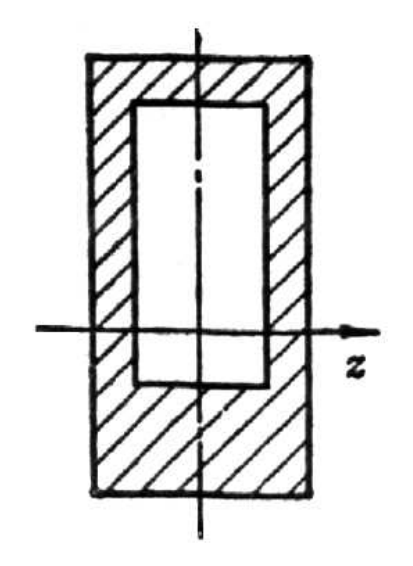
◆ 根据材料特性选择合理截面

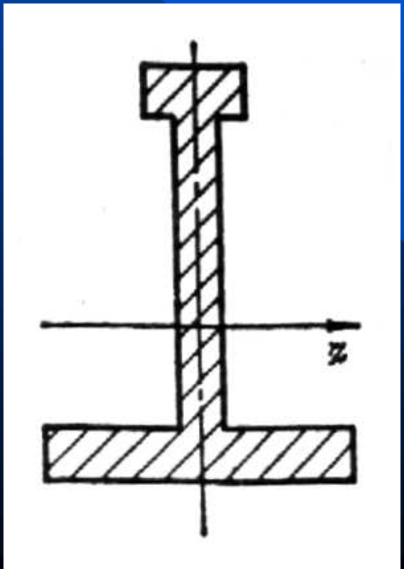
☞ 抗拉和抗压强度相等的材料

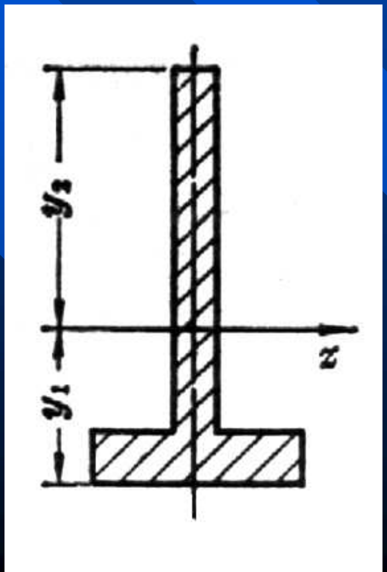
可采用关于中性轴上下对称的截面，如：矩形、工字形、圆形等。

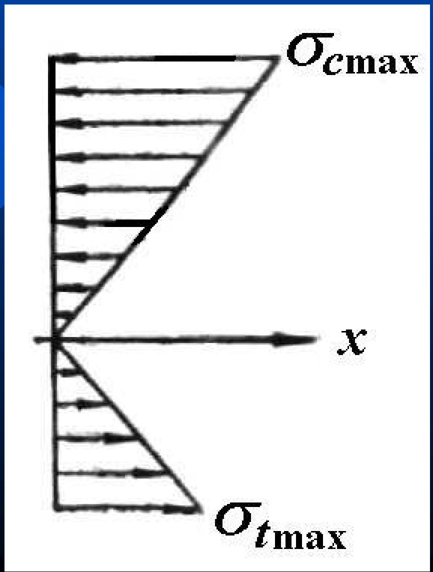
☞ 抗拉和抗压强度不相等的材料

可采用中性轴偏于受拉一侧的截面，如：

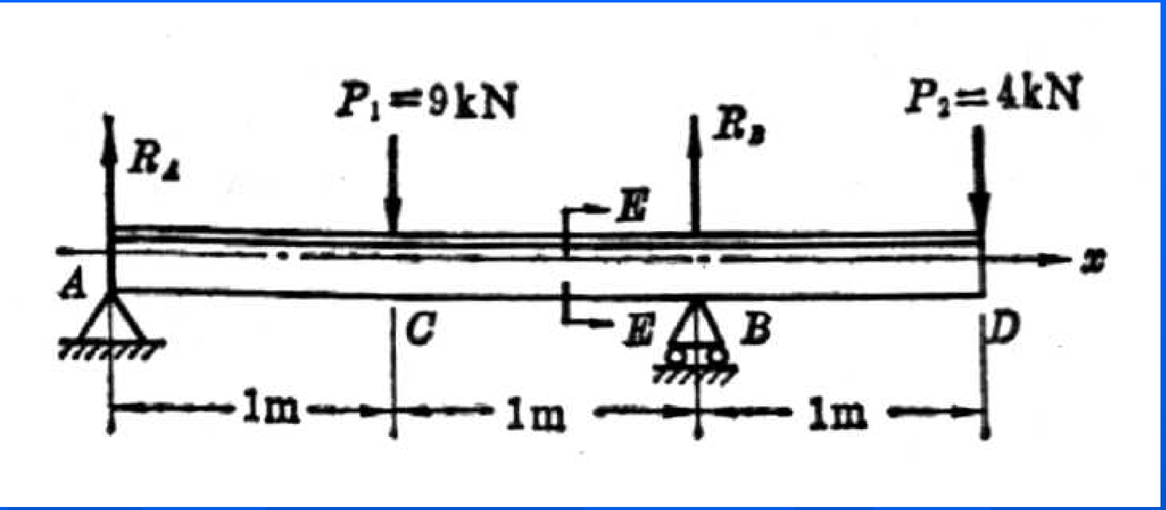




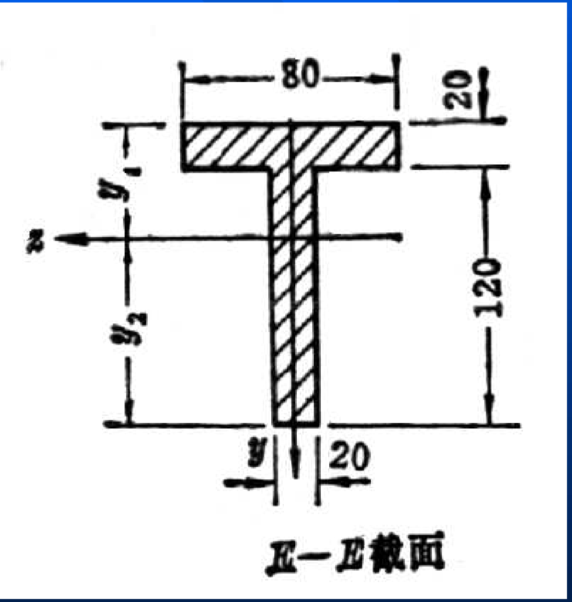




上次例 1 (书例5.3)

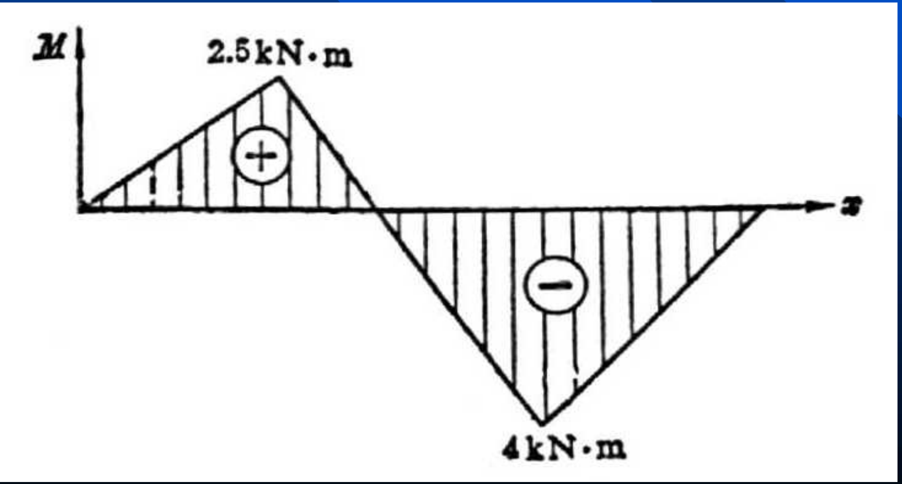


已知：T形截面铸铁梁，$[\sigma_t]$= 30 MPa，$[\sigma_c]$=160 MPa。I_z=763cm^4，且$|y_1|$=52mm。求：校核梁的强度。



问题：T形截面是否放反了？

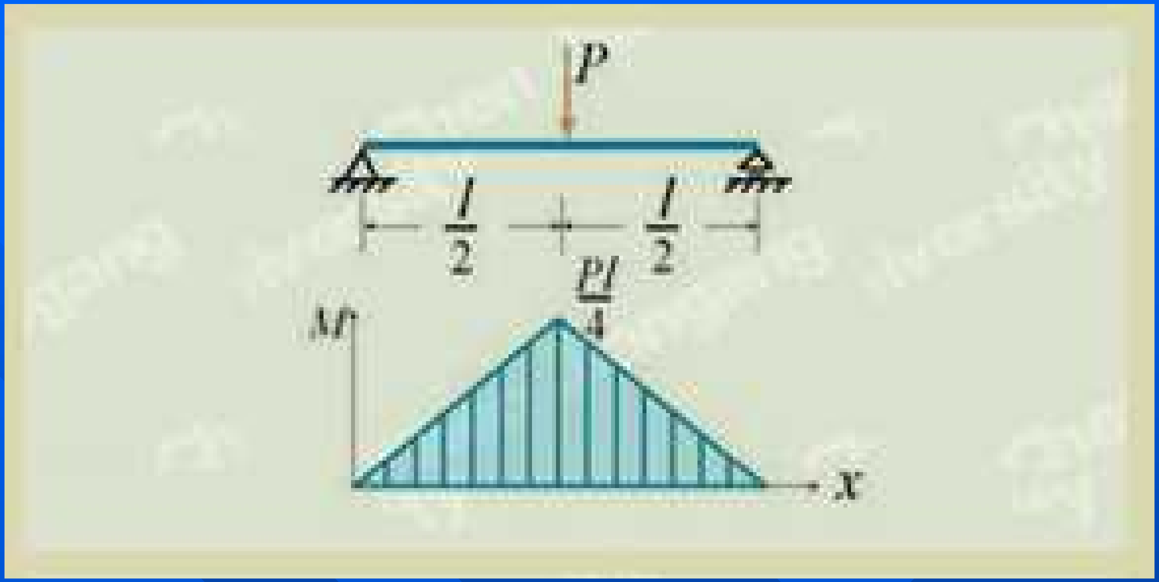
没放反。M_{max}是负的。



3 等强度梁的概念

对如图的简支梁:

只有中点处的截面上达到最大正应力。



- 等强度梁

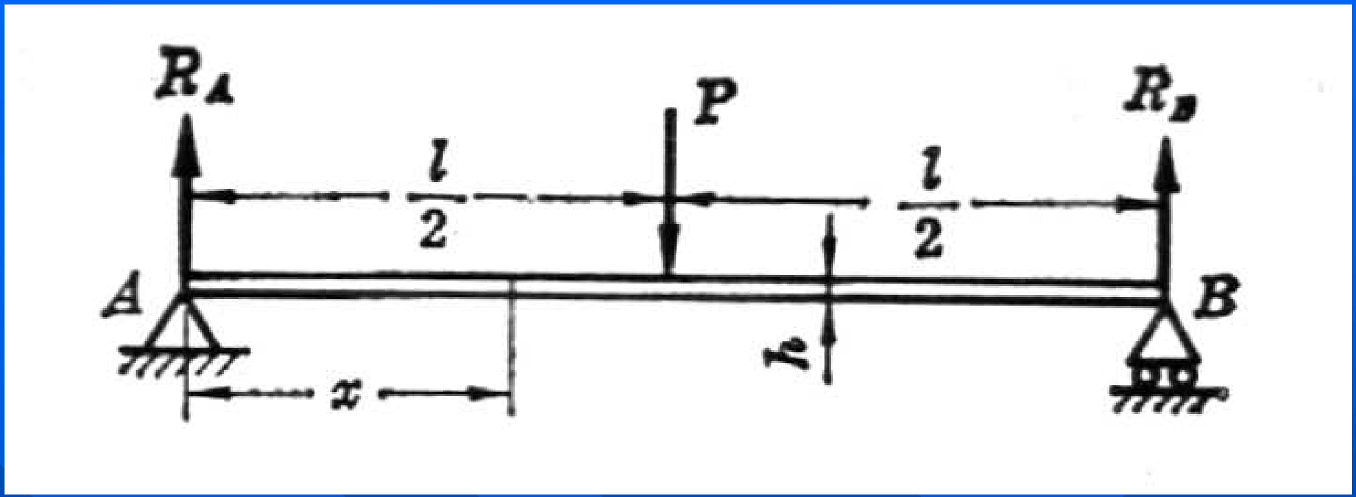
$$\sigma_{\max}=\frac{M(x)}{W(x)}=[\sigma] \longrightarrow W(x)=\frac{M(x)}{[\sigma]}$$

这就是等强度梁的抗弯截面系数应满足的关系。

- 中点受集中力作用的简支等强度梁

中点受集中力作用的简支等强度梁

弯矩方程为:



$$M(x)=\frac{1}{2}Px$$

$$(0\le x\le\frac{l}{2})$$

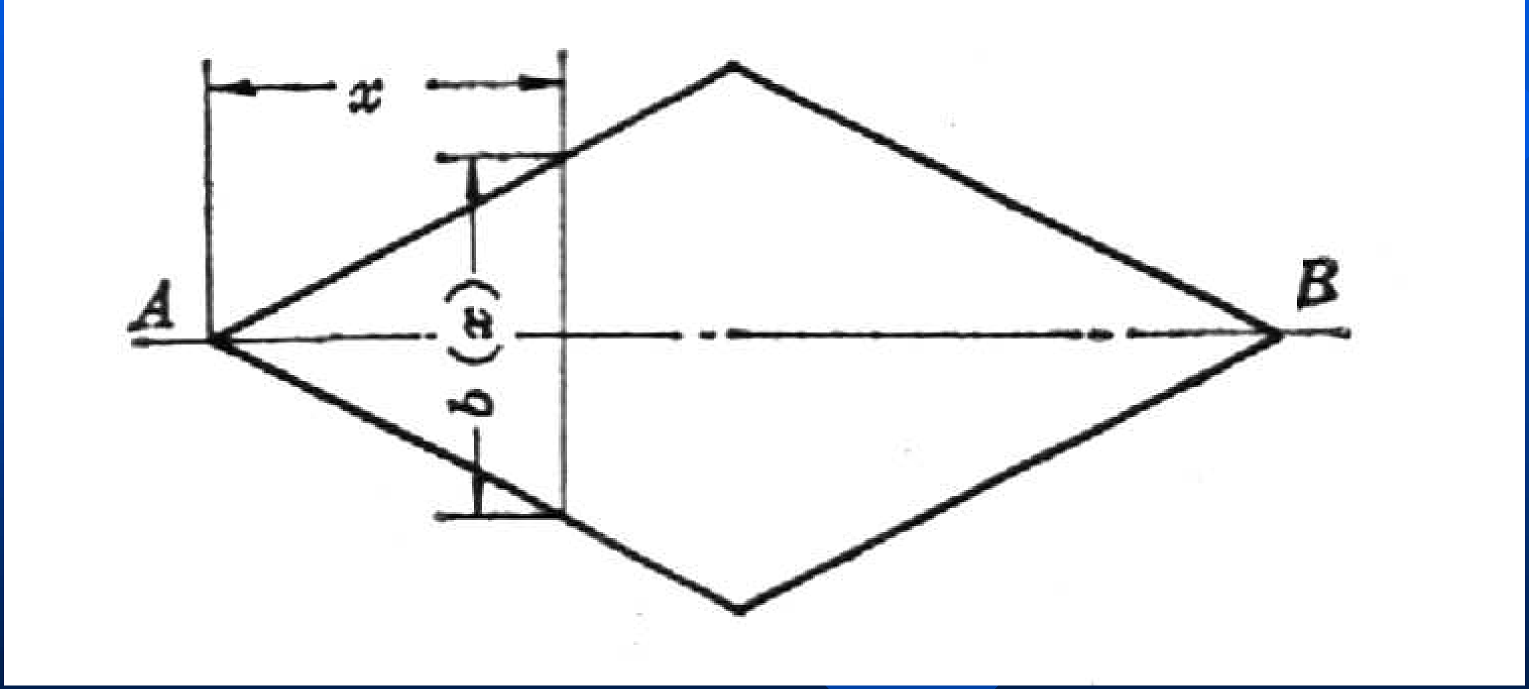
横截面采用矩形截面

(1) 高度为常数h，确定宽度 $b=b(x)$

$$W(x)=\frac{M(x)}{[\sigma]}=\frac{1}{2}\frac{Px}{[\sigma]}=\frac{b(x)h^2}{6}\Rightarrow b(x)=\frac{3P}{[\sigma]h^2}x$$

(1) 高度为常数h，确定宽度 $b = b(x)$

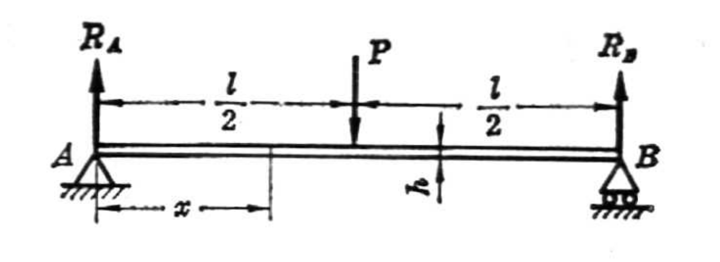
$$W(x) = \frac{M(x)}{[\sigma]} = \frac{1}{2}\frac{Px}{[\sigma]} = \frac{b(x)h^2}{6} \Rightarrow b(x) = \frac{3P}{[\sigma]h^2}x$$



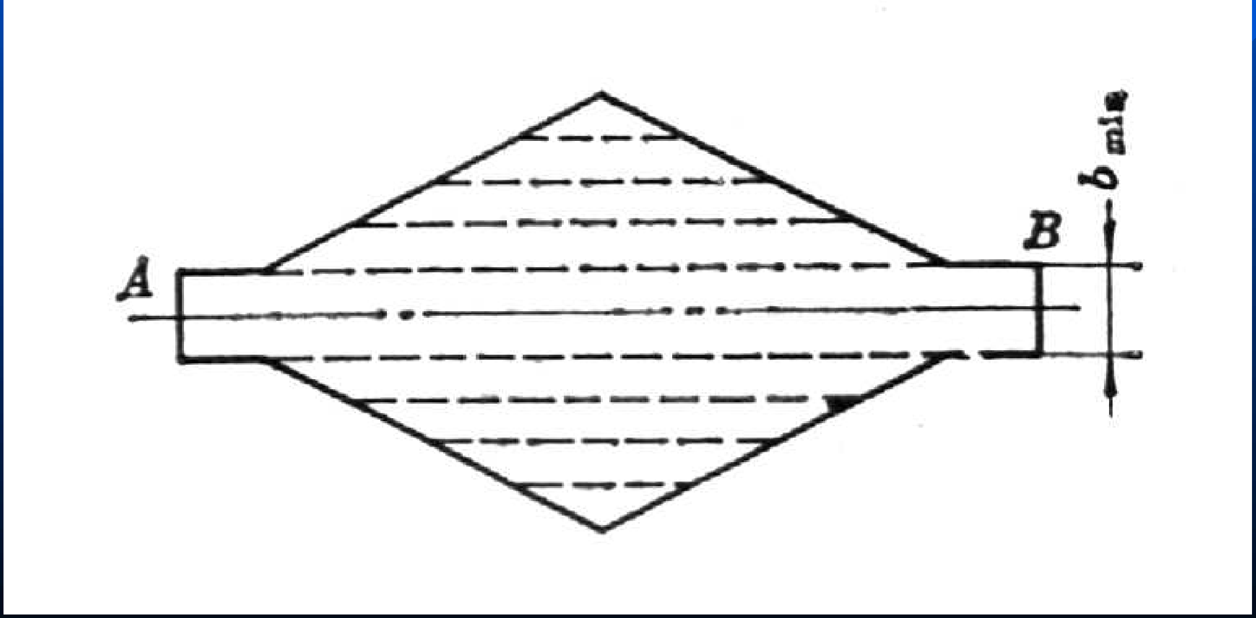
◆ 根据剪切强度设计最小宽度

根据剪切强度设计最小宽度

剪力 $$Q=\frac{P}{2}$$

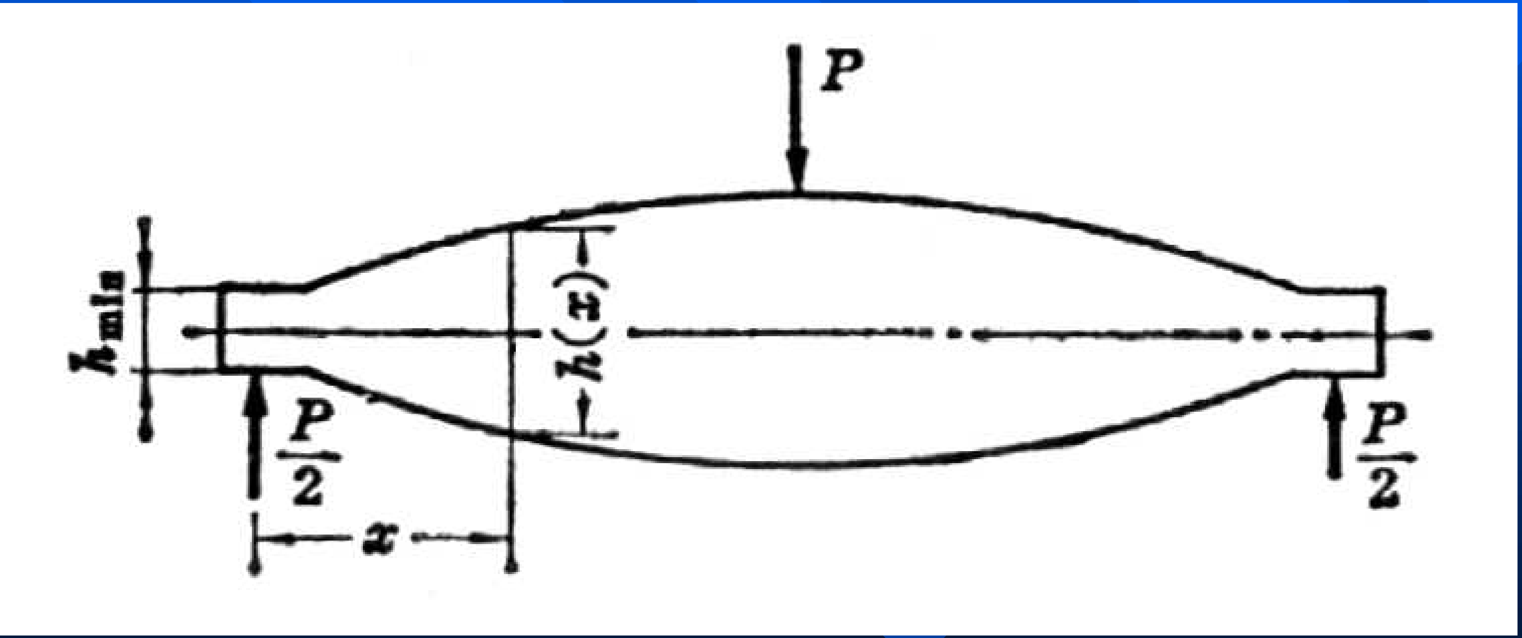


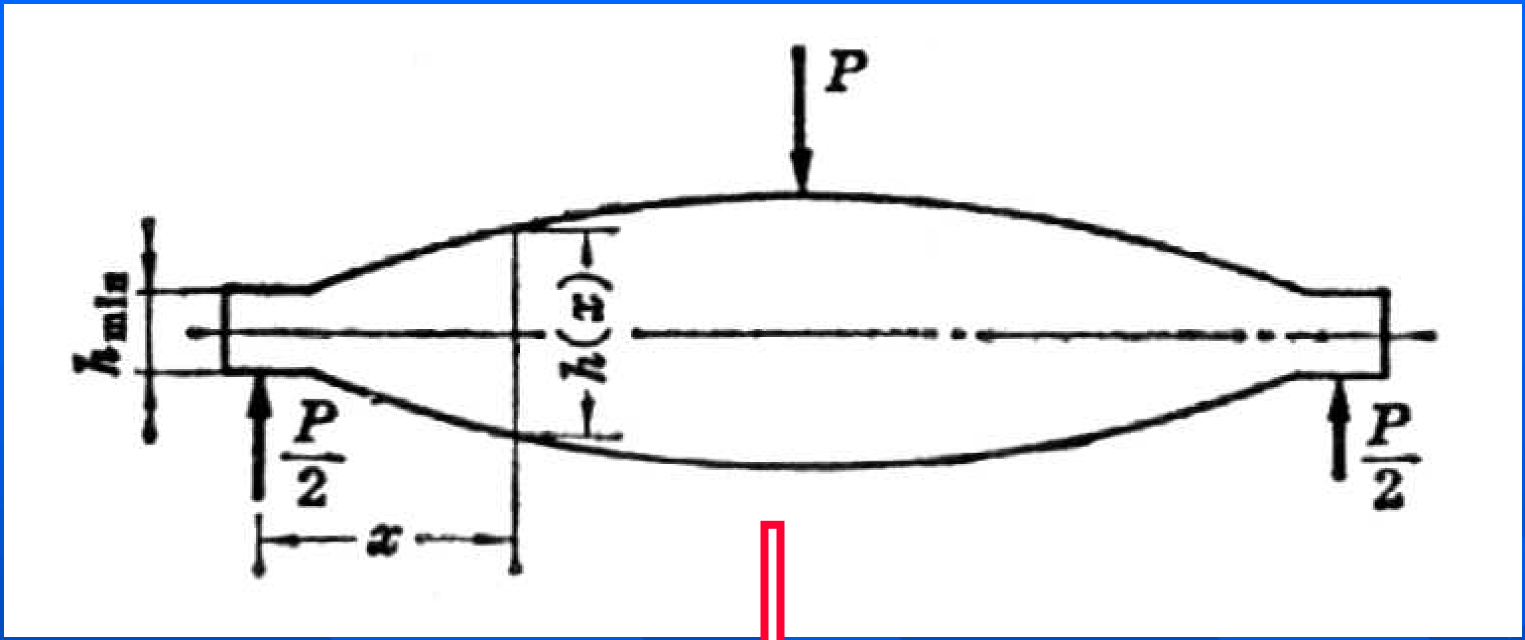
$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{Q}{A}=\frac{3}{2}\frac{P/2}{b_{\min}h}=[\tau] \Longrightarrow b_{\min}=\frac{3}{4}\frac{P}{h[\tau]}$$

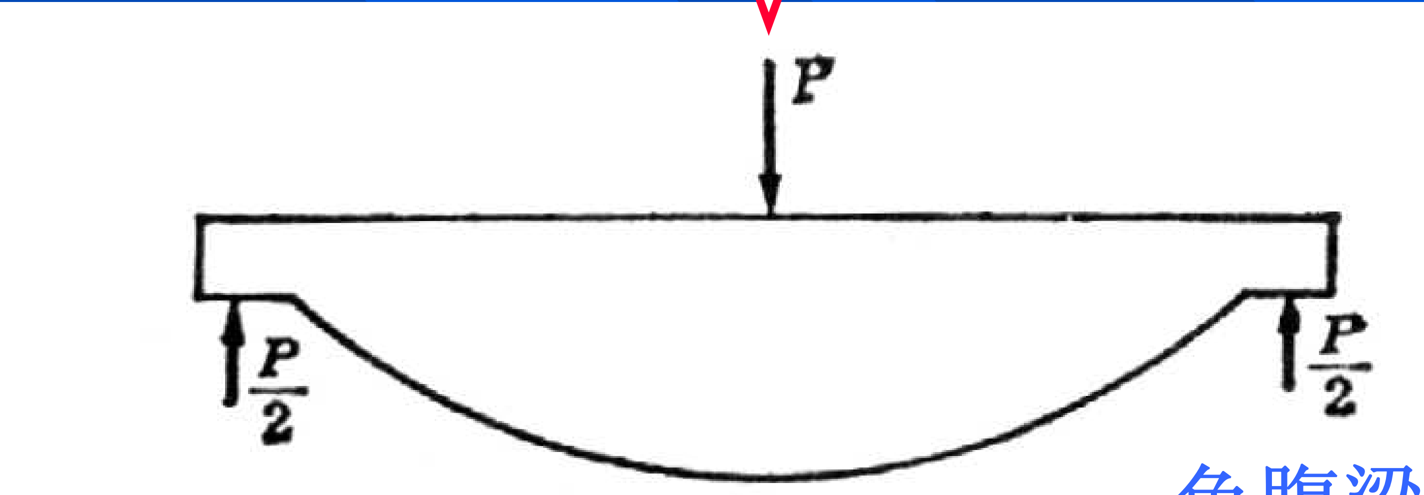


(2) 宽度为常数b，确定高度 $h = h(x)$

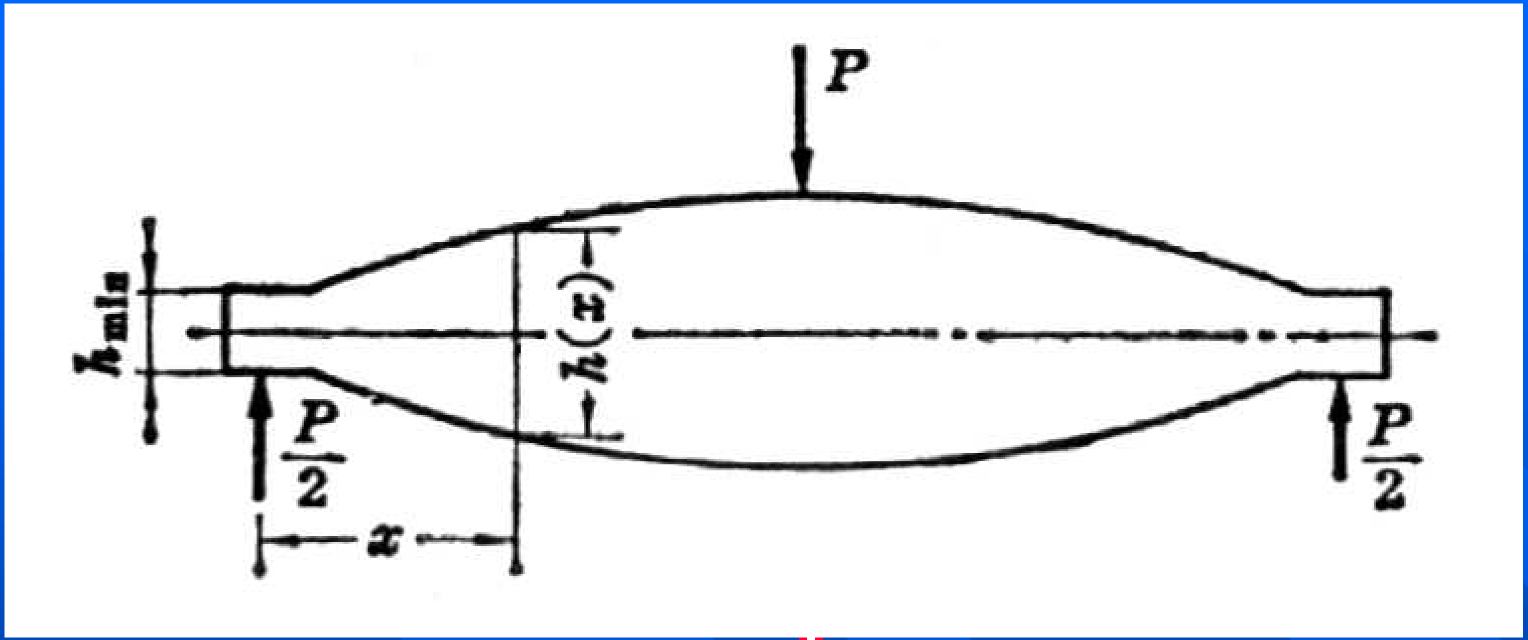
同理可得 $$h(x)=\sqrt{\frac{3P}{b[\sigma]}x},\qquad h_{\min}=\frac{3}{4}\frac{P}{b[\tau]}$$

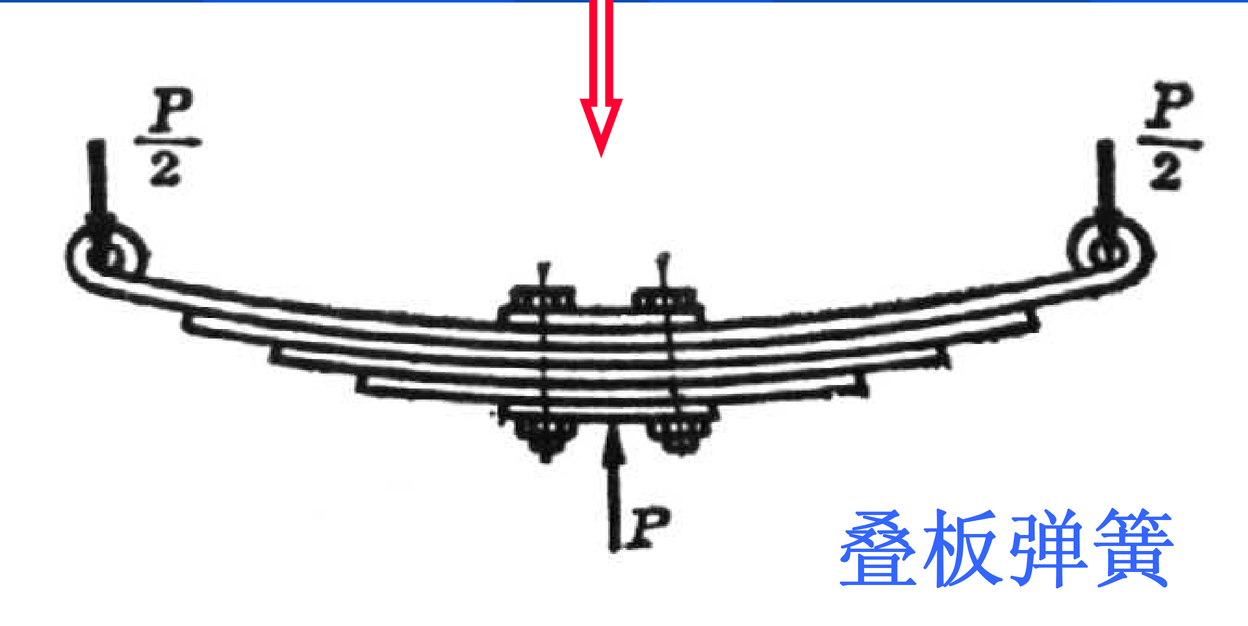




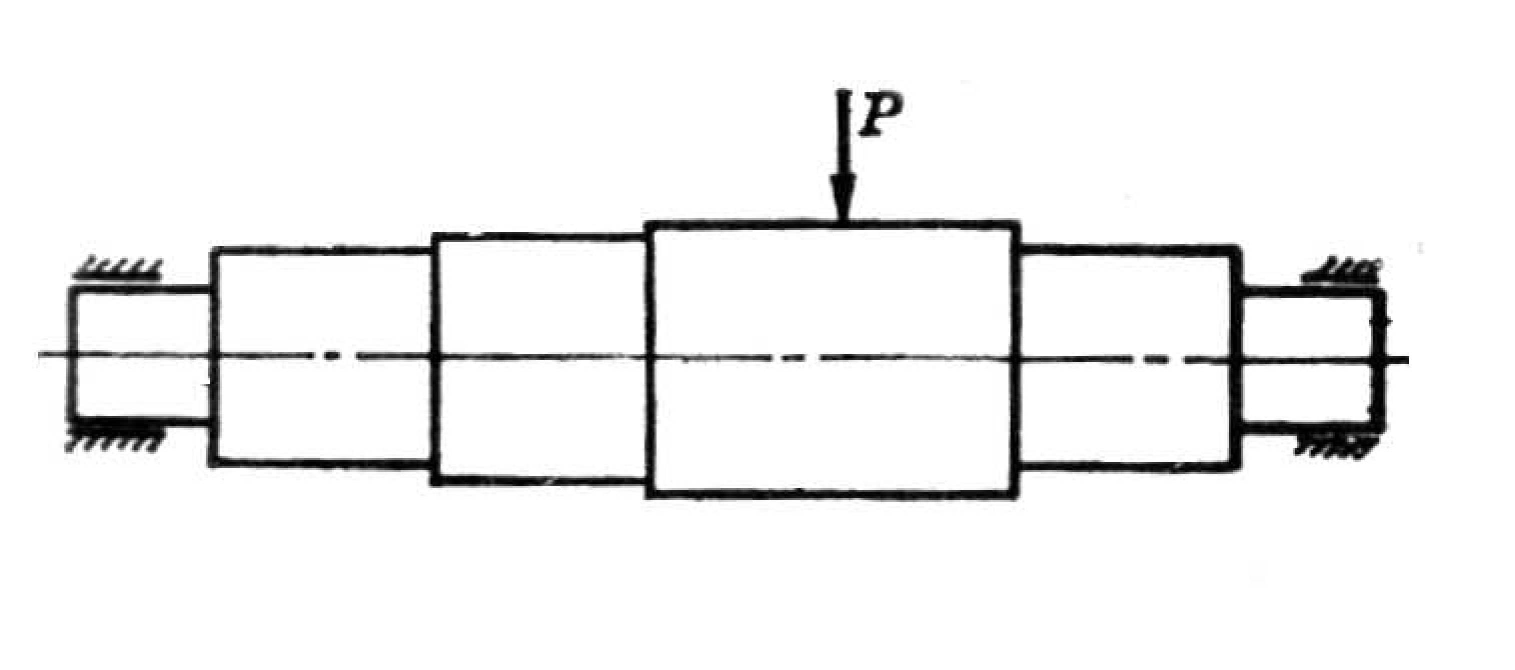


鱼腹梁


P
h_{min}
$h(x)$
$\frac{P}{2}$
x
$\frac{P}{2}$


$\frac{P}{2}$
$\frac{P}{2}$
P
叠板弹簧

- 机械上常用的等强度轴



谢谢大家！