

材料力学

第二章

拉伸、压缩与剪切

(1)

南京航空航天大学
陶秋帆等

第二章 拉伸、压缩与剪切

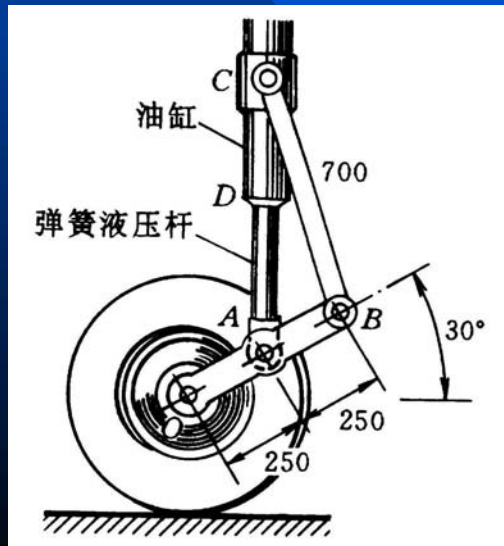
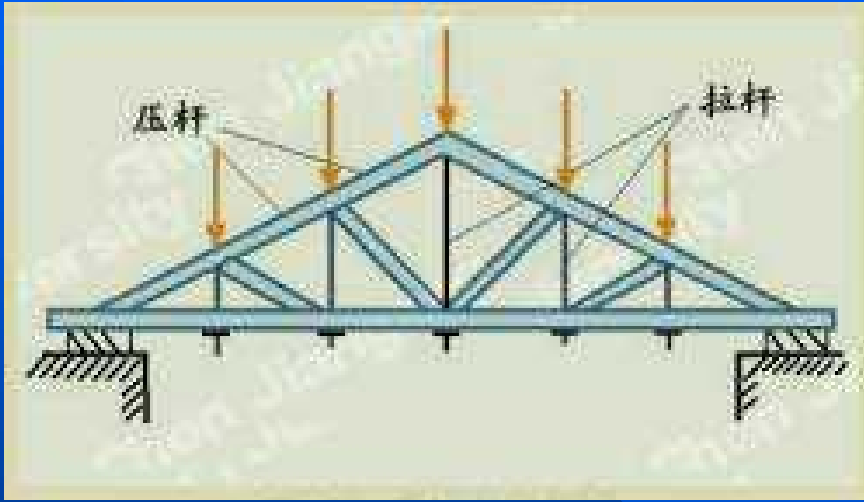
本章内容:

- 1 轴向拉伸与压缩的概念和实例
- 2 轴向拉伸或压缩时横截面上的内力和应力
- 3 直杆轴向拉伸或压缩时斜截面上的应力
- 4 材料在拉伸时的力学性能
- 5 材料在压缩时的力学性能

- 6 温度和时间对材料力学性能的影响
- 7 失效、安全系数和强度计算
- 8 轴向拉伸或压缩时的变形
- 9 轴向拉伸或压缩时的变形能
- 10 拉伸、压缩静不定问题
- 11 温度应力和装配应力
- 12 应力集中的概念
- 13 剪切和挤压的实用计算

§ 2.1 轴向拉伸与压缩的概念和实例

工程问题中，有很多杆件是受拉或受压的。



直杆受拉或受压时的特点:

- 受力特点: 外力合力的作用线与杆轴线重合;
- 变形特点: 杆件变形主要是沿轴线方向的伸长或缩短。



这样的杆件称为拉（压）杆。
这样的力称为轴向拉力或轴向压力。

§ 2.2 轴向拉伸或压缩时

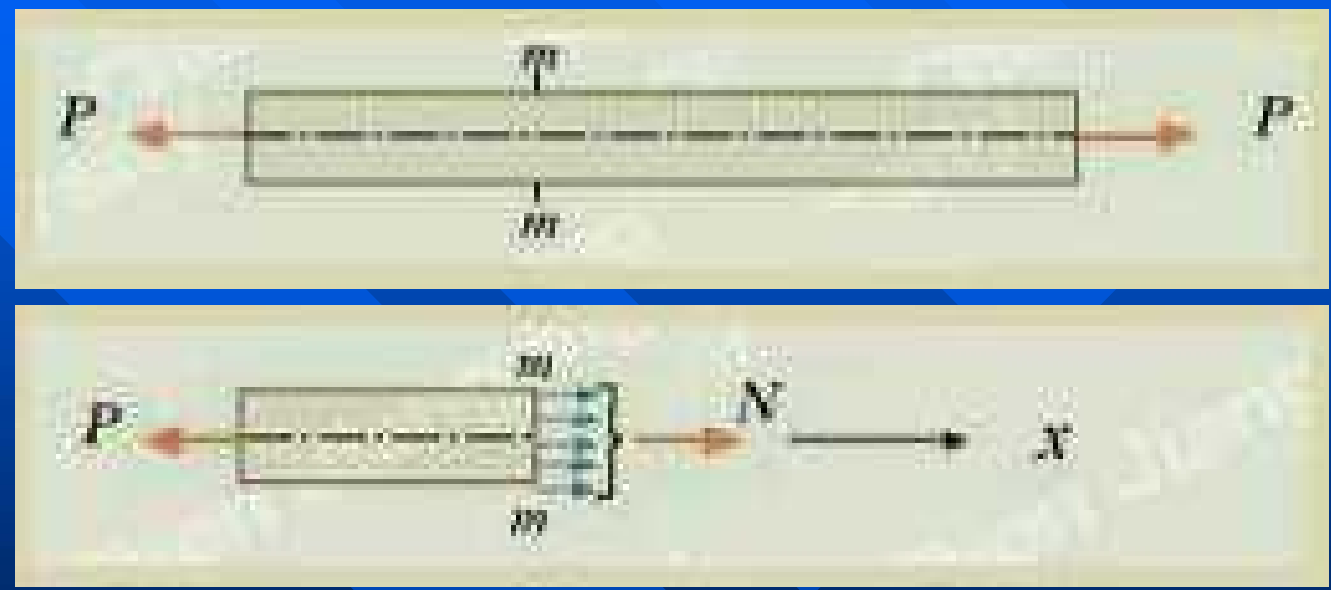
横截面上的内力和应力

1. 内力

求内力的方法：截面法。

例子

取截面 $m-m$
由平衡条件
可知：
内力的合力
作用线沿轴线 —— 轴力。

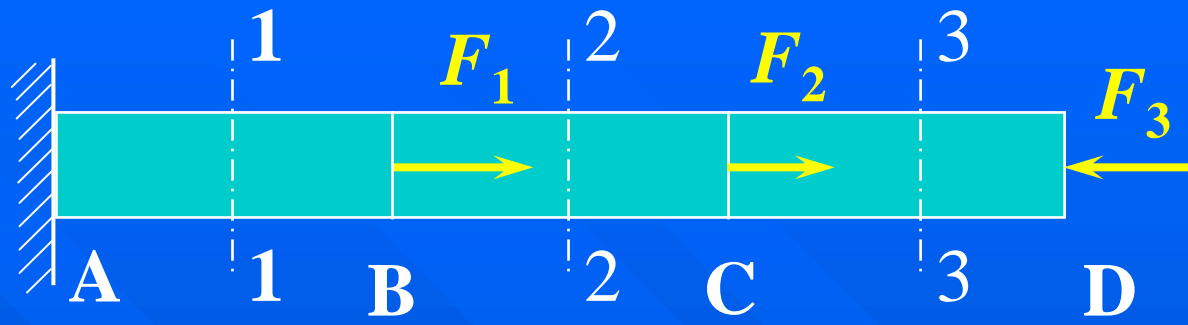


轴力的正负号规定：拉力为**正**；压力为**负**。

◆ 轴力图

例 1

已知: $F_1=40\text{kN}$,
 $F_2=30\text{kN}$, $F_3=20$
 kN 。



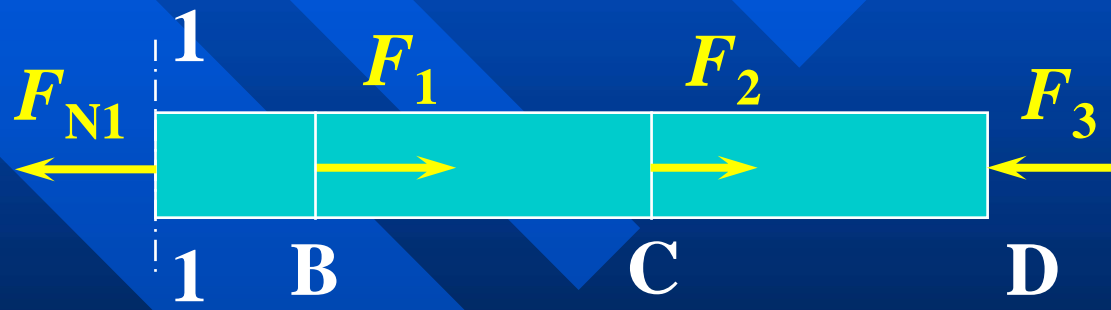
求: 1-1, 2-2和3-3截面的轴力, 并作杆的轴力图。

解: ◆ 1-1截面, 取右边, 受力如图。

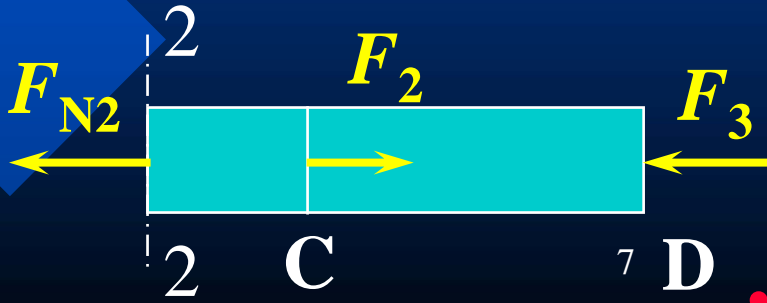
$$\sum X = 0$$

$$F_{N1} = F_1 + F_2 - F_3$$

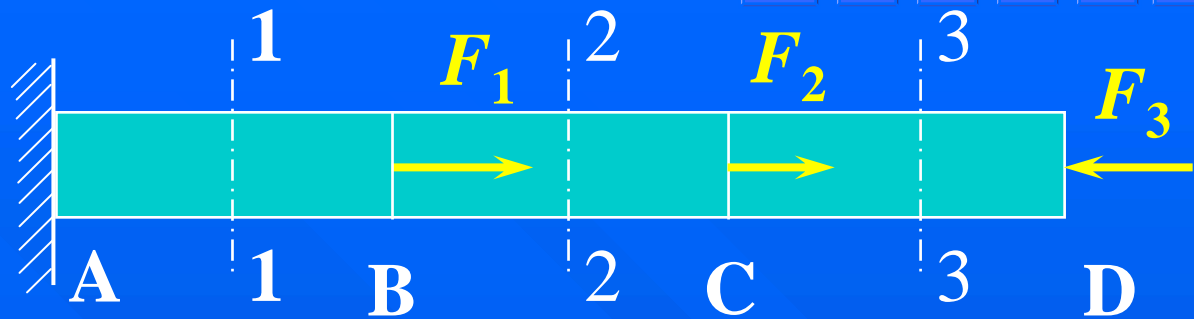
$$= 50 (\text{kN})$$



◆ 2-2截面, 取右边, 受力如图。

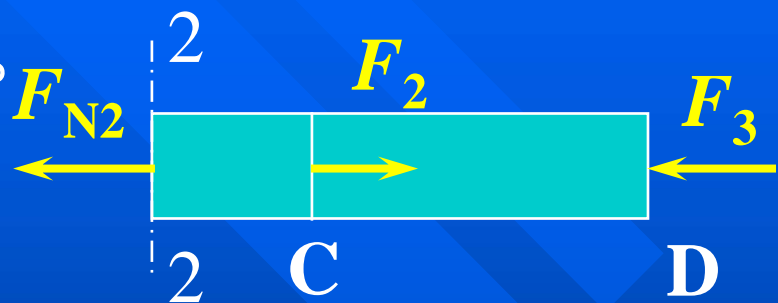


$$F_{N1} = 50 \text{ (kN)}$$



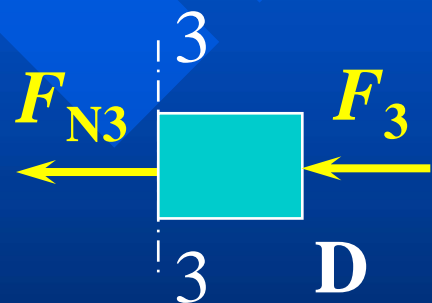
◆ 2-2截面, 取右边, 受力如图。

$$\sum X = 0 \quad F_{N2} = F_2 - F_3 = 10 \text{ (kN)}$$

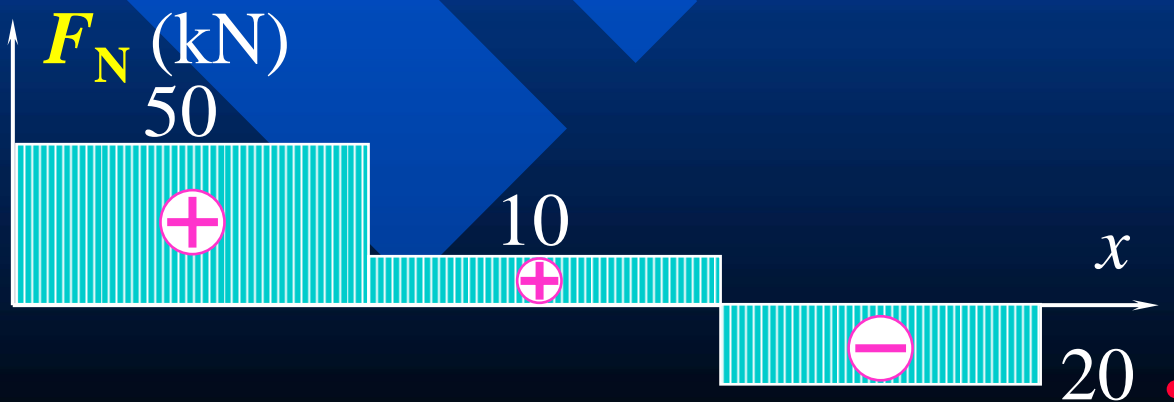


◆ 3-3截面, 取右边, 受力如图。

$$\sum X = 0 \quad F_{N3} = -F_3 = -20 \text{ (kN)}$$



◆ 轴力图

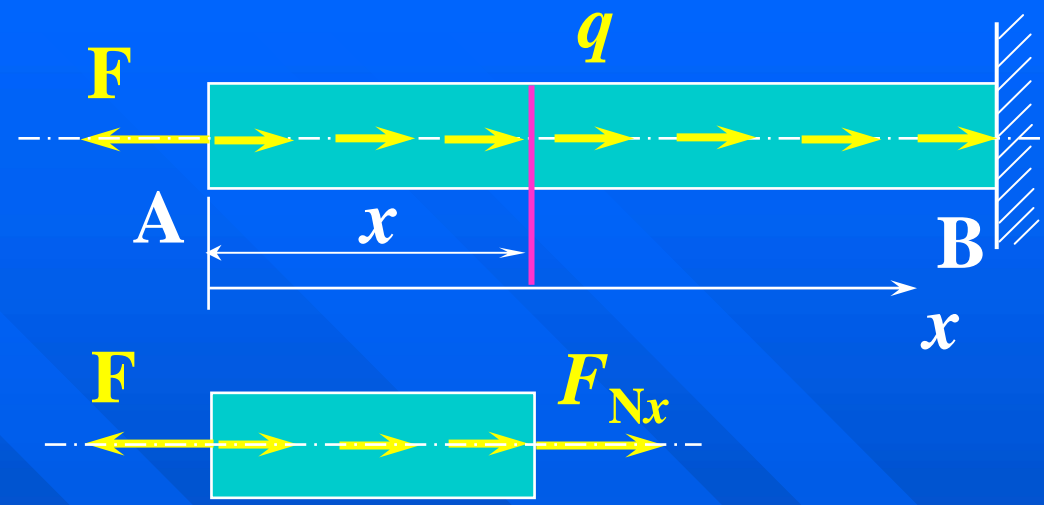


例 2

已知: $F=10\text{kN}$, 均布轴向载荷 $q=30\text{kN/m}$, 杆长 $l=1\text{m}$ 。

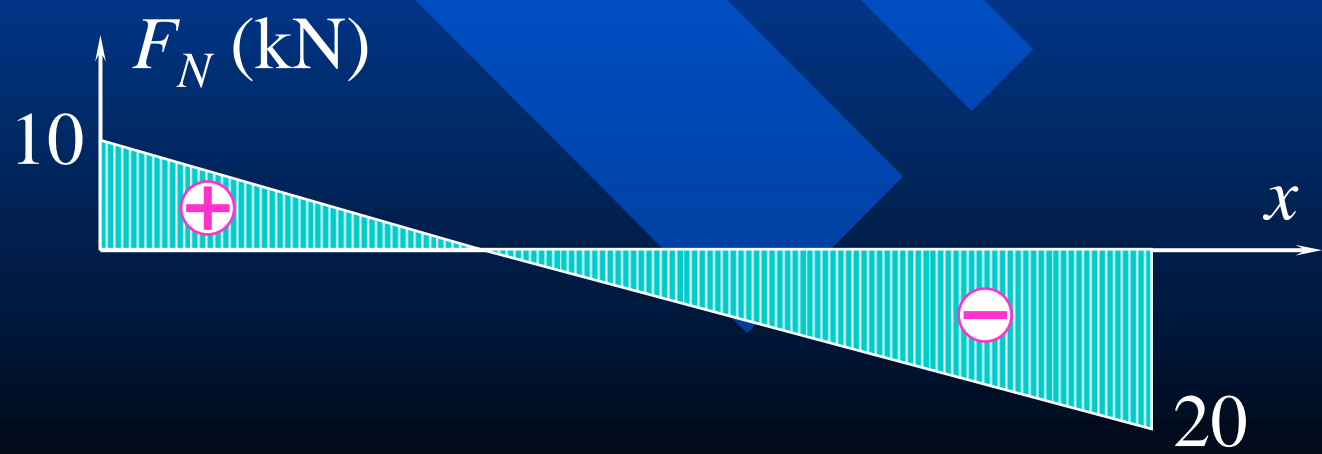
求: 杆的轴力图。

解: 建立坐标如图, 取 x 处截面, 取左边, 受力如图



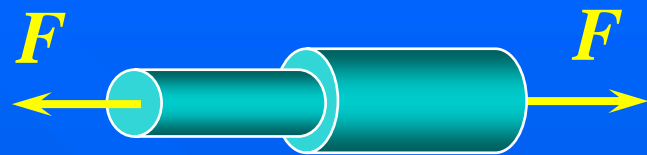
$$\sum X = 0 \quad F_{N_x} + qx = F \quad \longrightarrow \quad F_{N_x} = 10 - 30x$$

◆ 轴力图



2. 横截面上的正应力

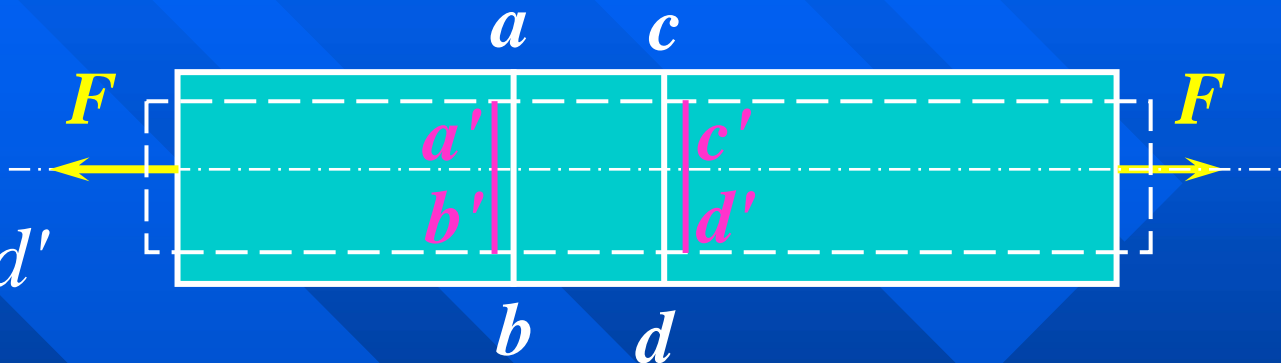
根据轴力还不能确定杆的强度。



为了得到正应力分布规律，先研究杆件变形。

● 杆的变形

变形后 $a'b', c'd'$



(1) 仍为直线;

(2) 仍互相平行且垂直于轴线;

● 平面假设

变形前为平面的横截面，变形后仍保持为平面，而且仍垂直于轴线。

● 平面假设

由平面假设

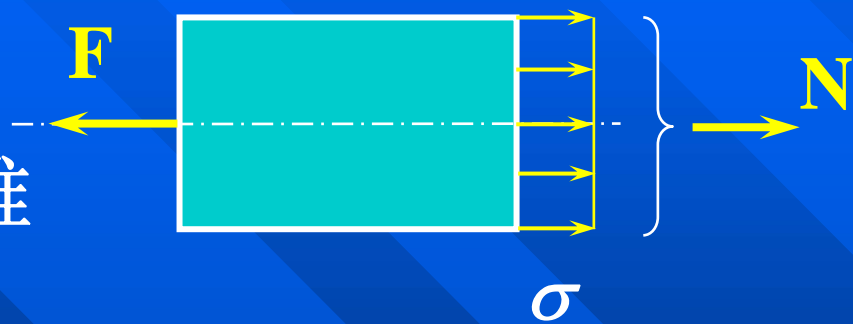
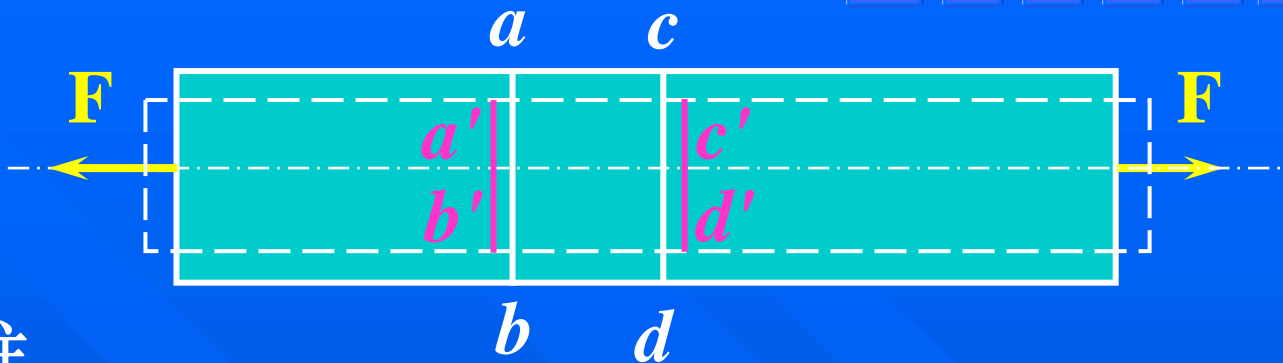
→ 各纵向纤维
变形相同

→ 各纵向纤维
受力相同

→ 正应力在横截面上均匀分布

● 正应力公式

横截面上分布的平行力系的合力应为轴力 N 。



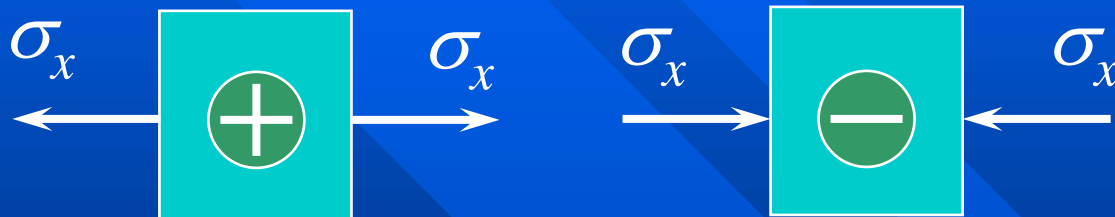
→
$$F_N = \int_A \sigma dA = \sigma A \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{F_N}{A}$$

• 正应力公式

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

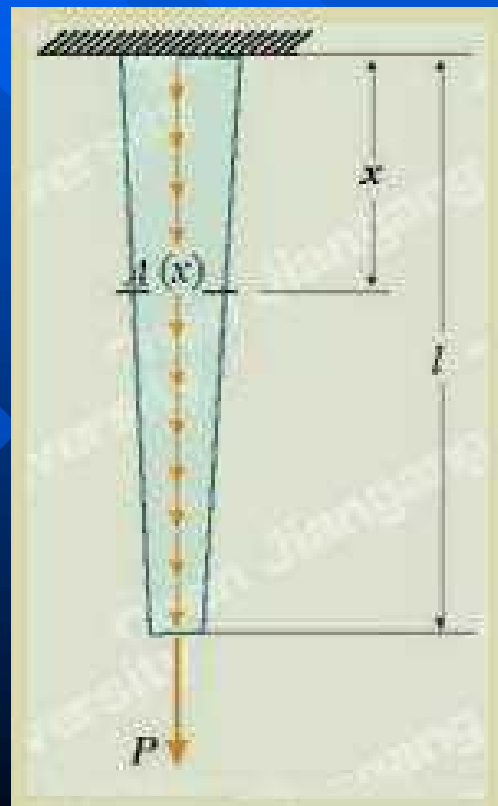
说明

- ◆ 此公式对受压的情况也成立;
- ◆ 正应力的正负号规定:



- ◆ 对变截面 当截面变化缓慢时, 杆横截面上的正应力也近似为均匀分布, 可有:

$$\sigma(x) = \frac{F_N(x)}{A(x)}$$



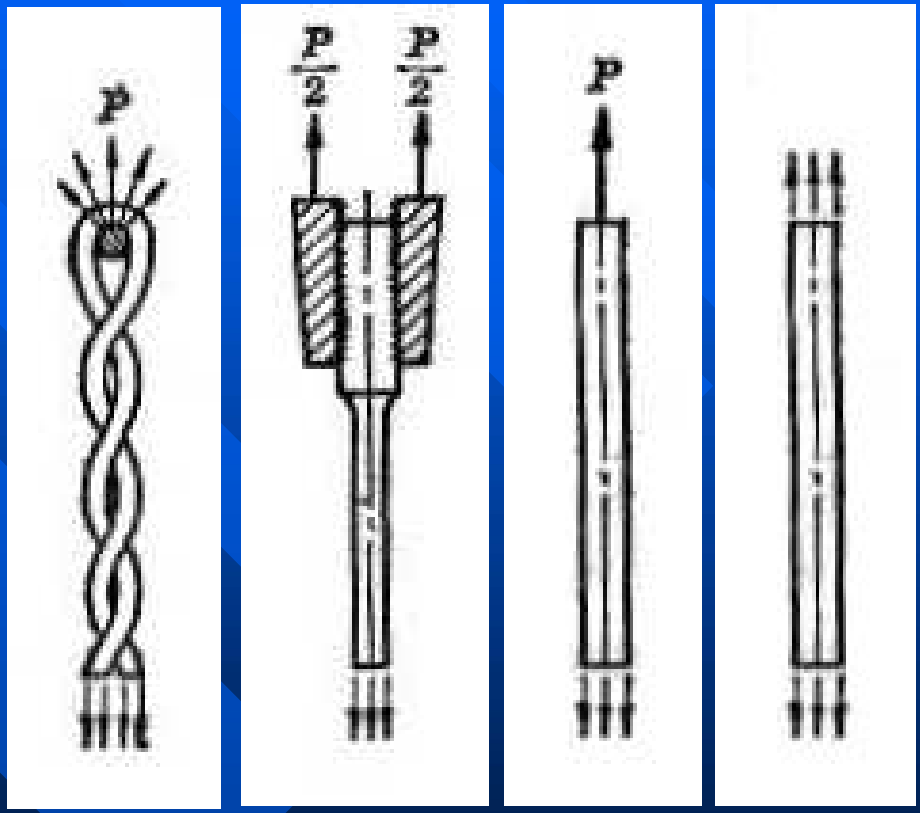
● 杆端加载方式对正应力分布的影响

圣维南原理

若用与外力系静力等效的合力代替原力系，则这种代替对构件内应力与应变的影响只限于原力系作用区域附近很小的范围内。

对于杆件，此范围相当于横向尺寸的1~1.5倍。

即：离端面不远处，应力分布就成为均匀的。



例3 旋转式吊车

已知：角钢截面面积为 10.86 cm^2 ， $P=130 \text{ kN}$ ， $\alpha = 30^\circ$ 。

求：AB杆横截面上的应力。

解：(1) 求内力

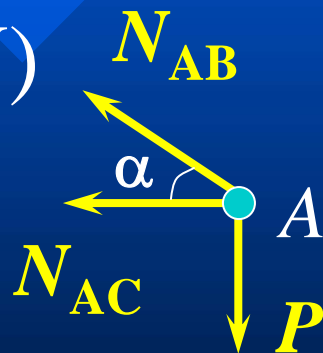
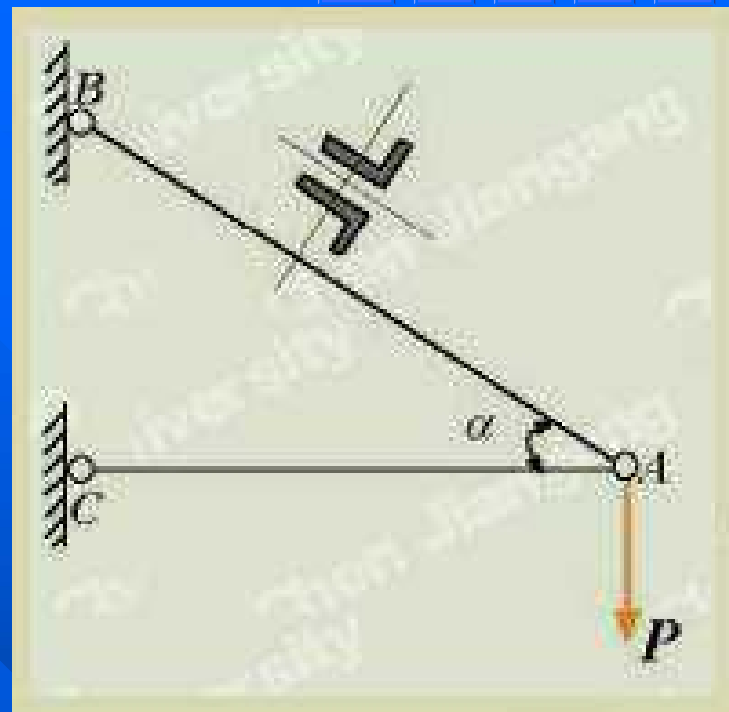
取节点A，受力如图。

$$\sum Y = 0 \quad N_{AB} \sin \alpha = P \quad \Rightarrow \quad N_{AB} = 260 \text{ (kN)}$$

AB杆各截面轴力相同。

(2) 求AB杆应力

$$\sigma = \frac{N_{AB}}{A} = \frac{260 \times 10^3}{10.86 \times 10^{-4} \times 2} = 119.7 \times 10^6 \text{ (Pa)} = 119.7 \text{ (MPa)}$$

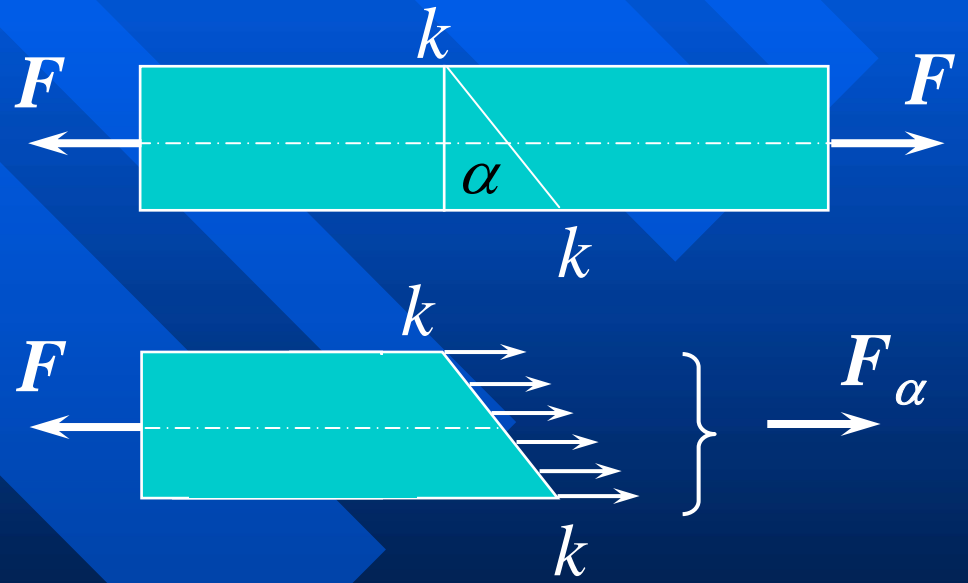


§ 2.3 直杆轴向拉伸或压缩时 斜截面上的应力

有时拉(压)杆件沿斜截面发生破坏。
因此，需要确定斜截面上的应力。

◆ 横截面上的正应力:

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{A}$$



◆ 斜截面k-k

👉 应力仍为均匀分布

👉 内力仍为F $F_\alpha = F$

👉 斜截面面积: $A_\alpha = A / \cos \alpha$

◆ 斜截面 $k-k$

应力仍为均匀分布

内力仍为 F $F_\alpha = F$

斜截面面积: $A_\alpha = A / \cos \alpha$

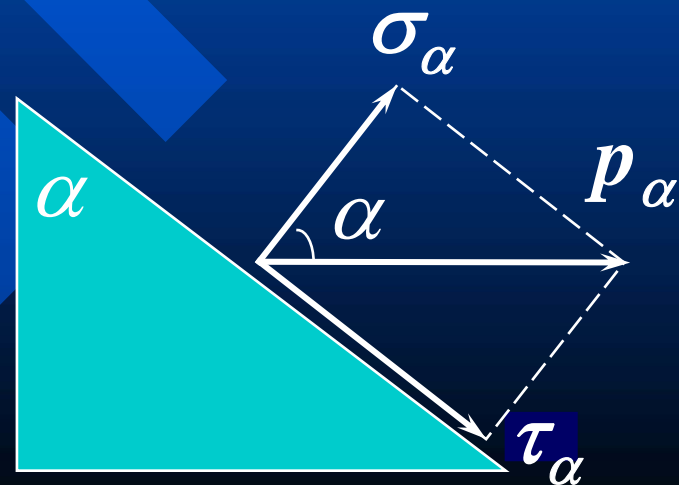
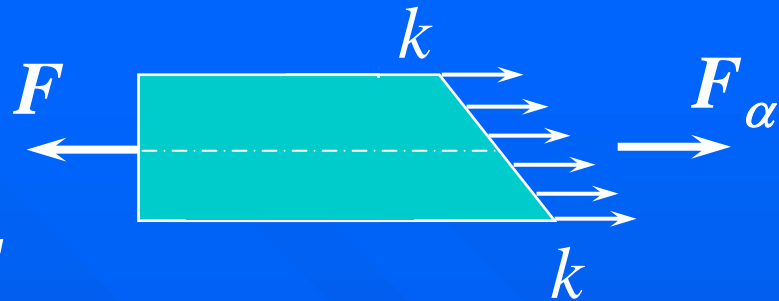
斜截面上的全应力:

$$P_\alpha = \frac{F_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F}{A_\alpha} = \frac{F}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$$

斜截面上的正应力和切应力

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha$$

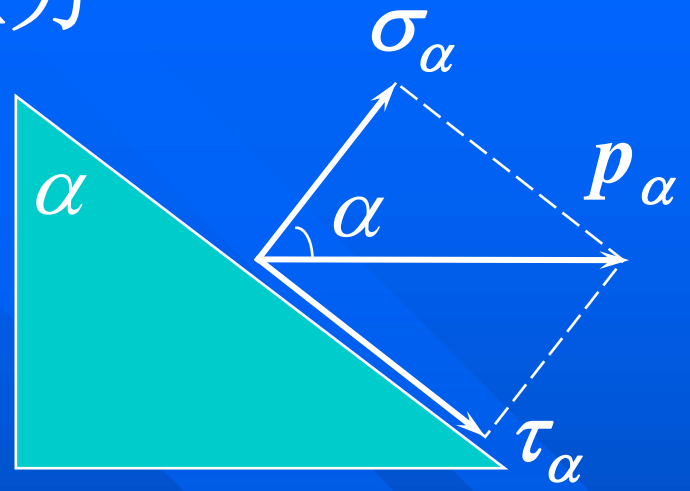
$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= p_\alpha \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}$$



α角斜截面上的正应力和切应力

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$



◆ 正负号规定

α的正负号：从横截面的法线到斜截面的法线，逆时针为正，顺时针为负。

σ_α的正负号：拉应力为正，压应力为负。

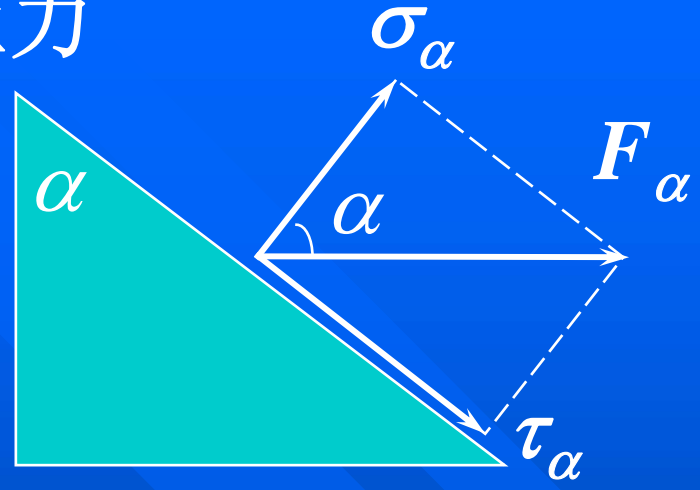
τ_α的正负号：绕所保留的截面，顺时针为正，逆时针为负。

◆ 讨论

α角斜截面上的正应力和切应力

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$



◆ 讨论

α=0°时(横截面): $\sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha \max} = \sigma, \quad \tau_{\alpha} = 0$

α=45° (斜截面): $\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma}{2}, \quad \tau_{\alpha} = \tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma}{2}$

α=90° (纵向截面): $\sigma_{\alpha} = 0, \quad \tau_{\alpha} = 0$

结论: σ_{\max} 发生在横截面上, $\sigma_{\max} = \sigma$

τ_{\max} 发生在α=45°斜截面上, $\tau_{\max} = \sigma / 2$

§ 2.4 材料在拉伸时的力学性能

材料在外力作用下表现出的变形、破坏等方面的特性称材料的力学性能，也称机械性质。

研究材料的力学性能的目的是确定材料的一些重要性能指标，以作为计算材料**强度**、**刚度**和选用材料的依据。

材料的机械性质通过试验测定，通常为常温静载试验。试验方法应按照国家标准进行。

- 试件和试验设备
 - ◆ 试件 l —— 标距
 d —— 直径



- 试件和试验设备
- ◆ 试件 l —— 标距
 d —— 直径



$l = 10d$

—— 长试件;

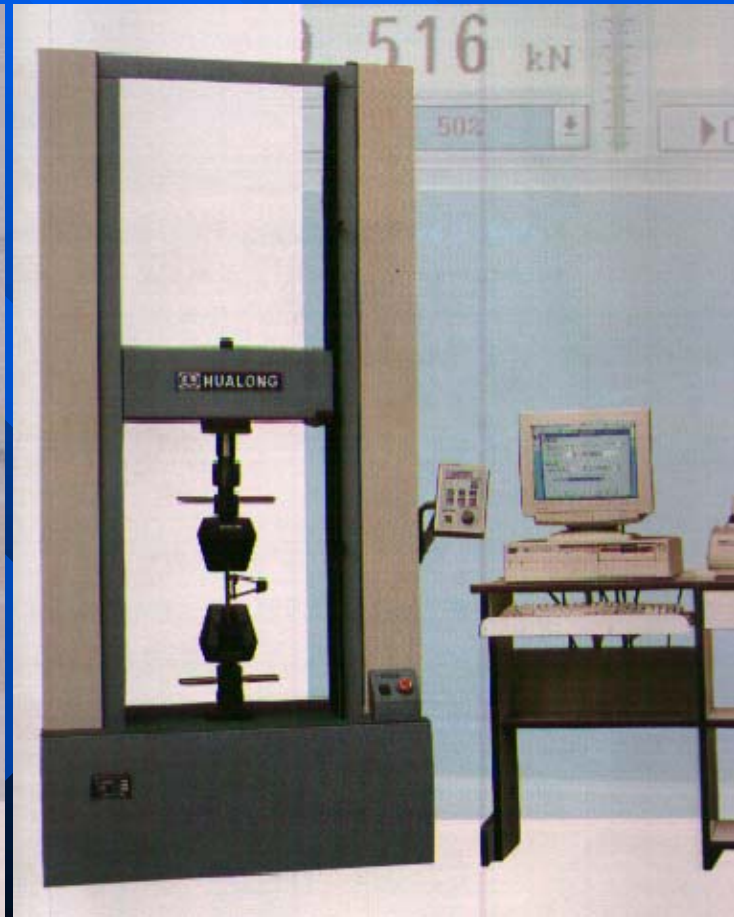
$l = 5d$

—— 短试件。

- ◆ 试验设备

液压式试验机

电子拉力试验机



工程上常用的材料品种很多，材力中主要讨论金属材料。

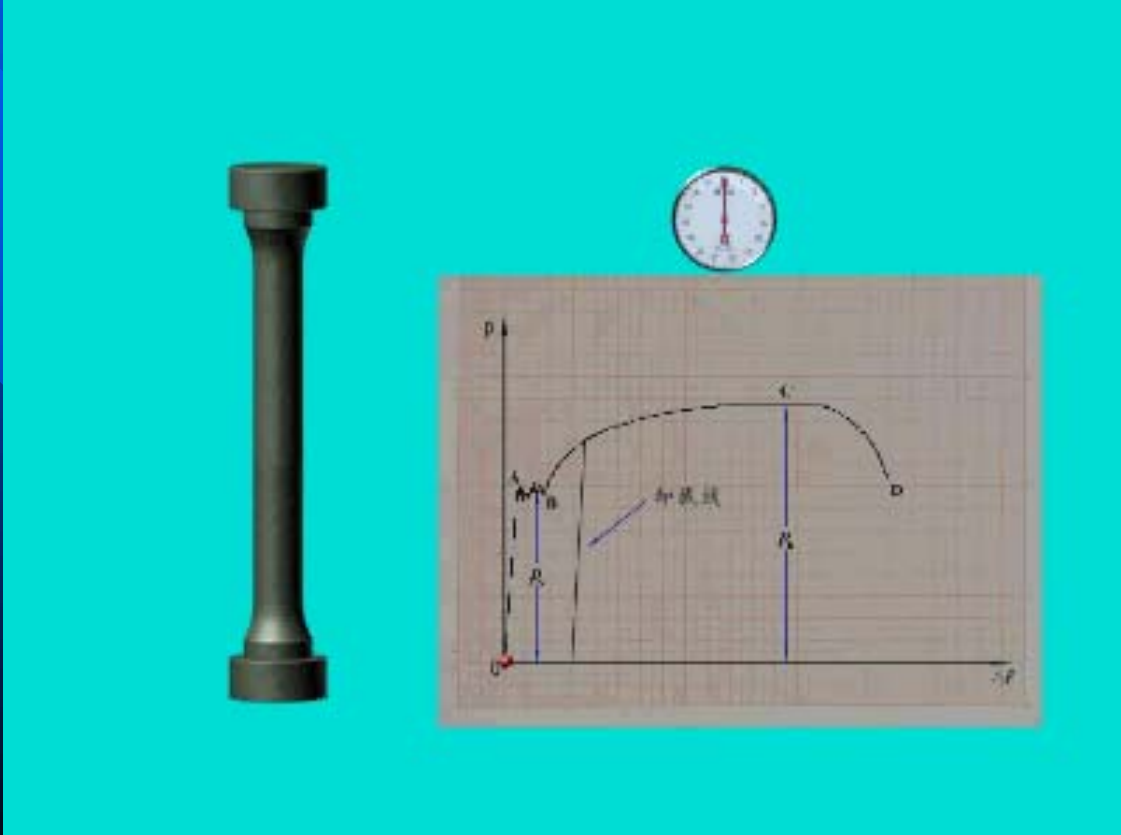
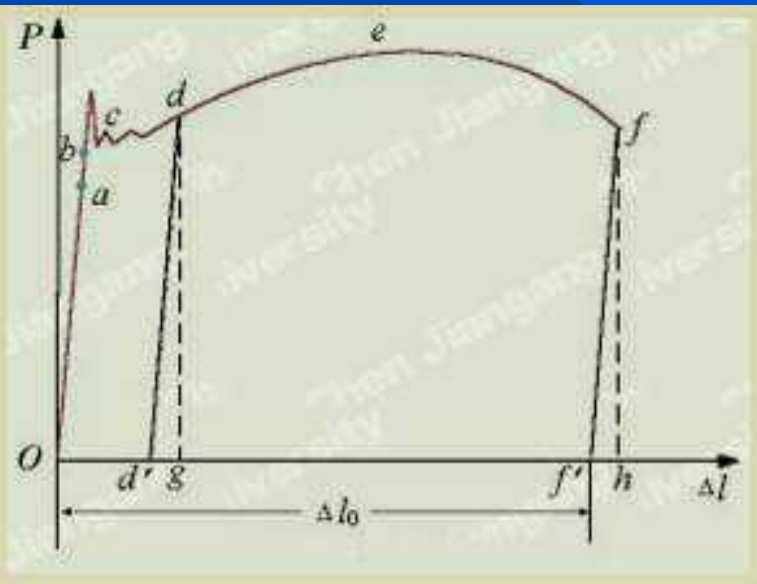
└─┬─┘

塑性材料 —— 典型代表: 低碳钢

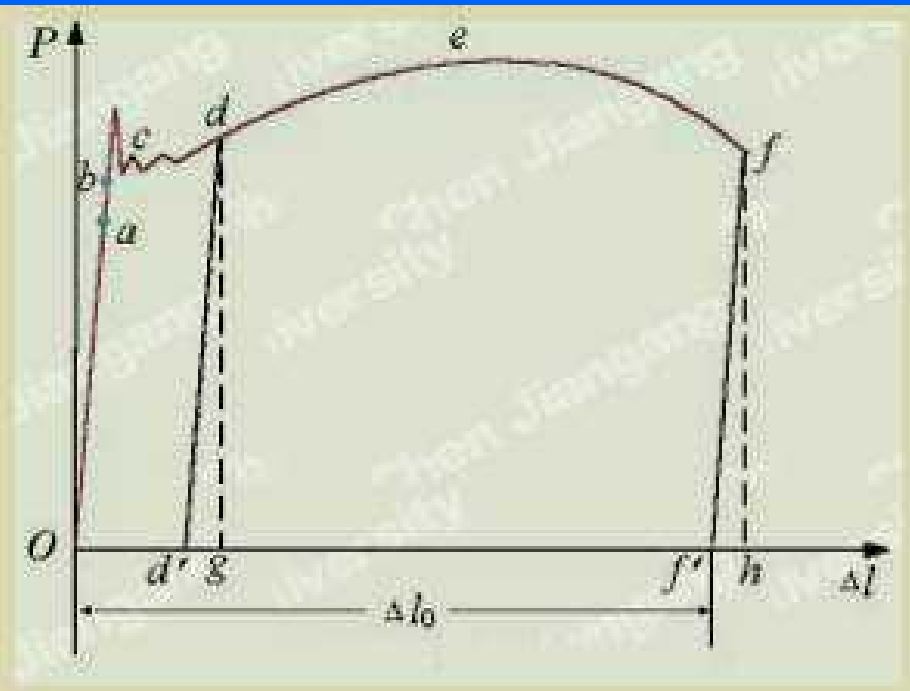
脆性材料 —— 典型代表: 铸铁

一、低碳钢拉伸时的力学性能

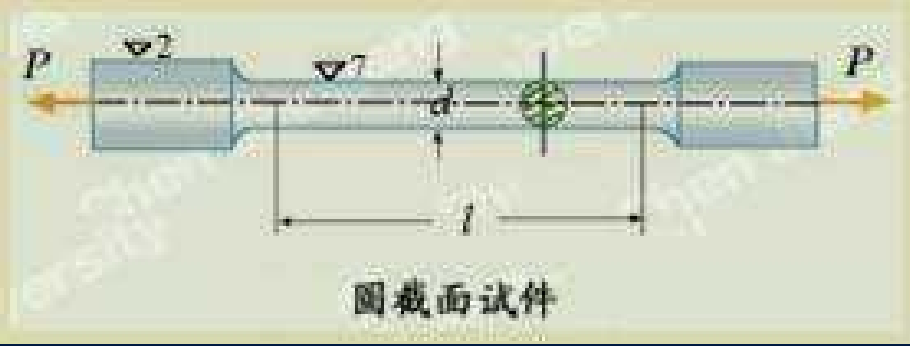
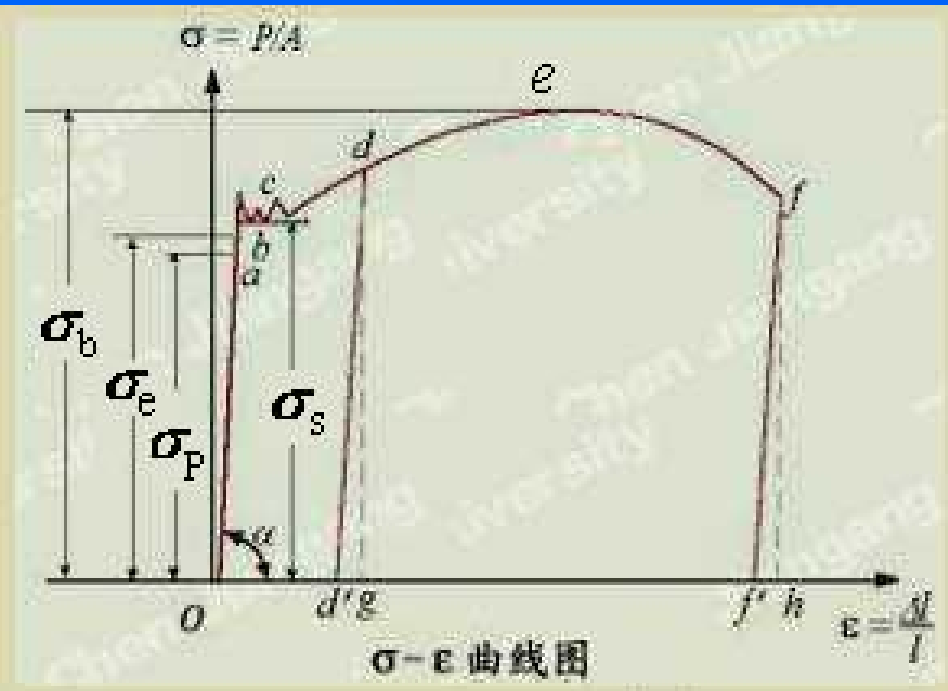
◆ 拉伸图



◆ 拉伸图



◆ σ - ϵ 曲线



◆ σ - ε 曲线

1 弹性阶段

(ob 段)

oa 段: 为直线

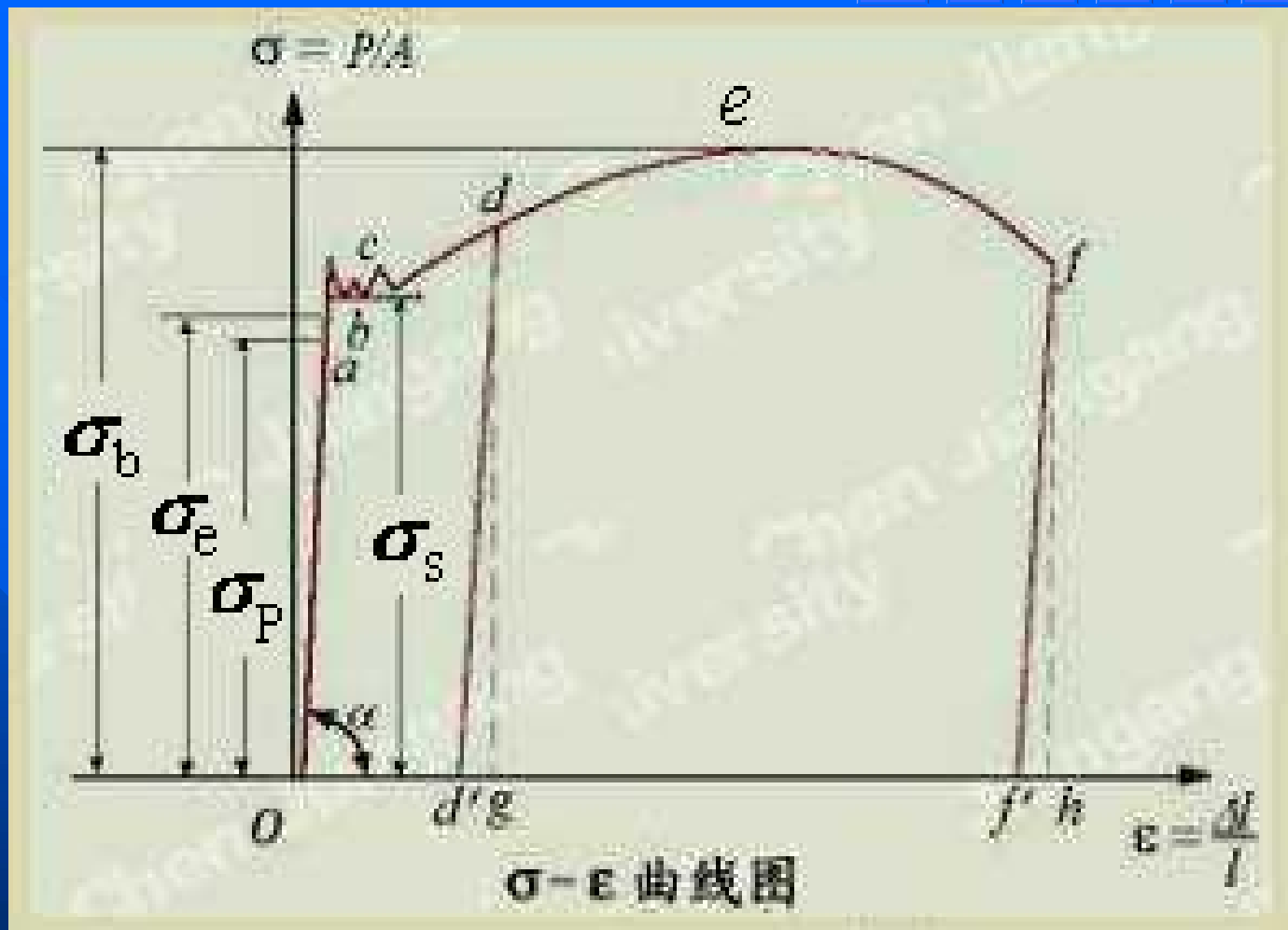
a 点的应力:

比例极限 σ_P

直线斜率:

$$E = \tan \alpha$$

→ $\sigma = E\varepsilon$



这就是著名的胡克定律。当 $\sigma < \sigma_P$ 时成立。

E —弹性模量，具有应力的量纲，常用单位: GPa

ab段:

不再是直线。
在**b**点以下，
卸载后变形
可以完全恢
复。

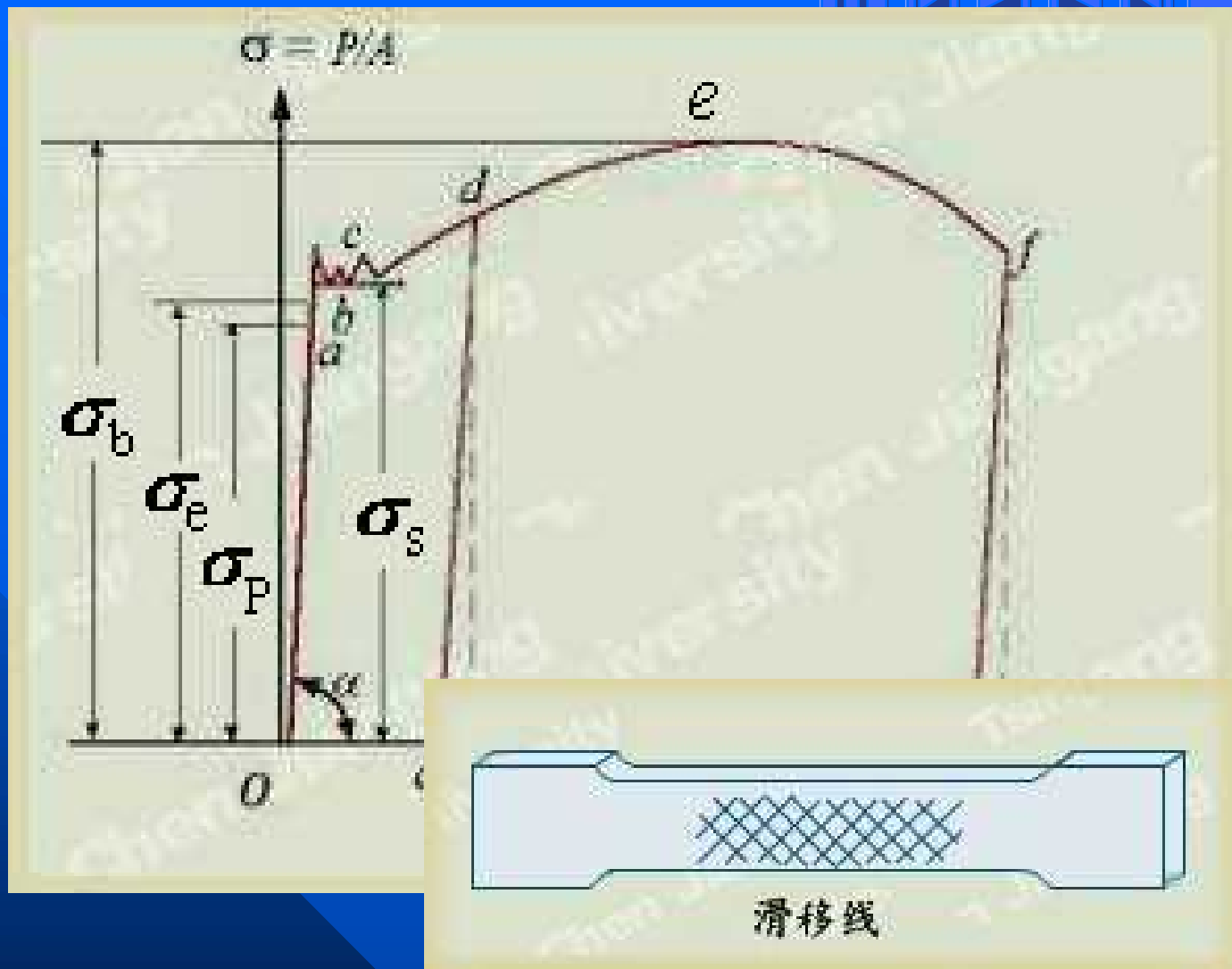
— **弹性变形**

b点的应力:

弹性极限 σ_e

当应力超过 σ_e 时，将产生**塑性变形**。

2 屈服阶段(**bc**段) **屈服极限** σ_s — 强度的重要指标



3 强化阶段 (ce段)

恢复抵抗变形的能力
——强化。

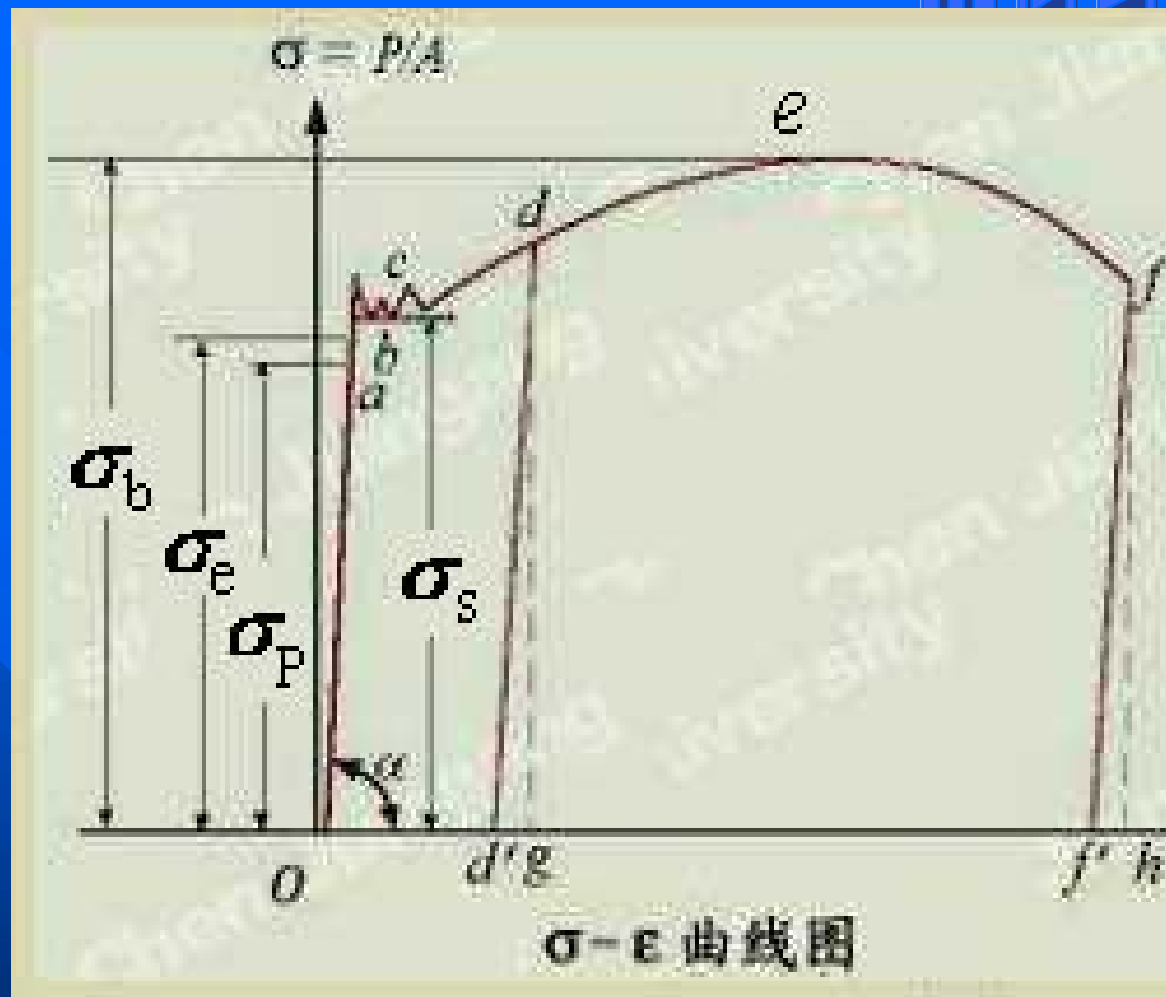
e 点的应力:

强度极限 σ_b

——强度的
另一重要指标。

4 局部变形阶段(ef 段)

颈缩现象。名义应力 $\sigma = \frac{P}{A}$ 下降。



5 延伸率和断面收缩率

为度量材料塑性变形的能力，定义两个指标。

◆ 延伸率
$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\%$$



这里， l 为试件标线间的标距， l_1 为试件拉断后量得的标线间的长度。

通常， $\delta > 5\%$ 的材料，为塑性材料；

$\delta < 5\%$ 的材料，为脆性材料。

◆ 断面收缩率
$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$$

这里， A 为试件原横截面面积， A_1 为试件拉断后颈缩处的最小截面面积。

6 卸载定律和冷作硬化

◆ 卸载过程

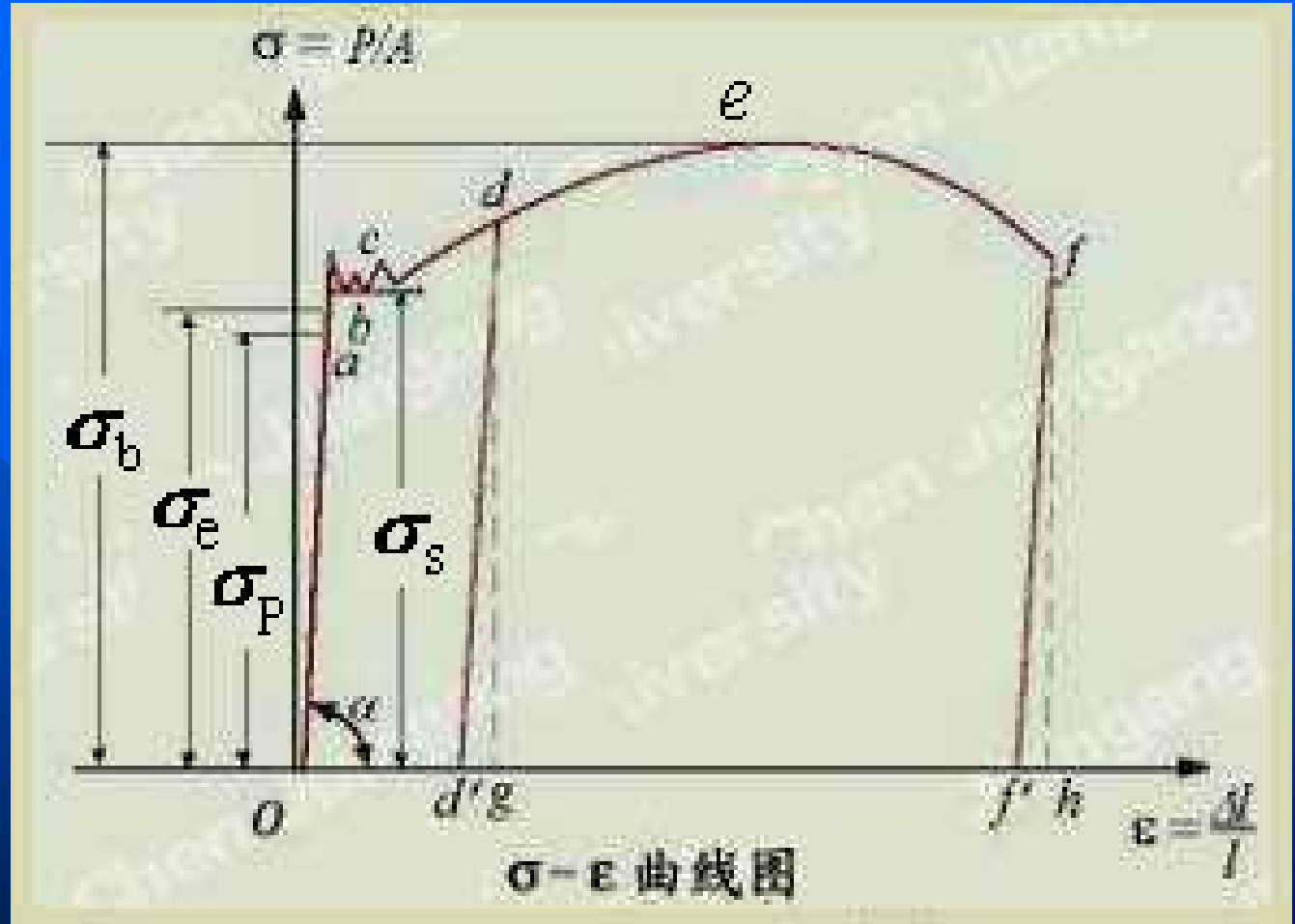
dd' 为直线

$dd' \parallel ao$

$og = od' + d'g$

$d'g$ ——
弹性应变;

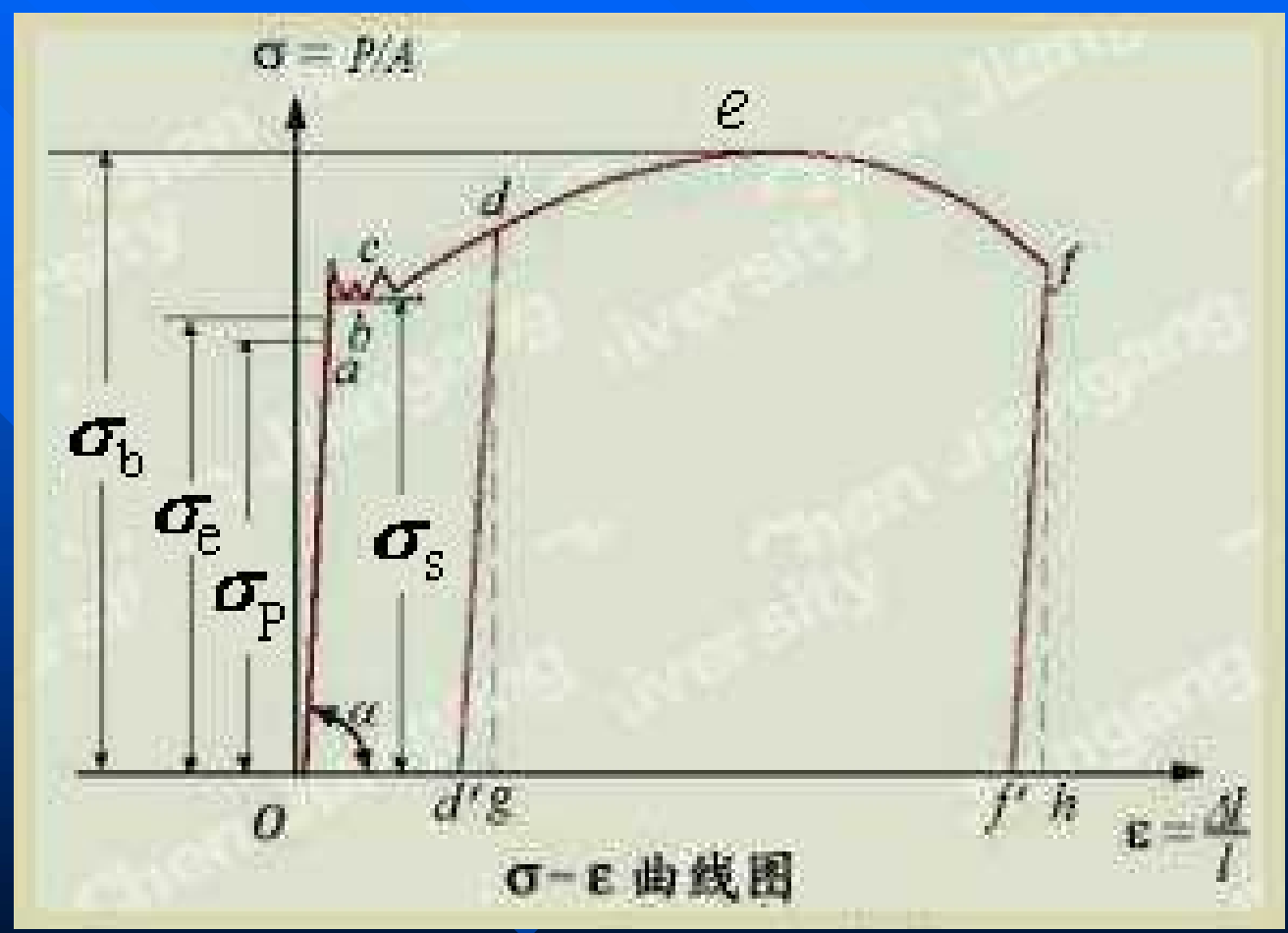
od' ——
塑性应变。



◆ 卸载后再加载 先沿 $d'd$ 直线，然后沿 def 曲线。
在 $d'd$ 段满足胡克定律。

◆ 卸载后再加载 先沿 $d'd$ 直线，然后沿 def 曲线。
在 $d'd$ 段满足胡克定律。

◆ 冷作硬化
材料进入强化阶段以后的卸载再加载历史，使材料的比例极限提高，而塑性变形能力降低，这一现象称为冷作硬化。



二、其它塑性材料拉伸时的力学性能

与低碳钢相比

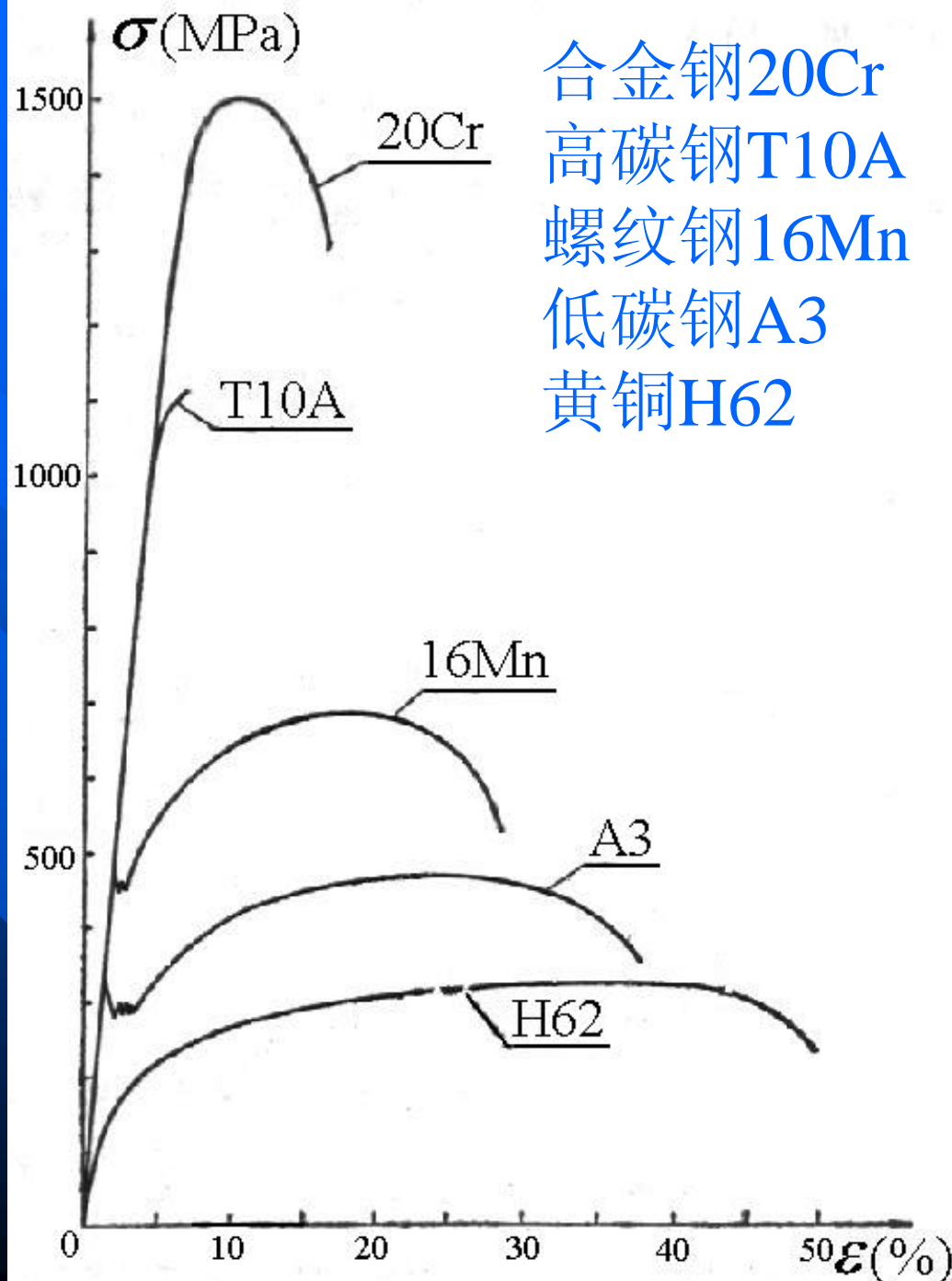
共同之处:

断裂破坏前经历较大的塑性变形;

不同之处:

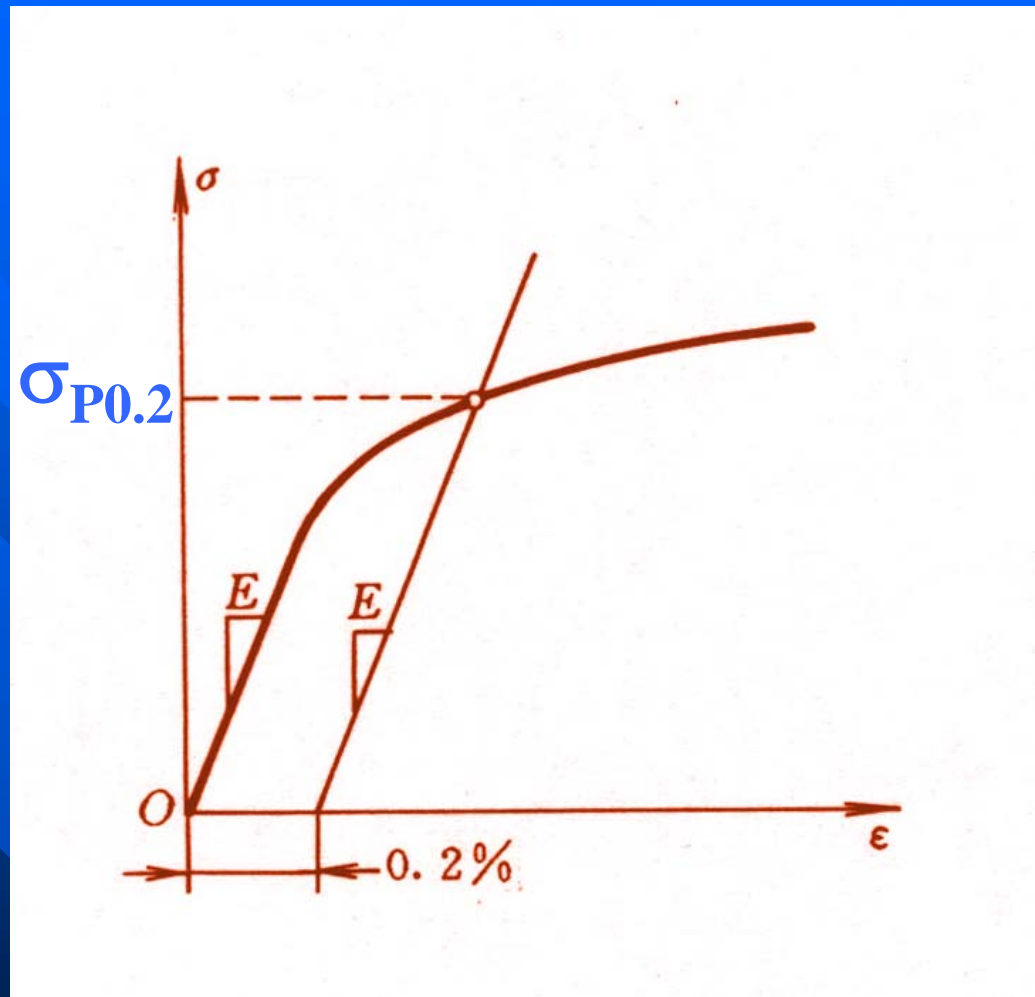
有的没有明显的四个阶段。

◆ 名义屈服极限

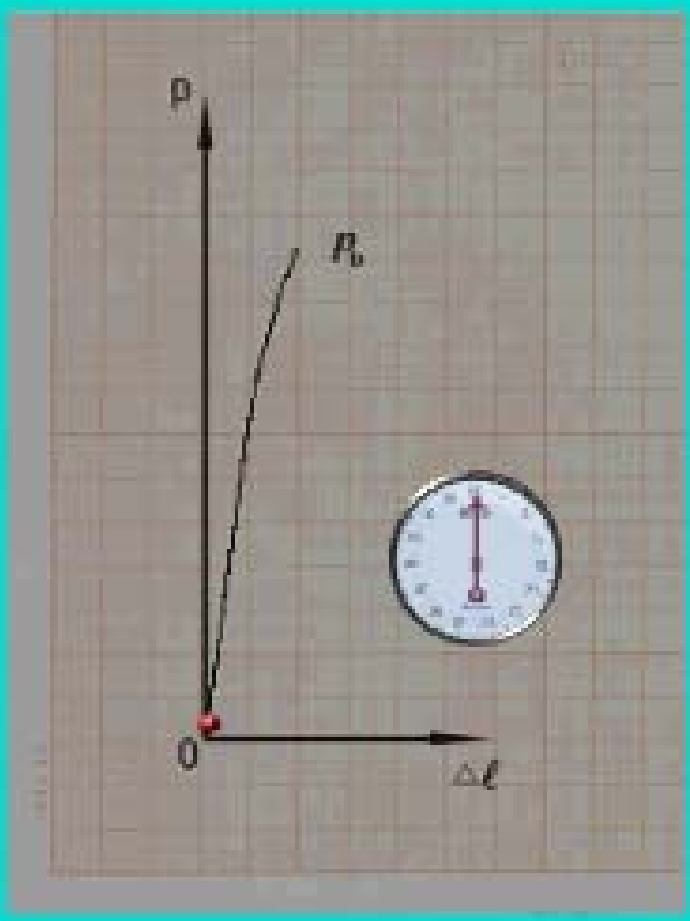
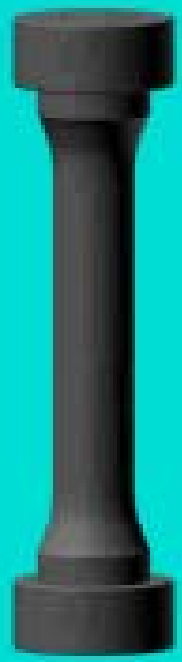


◆ 名义屈服极限

对于没有明显的屈服阶段的塑性材料，工程上规定：用产生0.2%塑性应变时的应力作屈服指标，称为名义屈服极限，用 $\sigma_{P0.2}$ 表示。



三、铸铁拉伸时的力学性能



$\sigma - \varepsilon$ 曲线

- 特点：
 - ◆ 无屈服过程；
 - ◆ 拉断前，塑性变形很小；
 - ◆ 强度指标：
强度极限 σ_b
 - ◆ 抗拉强度很低。
- 弹性模量
割线弹性模量

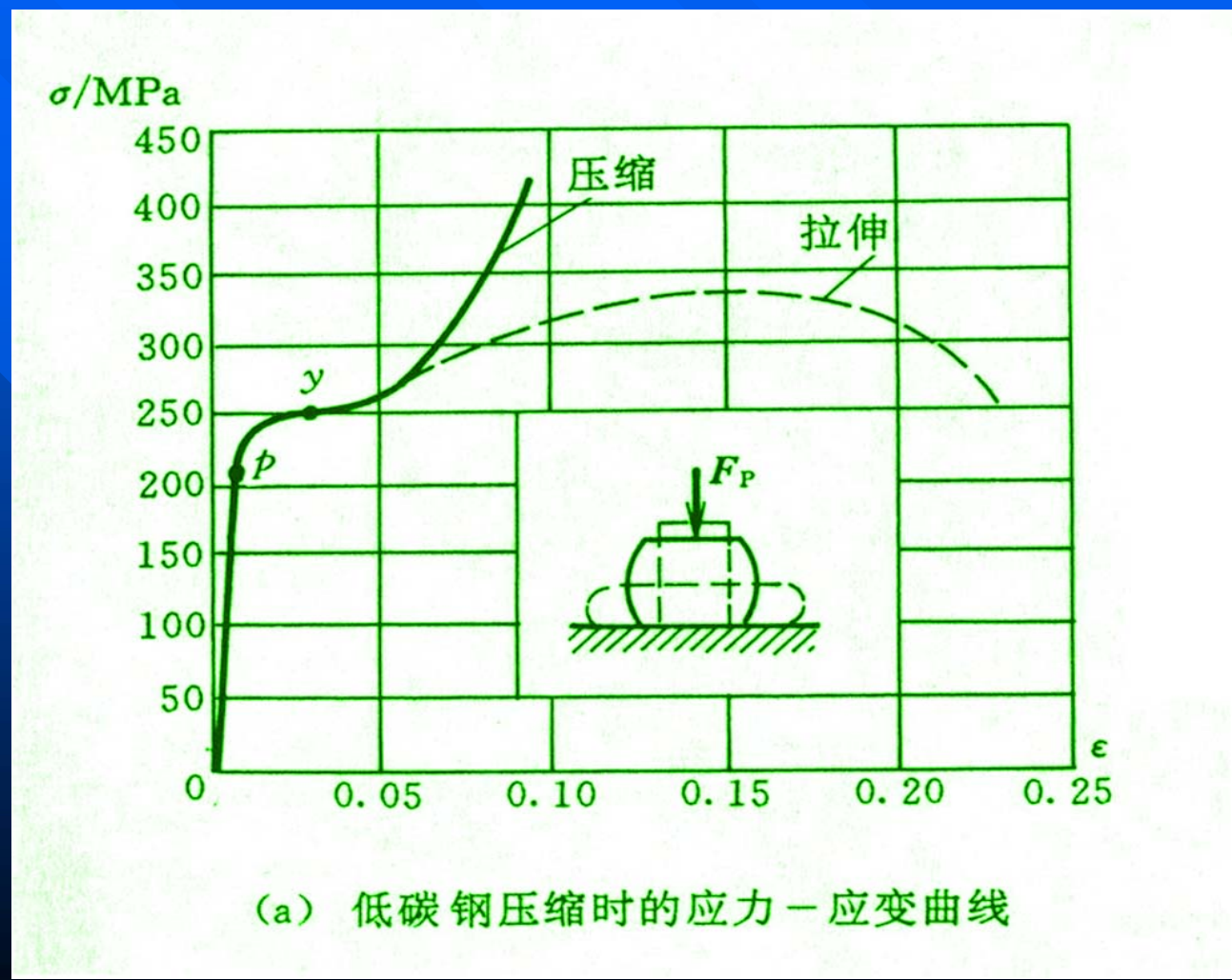


§ 2.5 材料在压缩时的力学性能

金属的压缩试件: 短圆柱, 其高度与直径之比为 1.5~3。

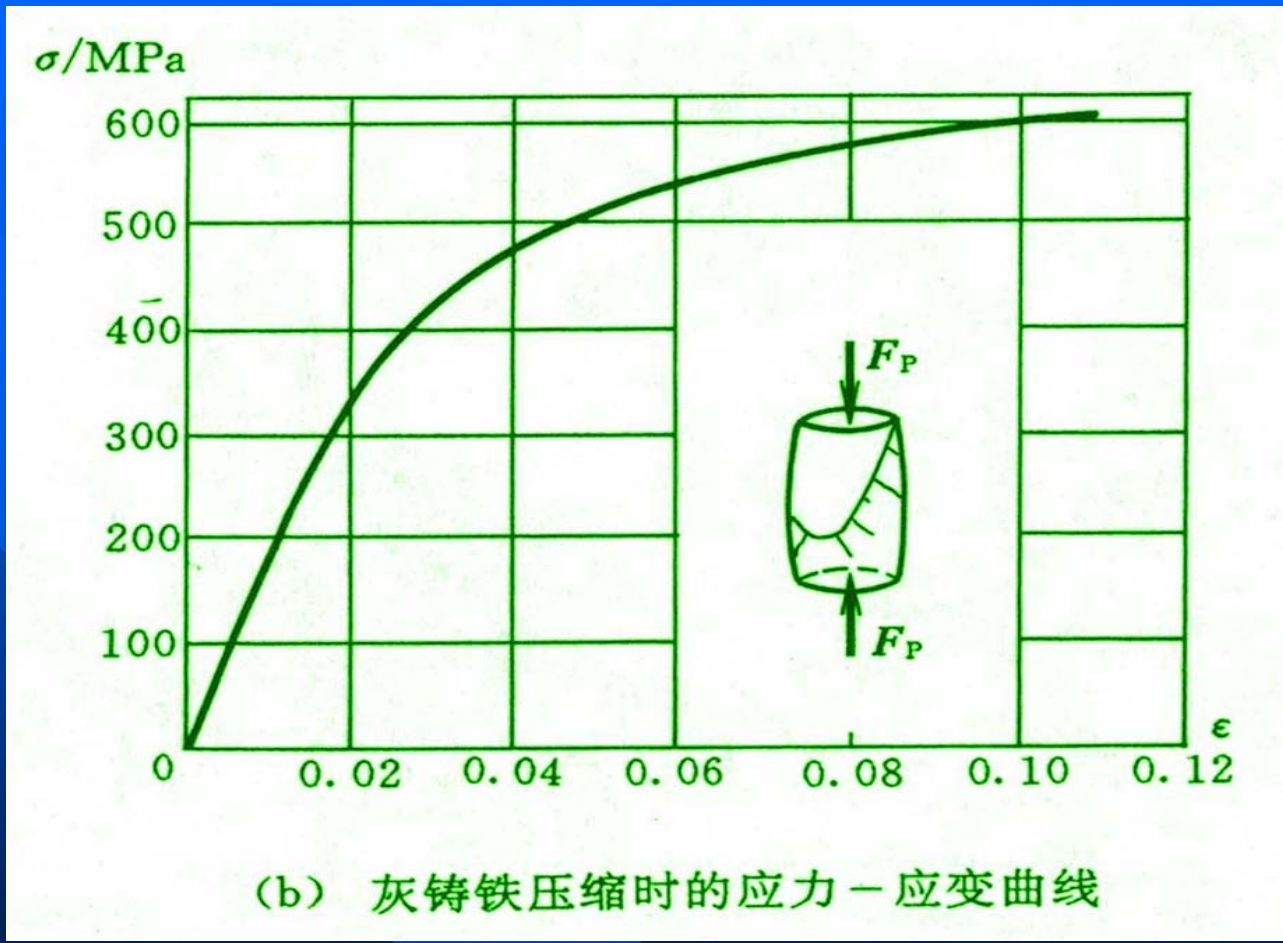
1. 低碳钢压缩时的 $\sigma - \varepsilon$ 曲线

- E, σ_s 与拉伸时大致相同。
- 因越压越扁, 得不到 σ_b 。



2. 铸铁压缩时的 $\sigma - \varepsilon$ 曲线

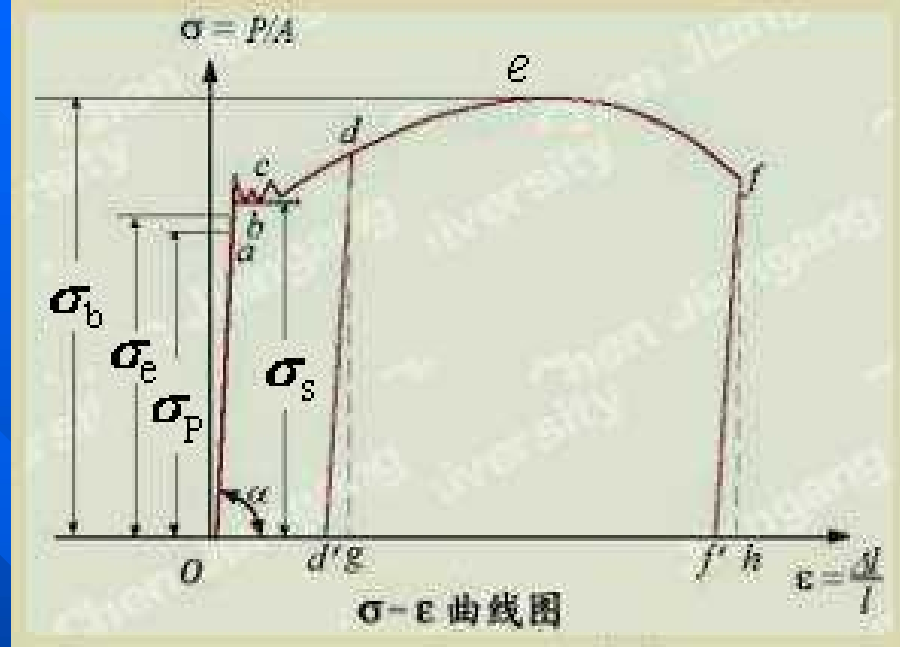
- 抗压强度极限比抗拉强度极限高4~5倍。
- 破坏断面与轴线大约成 $45^\circ \sim 55^\circ$ 的倾角。



● 小结

◆ 材料的力学性能指标

- 👉 弹性指标 比例极限 σ_P
弹性极限 σ_e
- 👉 强度指标 屈服极限 σ_s
强度极限 σ_b



名义屈服极限 $\sigma_{P0.2}$

👉 塑性指标 延伸率 δ , 断面收缩率 ψ

👉 弹性模量 E

- ◆ 塑性材料抗拉强度和抗压强度相同。
- ◆ 脆性材料抗压强度远大于抗拉强度。

几种常用材料的主要力学性能

表 2.1 几种常用材料的主要力学性能

材料名称	牌 号	σ_s (MPa)	σ_b (MPa)	δ_5 %
普通碳素钢	A3	216~235	373~461	25~27
	A5	255~275	490~608	19~21
优质碳素结构钢	40	333	569	19
	45	353	598	16
普通低合金结构钢	16Mn	274~343	471~510	19~21
	15MnV	333~412	490~549	17~19
合金结构钢	20Cr	539	834	10
	40Cr	785	981	9
碳素铸钢	ZG35	275	490	16
可锻铸铁	KTZ45-5	275	441	5
球墨铸铁	QT45-5	324	441	5
灰 铸 铁	HT15-33		拉 98.1~274 压 637	

注: (1) 表中 δ_5 是指 $l=5d$ 的标准试样的延伸率。

§ 2.6 温度和时间对材料力学性能的影响

几个概念：

- 1、高温对材料的力学性能有影响；
- 2、长期在高温下工作的构件，会产生蠕变和松弛；
- 3、蠕变：应力保持不变，应变随时间增加而增加的现象；
- 4、松弛：应变保持不变，应力随时间增加而降低的现象。

§ 2.7 失效、安全系数和强度计算

1 失效

失效 — 由于材料的力学行为而使构件丧失正常功能的现象。

- 强度失效 — 由于断裂或屈服引起的失效
- 刚度失效 — 由于过量的弹性变形引起的失效
- 屈曲失效(失稳)
— 由于突然失去平衡状态而引起的失效
- 其它失效形式
 - ◆ 疲劳失效
 - ◆ 蠕变失效
 - ◆ 松弛失效

2 拉压构件材料的强度失效判据

◆ 塑性材料 以屈服极限 σ_s 为失效判据

◆ 脆性材料

受拉时：以强度极限 $\sigma_{b拉}$ 为失效判据；

受压时：以强度极限 $\sigma_{b压}$ 为失效判据。

3 许用应力与安全系数

◆ 塑性材料 $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$ n_s — 塑性材料的安全系数

◆ 脆性材料 $[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$ n_b — 脆性材料的安全系数

3 许用应力与安全系数

- ◆ 塑性材料 $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$
- ◆ 脆性材料 $[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$

● 安全系数的确定

- ◆ 材料素质（质量、均匀性、塑性、脆性）；
- ◆ 载荷情况（峰值载荷、动静、不可预见性）；
- ◆ 构件简化过程和计算方法的精确度；
- ◆ 零件的重要性、制造维修的难易程度；
- ◆ 减轻重量（飞机、手提设备等）。

一般地： 塑性材料： $n_s = 1.2 \sim 2.5$

脆性材料： $n_b = 2 \sim 3.5$

4 拉压构件的强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$$

注意：对于非等直杆， σ_{\max} 还与截面积A有关。

● 强度问题的三种类型

◆ 强度校核

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$$

◆ 截面设计

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$$

◆ 确定许可载荷

$$N_{\max} \leq A[\sigma]$$

例 1 (上次课的例3)

已知：角钢截面面积为 10.86 cm^2 ， $P = 130 \text{ kN}$ ， $\alpha = 30^\circ$ 。

角钢的 $[\sigma] = 150 \text{ MPa}$ 。

求：校核 AB 杆的强度。

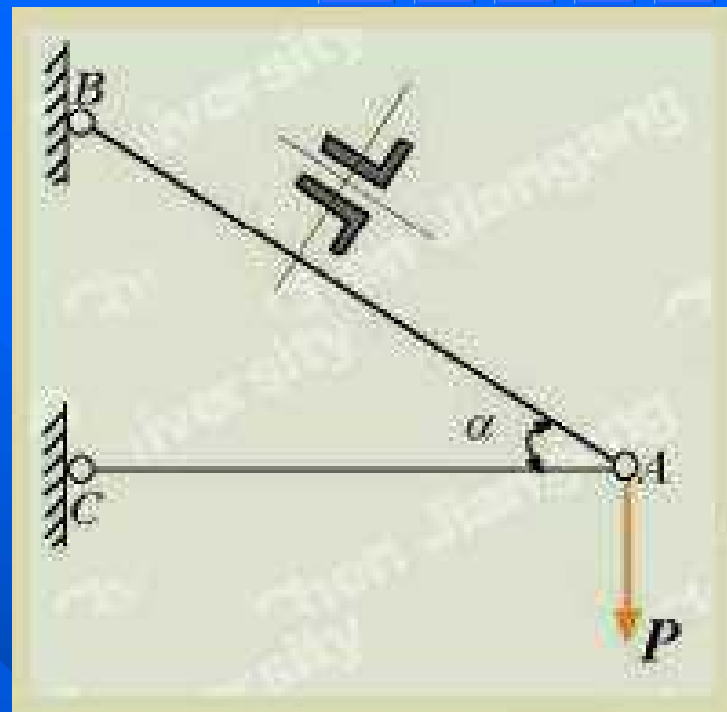
解：已求出 AB 杆的应力

$$\sigma = \frac{N_{AB}}{A} = 119.7 \text{ (MPa)}$$

显然有： $\sigma < [\sigma]$

所以 AB 杆满足强度要求。

讨论：若 $P = 150 \text{ kN}$ ，则： $\sigma = 161.3 \text{ MPa} > [\sigma]$



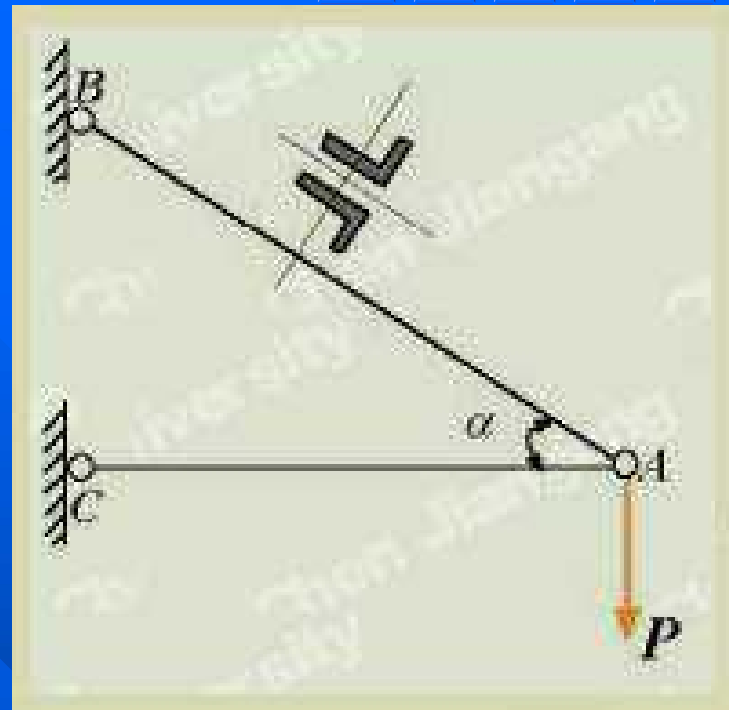
讨论:

若 $P=150\text{kN}$, 则:

$$\sigma = 161.3 \text{ MPa} > [\sigma]$$

强度不足, 应重新设计。

- ◆ 减小 P 的值
- ◆ 增大 AB 杆的面积
- ◆ 工程中允许工作应力 σ 略大于许用应力 $[\sigma]$, 但不得超过 $[\sigma]$ 的 5% 。



例 2 气动夹具 (书例2.4)

已知: $D=140\text{mm}$,
 $p=0.6\text{MPa}$, 20钢,
 $[\sigma]=80\text{MPa}$ 。

求: 活塞杆直径 d 。

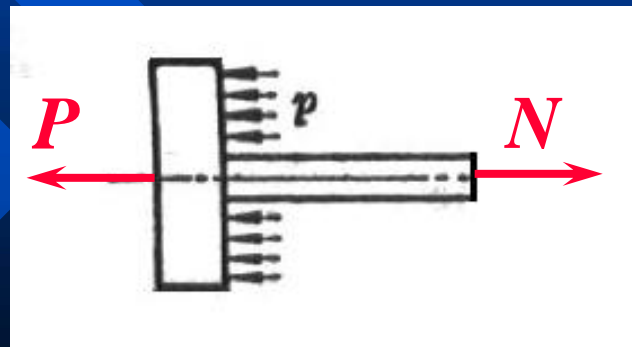
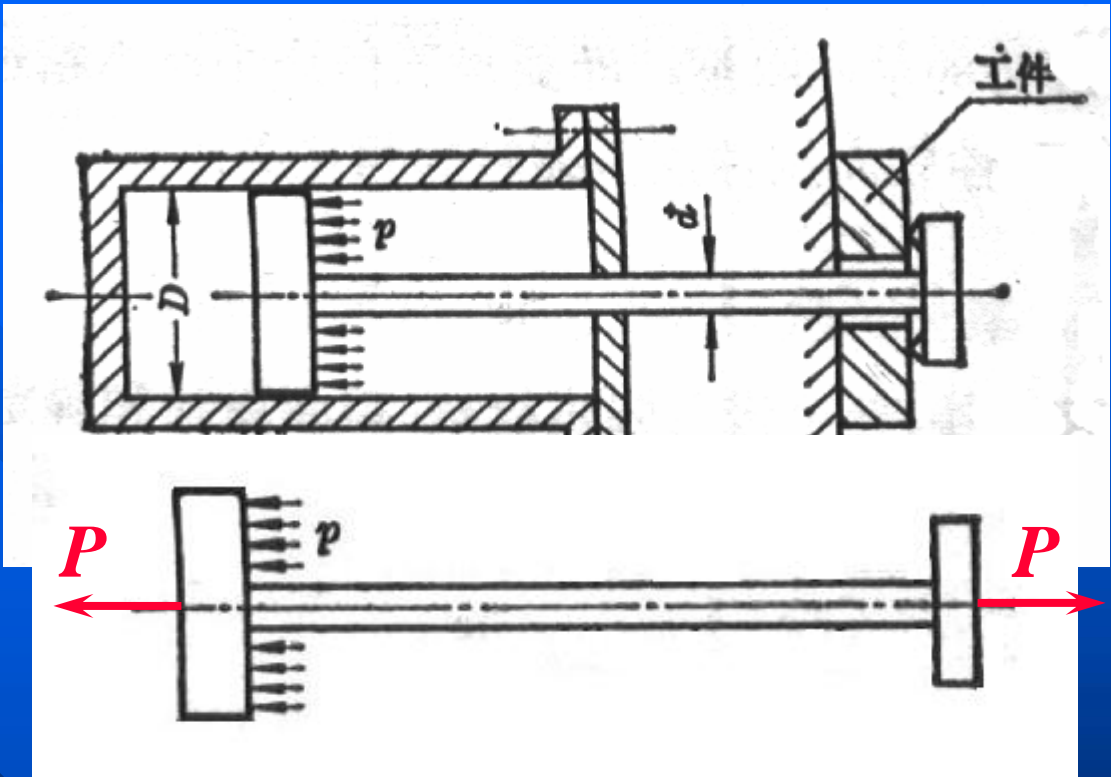
解: 取杆, 受力如图。

近似地

$$P = p \times \frac{\pi}{4} D^2 = 9.24 \text{ kN}$$

轴力 $N = P = 9.24 \text{ kN}$

所以 $A \geq \frac{N}{[\sigma]} = 1.16 \times 10^{-4} \text{ m}^2$



所以

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} = 1.16 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

而 $A = \frac{\pi d^2}{4}$

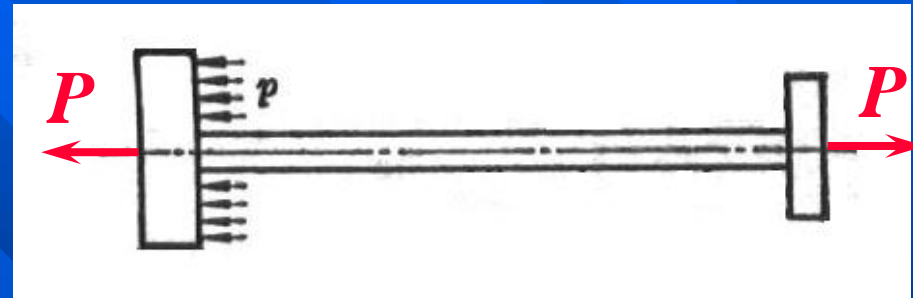
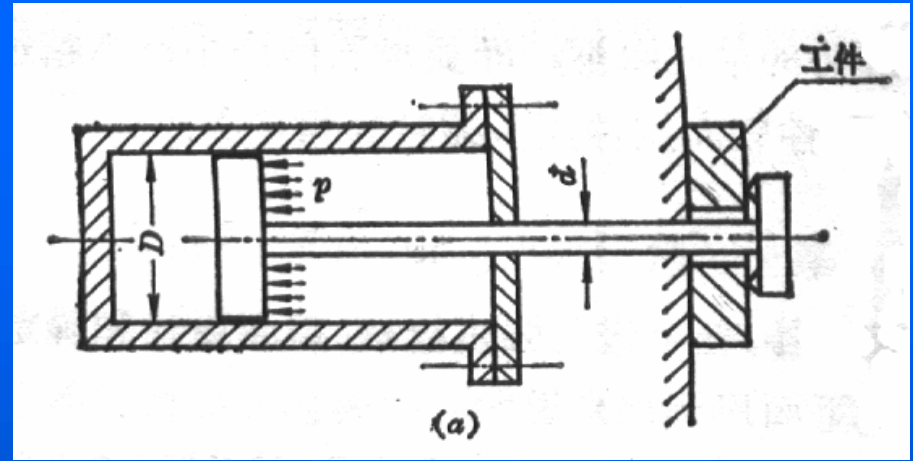
→ $d \geq 0.0122 \text{ m}$

取 $d = 12.1 \text{ mm}$

◆再校核 $P = p \times \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 9.023 \text{ kN}$

$$\sigma = \frac{P}{A} = 79.72 \text{ MPa} < 80 \text{ MPa} = [\sigma]$$

满足强度条件，所以就取： $d = 12.1 \text{ mm}$



例3 杆系结构

已知：杆AB、AC材料相同， $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ ， $A_1 = 706.9 \text{ mm}^2$ ， $A_2 = 314 \text{ mm}^2$ 。

求：许可载荷 P 。

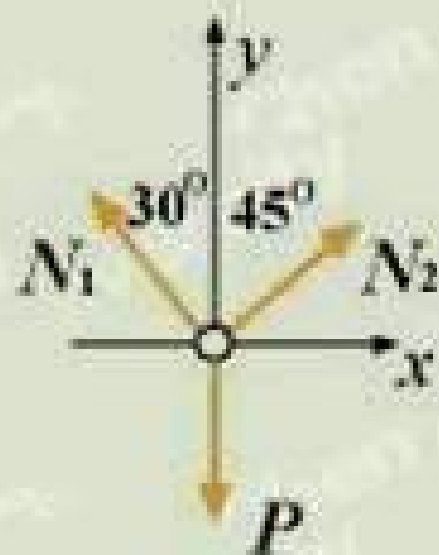
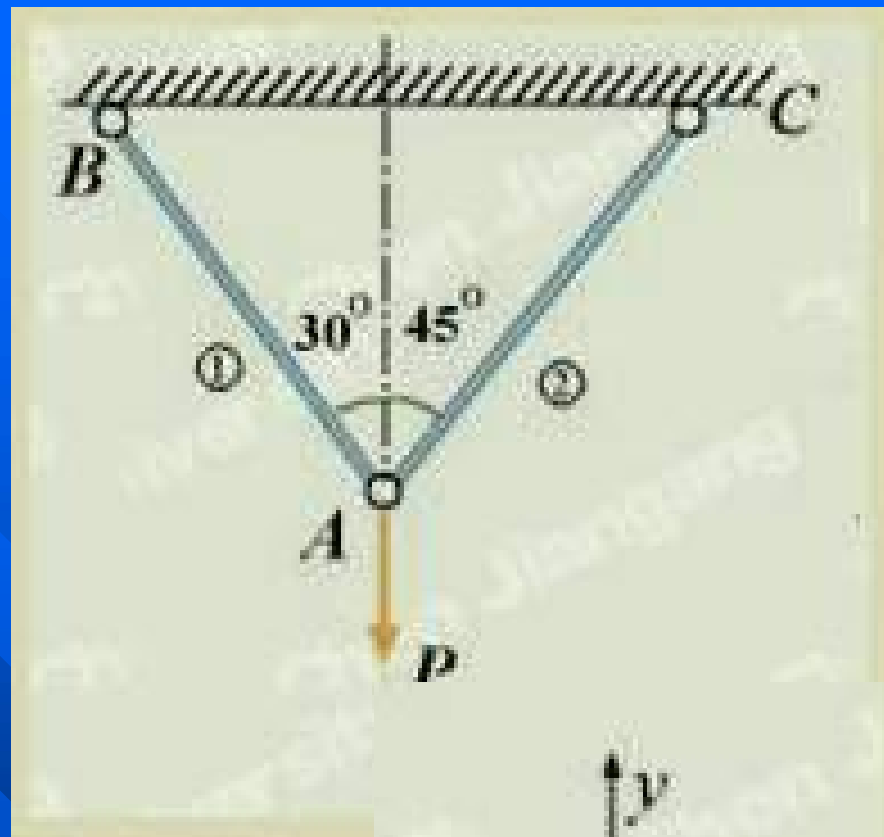
解：◆求轴力

取节点A，受力如图。

$$\sum X = 0 \quad N_2 \sin 45^\circ = N_1 \sin 30^\circ$$

$$\sum Y = 0 \quad N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 45^\circ = P$$

$$\rightarrow N_1 = \frac{2P}{1 + \sqrt{3}} = 0.732P$$



$$\sum X = 0 = N_1 \sin 30^\circ = N_2 \sin 45^\circ$$

$$\sum Y = 0 \quad N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 45^\circ = P$$

$$\rightarrow N_1 = \frac{2P}{1 + \sqrt{3}} = 0.732P \quad N_2 = \frac{\sqrt{2}P}{1 + \sqrt{3}} = 0.518P$$

◆ 由强度条件

$$(1) \quad N_1 \leq A_1 \cdot [\sigma] = 113.1 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad 0.732P \leq 113.1 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \quad P_1 \leq 154.5 \text{ kN}$$

$$(2) \quad N_2 \leq A_2 \cdot [\sigma] = 50.3 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad 0.518P \leq 50.3 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \quad P_2 \leq 97.1 \text{ kN}$$

所以，许可载荷 P 的值应为： $P = 97.1 \text{ kN}$

◆ 由强度条件

(1) $N_1 \leq A_1 \cdot [\sigma] = 113.1 \text{ kN} \Rightarrow 0.732P \leq 113.1 \text{ kN}$
 $\Rightarrow P_1 \leq 154.5 \text{ kN}$

(2) $N_2 \leq A_2 \cdot [\sigma] = 50.3 \text{ kN} \Rightarrow 0.518P \leq 50.3 \text{ kN}$
 $\Rightarrow P_2 \leq 97.1 \text{ kN}$

所以，许可载荷 P 的值应为： $P = 97.1 \text{ kN}$

● 法二

◆ 列出平衡方程同前

◆ 由强度条件

(1) $N_1 \leq A_1 \cdot [\sigma] = 113.1 \text{ kN} \Rightarrow N_{1\max} = 113.1 \text{ kN}$

(2) $N_2 \leq A_2 \cdot [\sigma] = 50.3 \text{ kN} \Rightarrow N_{2\max} = 50.3 \text{ kN}$

● 法二

◆ 列出平衡方程同前

◆ 由强度条件

$$(1) \quad N_1 \leq A_1 \cdot [\sigma] = 113.1 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad N_{1\max} = 113.1 \text{ kN}$$

$$(2) \quad N_2 \leq A_2 \cdot [\sigma] = 50.3 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad N_{2\max} = 50.3 \text{ kN}$$

将上两式代入平衡方程，可解出许可载荷 P ：

$$P = 133.5 \text{ kN}$$

显然，与前一种方法解出的 $P = 97.1 \text{ kN}$ 不同。

为什么？哪一种方法不正确？错在哪里？

第二种方法不正确。两杆中的内力，并不一定

同时达到最大允许轴力。

§ 2.8 轴向拉伸或压缩时的变形

- 直杆轴向拉压时变形的特点



1. 轴向变形

轴向变形量 $\Delta l = l_1 - l$

下面建立变形与力之间的关系

- 应变 $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$

1. 轴向变形 轴向变形量



$$\Delta l = l_1 - l$$

• 应变 $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$

• 应力 $\sigma = \frac{N}{A}$

• 应力-应变关系 $\sigma = E\epsilon \longrightarrow \frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$

$\longrightarrow \Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{Pl}{EA}$ —— 胡克定律的另一种形式

EA —— 抗拉(或抗压)刚度

注意: 上式只在应力不超过比例极限时成立。

2. 横向变形

横向变形量

$$\Delta b = b_1 - b$$

- 横向应变
- 试验证明

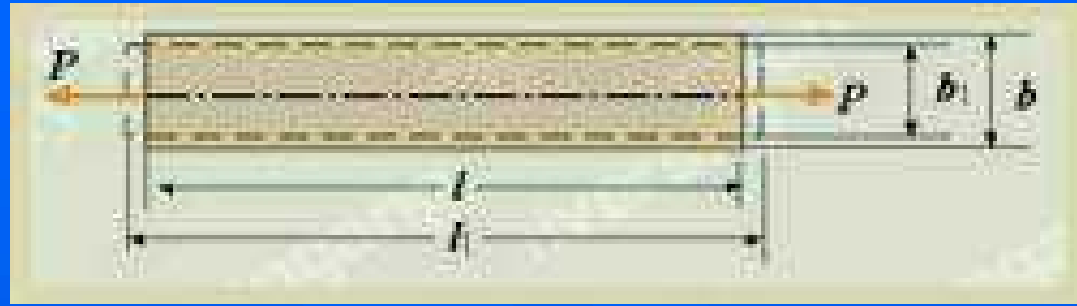
$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$$

当应力不超过比例极限时，有：

$$\left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| = \mu$$

μ ——泊松比或横向变形系数。

上式也可写成： $\varepsilon' = -\mu\varepsilon$



几种常用材料的 E 和 μ 的约值(表2.2)

材料名称	E (GPa)	μ
碳 钢	196~216	0.24~0.28
合 金 钢	186~206	0.25~0.30
灰 铸 铁	78.5~157	0.23~0.27
铜 及 其 合 金	72.6~128	0.31~0.42
铝 合 金	70	0.33

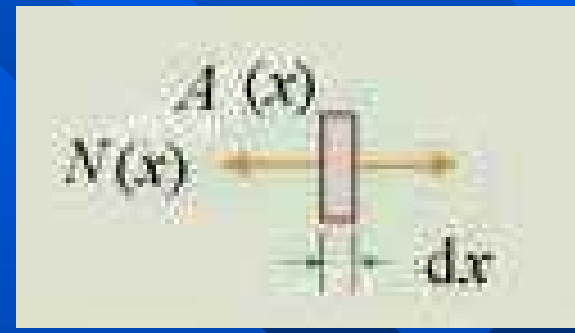
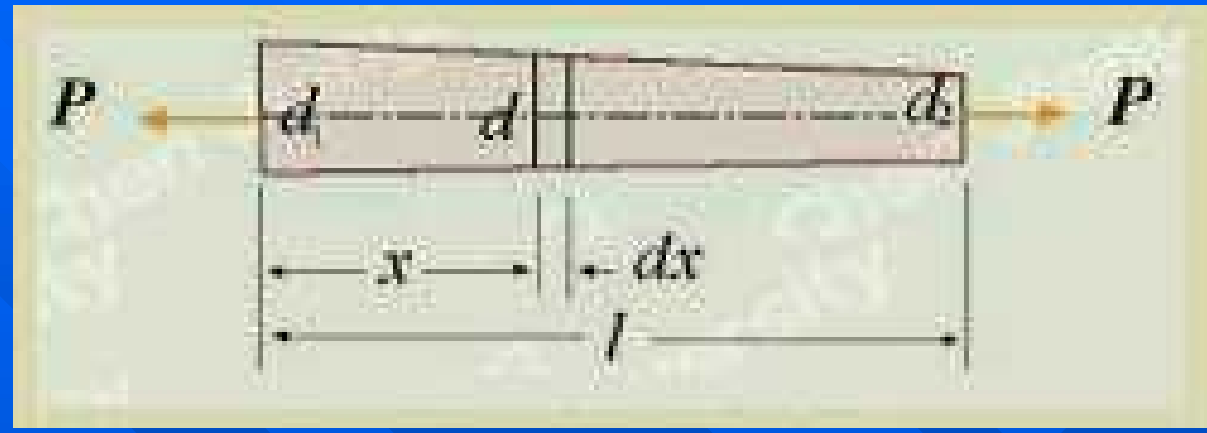
3. 变截面杆的轴向变形

取一微段，
微段的伸长

$$d(\Delta l) = \frac{N(x) dx}{EA(x)}$$

积分得：

$$\Delta l = \int_l \frac{N(x) dx}{EA(x)}$$



例 1 变截面杆

已知: BD 段 $A_1=2\text{cm}^2$,
 AD 段 $A_2=4\text{cm}^2$, $P_1=5\text{kN}$,
 $P_2=10\text{kN}$, $E=120\text{GPa}$ 。

图中尺寸为cm。

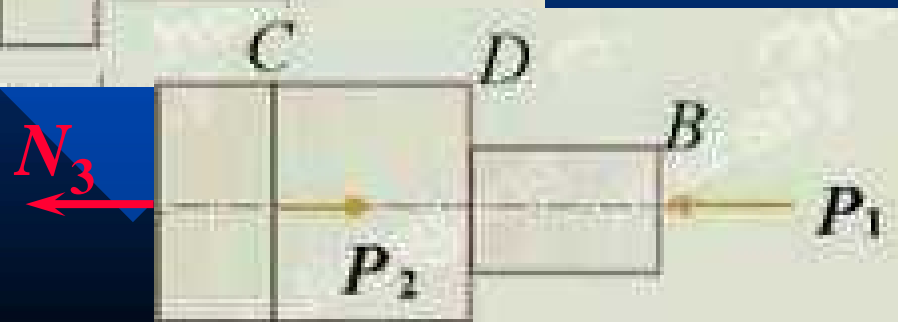
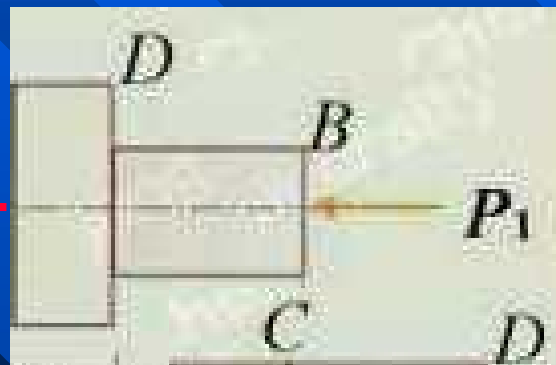
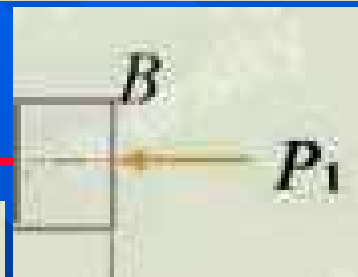
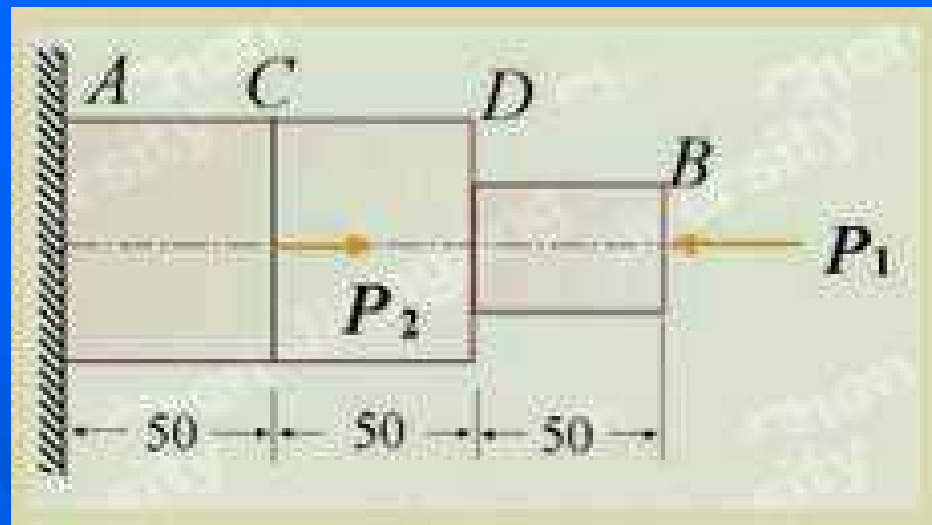
求: AB 杆的变形。

解: (1) 求轴力

BD 段 $N_1 = -5 (\text{kN})$

CD 段 $N_2 = -5 (\text{kN})$

AC 段 $N_3 = 5 (\text{kN})$

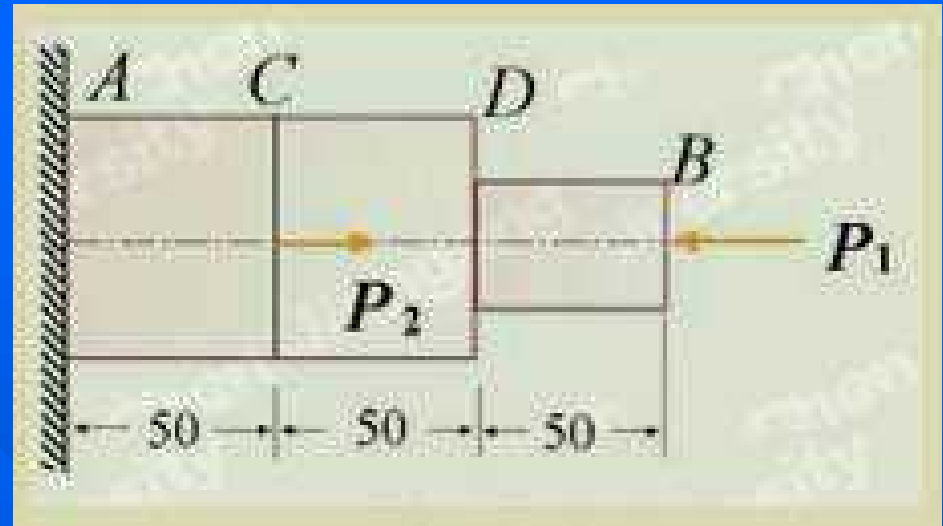


(1) 求轴力

$$BD \text{段} \quad N_1 = -5 \text{ (kN)}$$

$$CD \text{段} \quad N_2 = -5 \text{ (kN)}$$

$$AC \text{段} \quad N_3 = 5 \text{ (kN)}$$



(2) 求变形

$$\Delta l_{BD} = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{-5 \times 10^3 \times 0.5}{120 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4}} = -1.05 \times 10^{-4} \text{ (m)}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{-5 \times 10^3 \times 0.5}{120 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-4}} = -0.52 \times 10^{-4} \text{ (m)}$$

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{5 \times 10^3 \times 0.5}{120 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-4}} = 0.52 \times 10^{-4} \text{ (m)}$$

(2) 求变形

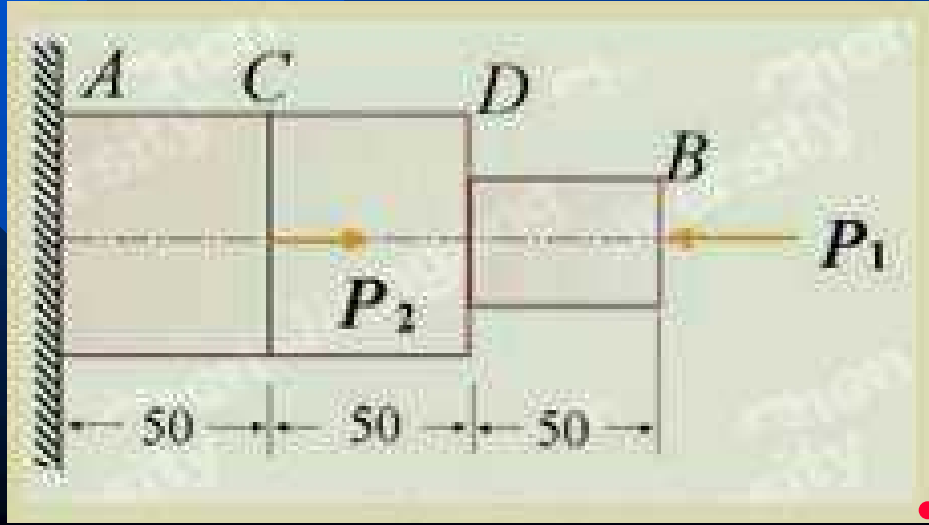
$$\Delta l_{BD} = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{-5 \times 10^3 \times 0.5}{120 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4}} = -1.05 \times 10^{-4} \text{ (m)}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{-5 \times 10^3 \times 0.5}{120 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-4}} = -0.52 \times 10^{-4} \text{ (m)}$$

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{5 \times 10^3 \times 0.5}{120 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-4}} = 0.52 \times 10^{-4} \text{ (m)}$$

AB杆的变形

$$\begin{aligned} \Delta l_{AB} &= \Delta l_{BD} + \Delta l_{CD} + \Delta l_{AC} \\ &= -1.05 \times 10^{-4} \text{ (m)} \end{aligned}$$



例 2 (书例2.7)

已知: BC 杆: $d=20\text{mm}$,
 BD 杆: 8号槽钢。 $[\sigma]=160$
 MPa , $E=200\text{GPa}$, $P=60\text{kN}$ 。

求: 校核强度及 B 点位移。

解: (1) 求轴力

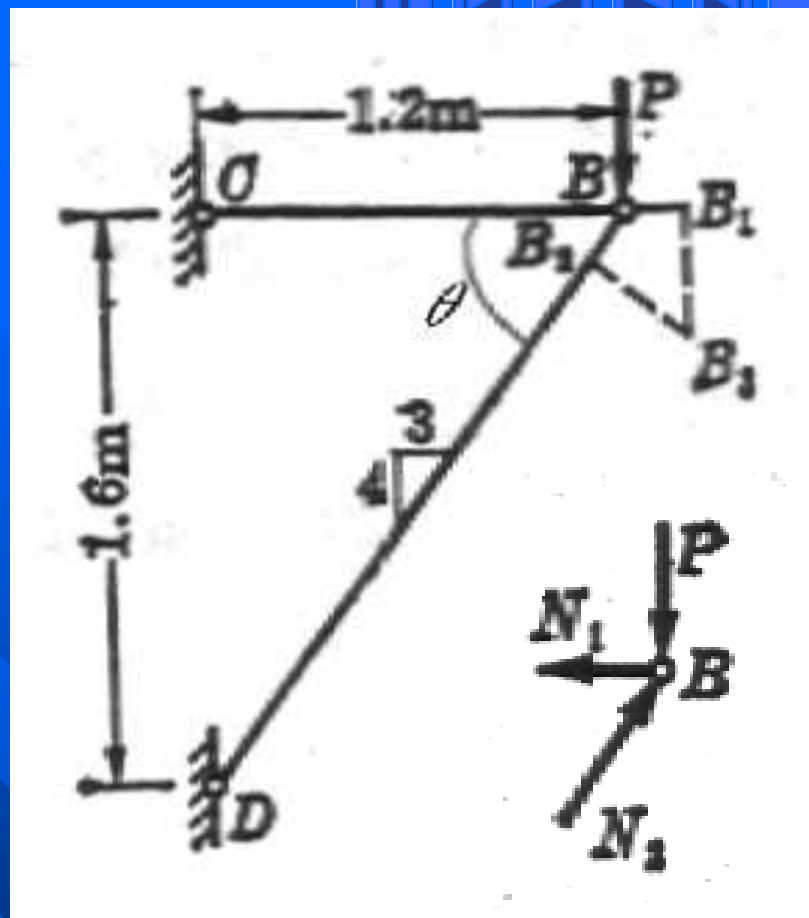
取 B 点 $\rightarrow N_1 = 45(\text{kN})$ (拉)

$N_2 = 75(\text{kN})$ (压)

(2) 计算应力

BC 杆面积 $A_1 = 314 \times 10^{-6} \text{m}^2$

BD 杆面积 查型钢表(p.414)得 $A_2 = 1024.8 \times 10^{-6} \text{m}^2$



(2) 计算应力

BC杆面积 $A_1 = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

BD杆面积 查型钢表得(p. 414)

$$A_2 = 1024.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

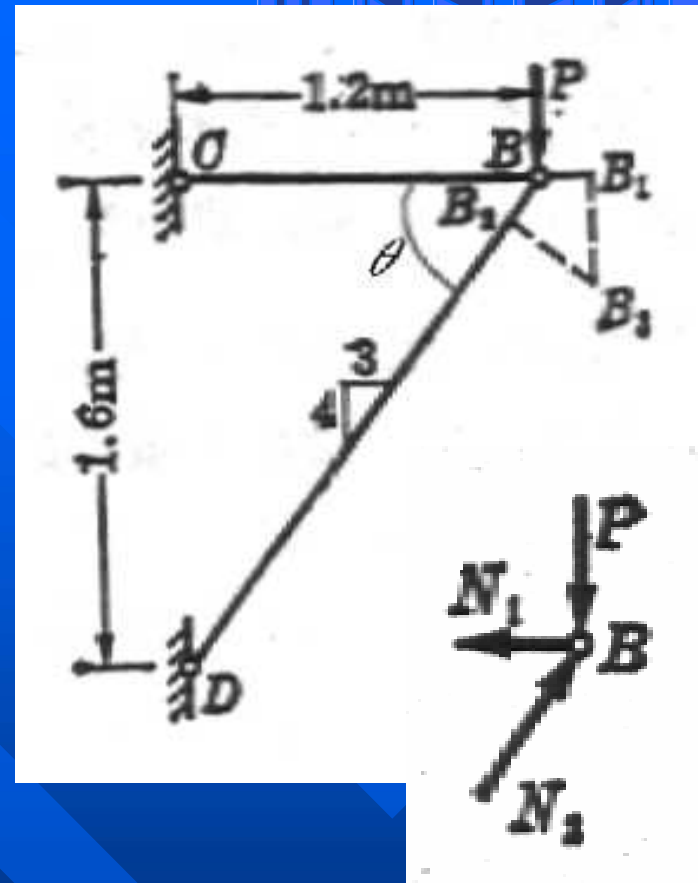
应力

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 143 \text{ MPa} < [\sigma] = 160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 73.2 \text{ MPa} < [\sigma] = 160 \text{ MPa}$$

(3) 计算杆的变形

$$\text{BC杆变形 } \Delta l_1 = BB_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = 0.86 \times 10^{-3} \text{ m}$$



(3) 计算杆的变形

BC杆变形

$$\Delta l_1 = BB_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = 0.86 \times 10^{-3} \text{ m}$$

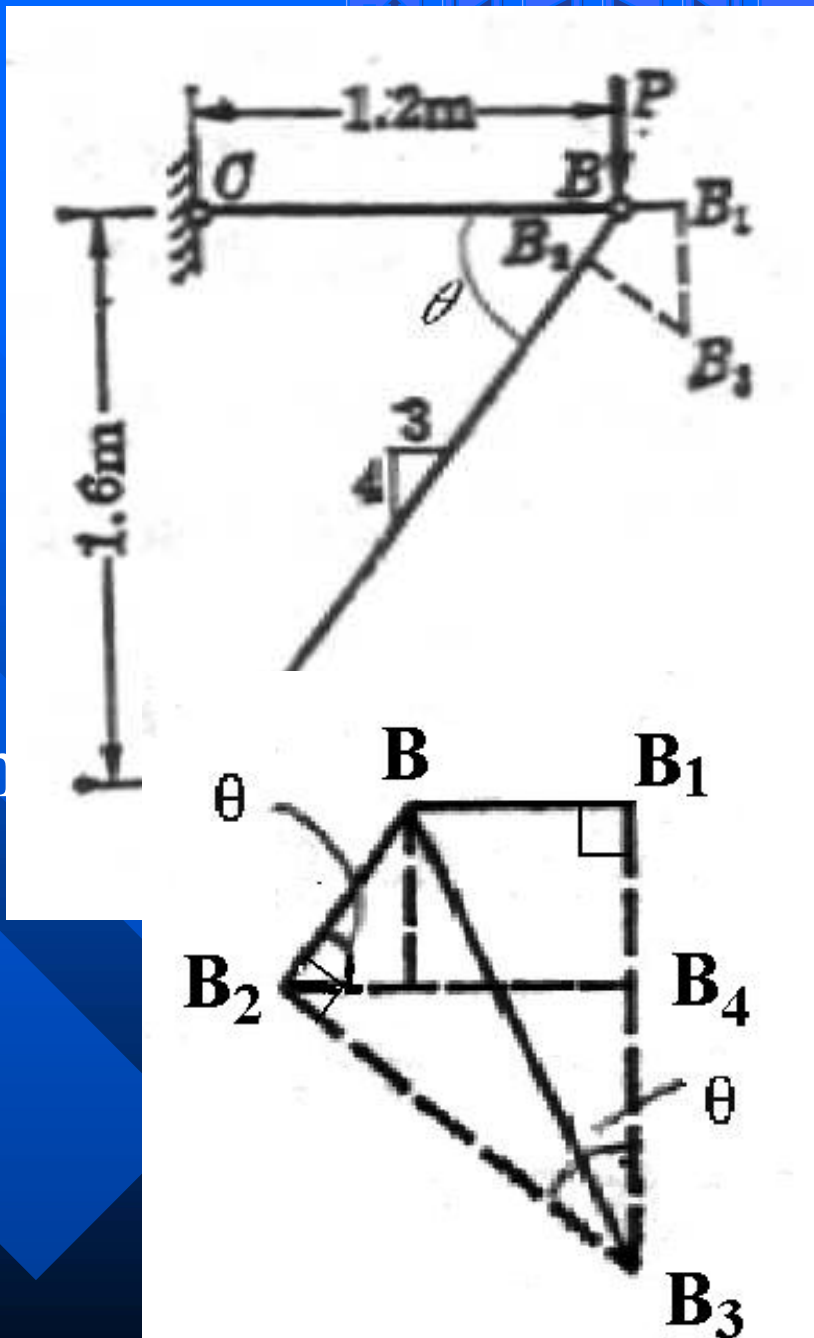
BD杆变形 $l_2 = DB = 2 \text{ m}$

$$\Delta l_2 = BB_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = 0.732 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(4) 计算B点位移

- ◆ 确定变形后B点的位置 B_3
- ◆ B点水平位移

$$BB_1 = \Delta l_1 = 0.86 \times 10^{-3} \text{ m}$$



(4) 计算B点位移

- ◆ 确定变形后B点的位置 B_3
- ◆ B点水平位移

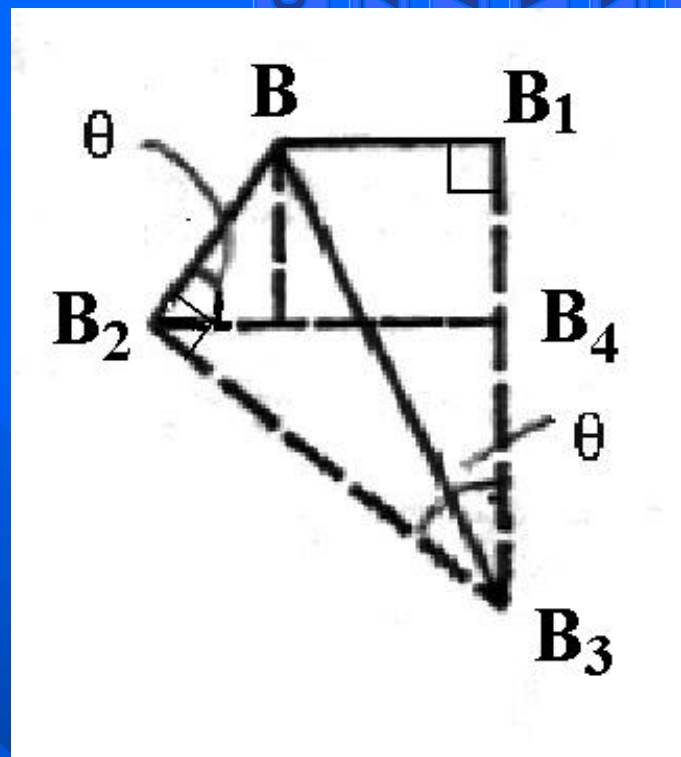
$$BB_1 = \Delta l_1 = 0.86 \times 10^{-3} \text{ m}$$

- ◆ B点垂直位移

$$\begin{aligned} B_1B_3 &= B_1B_4 + B_4B_3 \\ &= BB_2 \sin \theta + B_2B_4 \cot \theta \\ &= \Delta l_2 \sin \theta + (BB_2 \cos \theta + BB_1) \cot \theta \\ &= \Delta l_2 \sin \theta + (\Delta l_2 \cos \theta + \Delta l_1) \cot \theta \end{aligned}$$

$$\sin \theta = 4/5, \quad \cos \theta = 3/5, \quad \cot \theta = 3/4$$

$$\rightarrow B_1B_3 = 1.56 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \rightarrow BB_3 = 1.78 \times 10^{-3} \text{ m}$$



§ 2.9 轴向拉伸或压缩的变形能

1 变形能 弹性体在外力作用下，因变形而储存的能量称为变形能（或应变能）。

- 力的功
- ◆ 力的元功

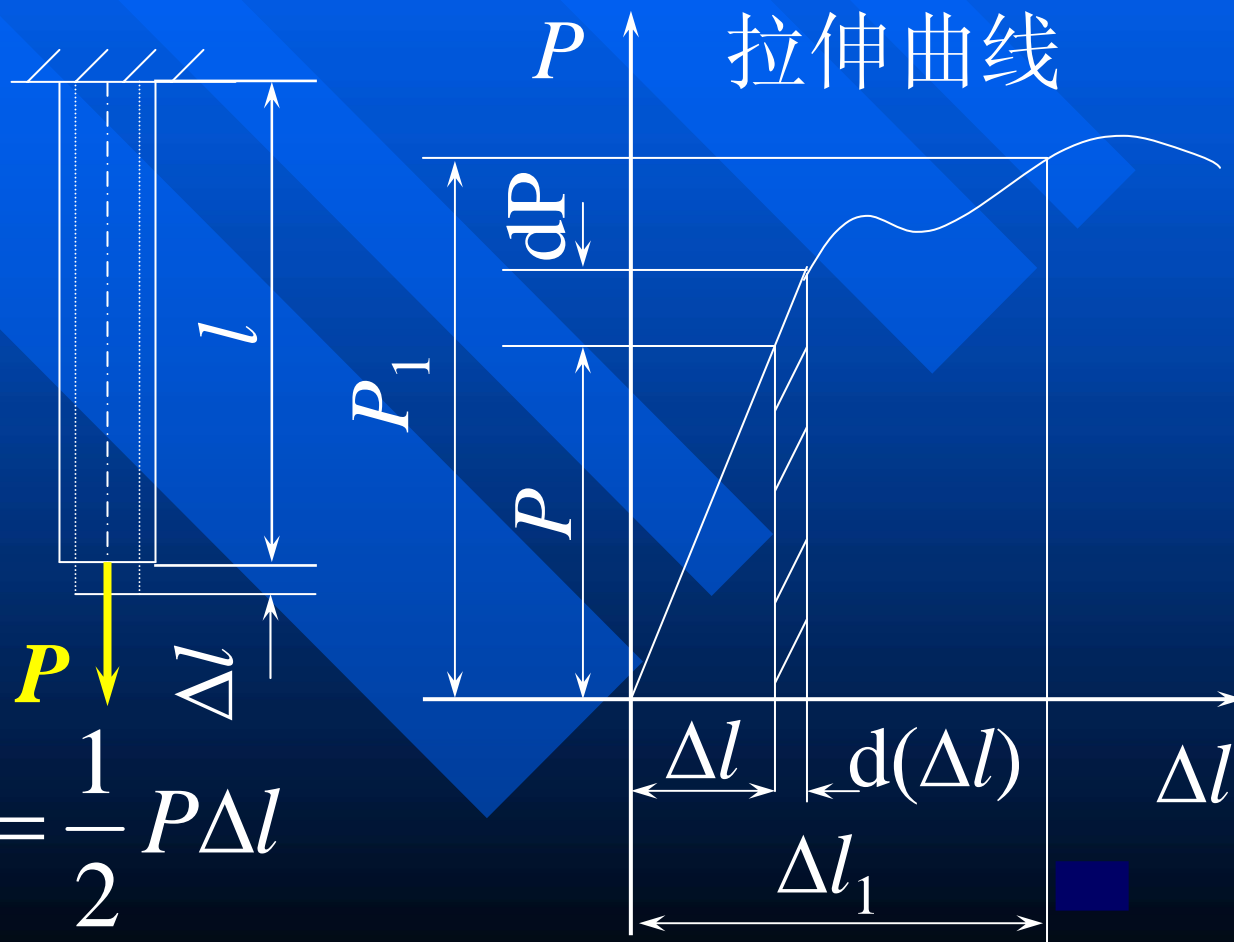
$$dW = P d(\Delta l)$$

- ◆ 力的总功

$$W = \int_0^{\Delta l_1} P d(\Delta l)$$

当应力小于比例极限时

$$W = \frac{1}{2} P \Delta l$$

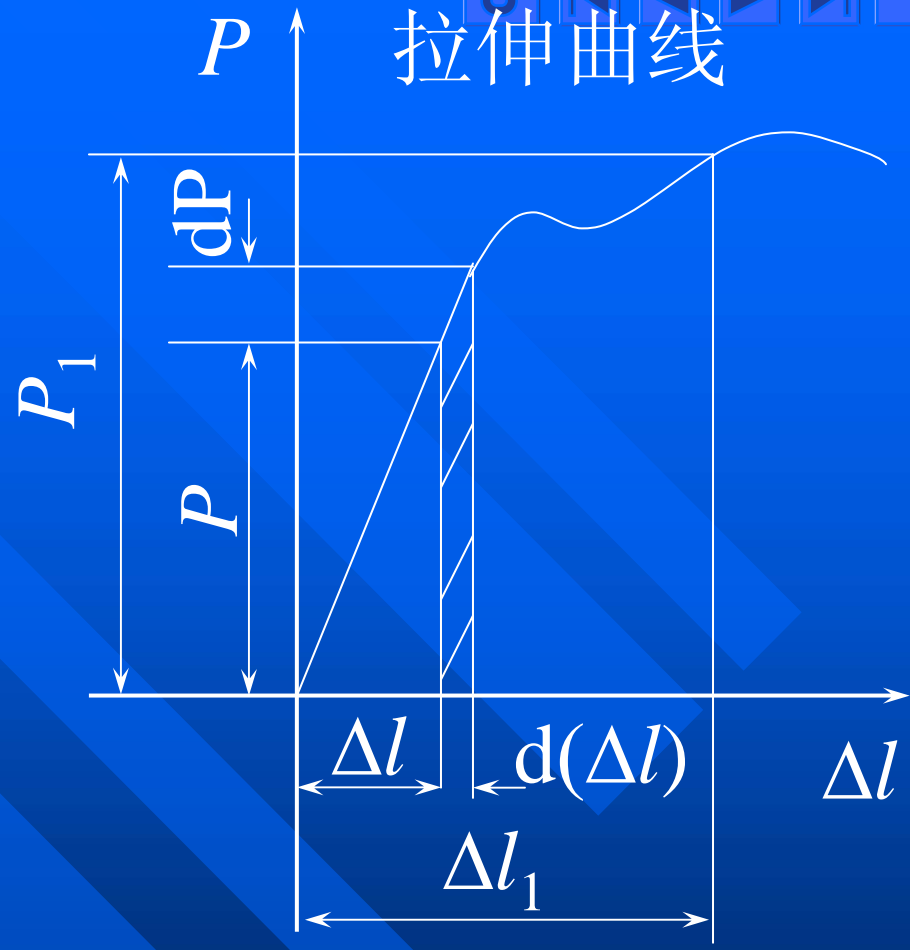
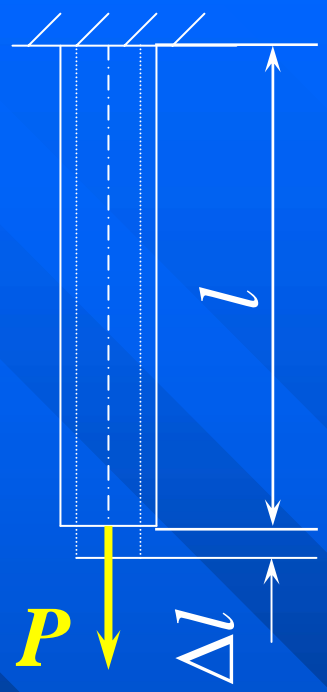


◆ 力的总功

$$W = \int_0^{\Delta l_1} P d(\Delta l)$$

当应力小于
比例极限时

$$W = \frac{1}{2} P \Delta l$$



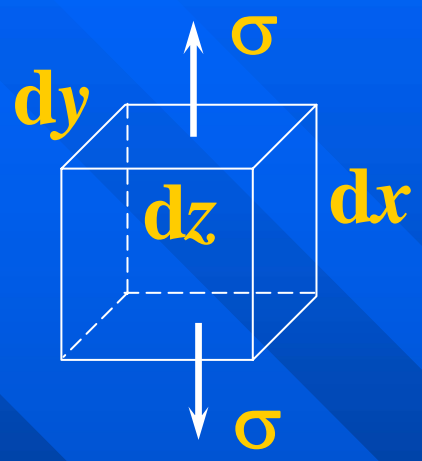
● 变形能

由能量守恒原理 $U = W = \frac{1}{2} P \Delta l$

2 比能(应变能密度)

单位体积内的变形能。

取一单元体：
单元体上下
两面的力为：



$$\sigma dy dz$$

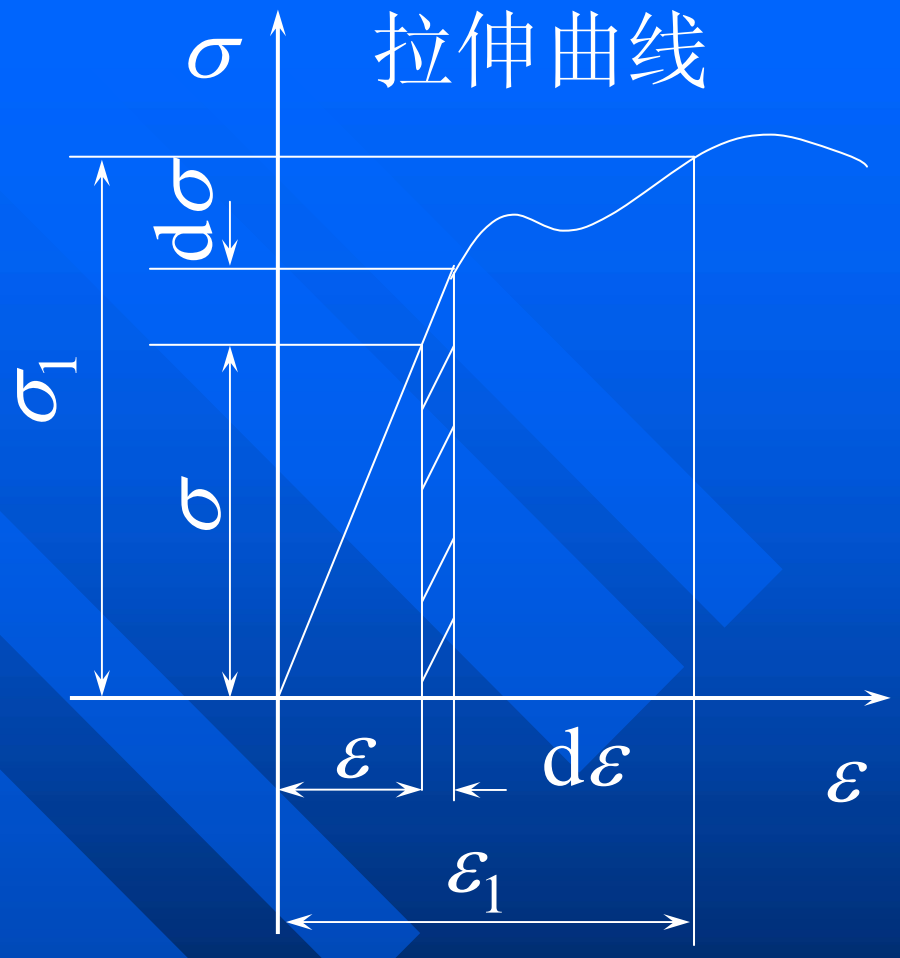
x 方向的伸长为： ϵdx

当应力有一个增量 $d\sigma$ 时，

x 方向伸长的增量为： $d\epsilon dx$

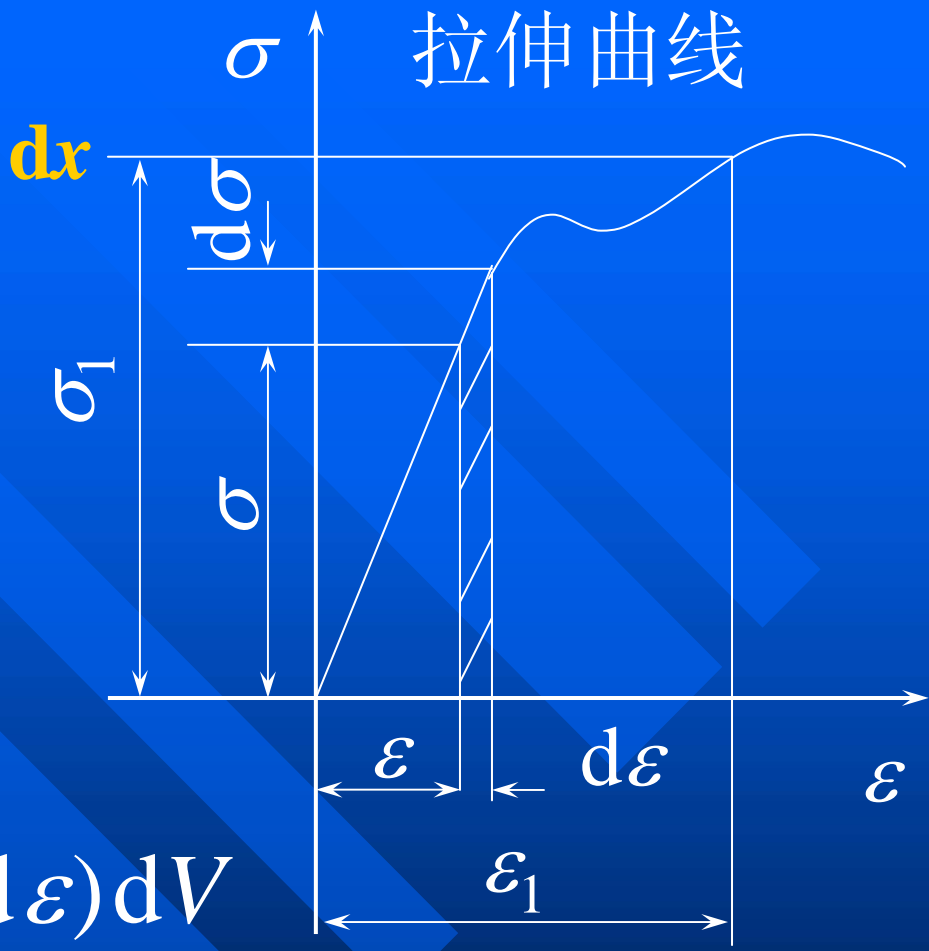
则元功为： $\sigma dy dz \cdot d\epsilon dx$

$$力所作的功为：dW = \int_0^{\epsilon_1} \sigma dy dz \cdot d\epsilon dx$$





拉伸曲线



则力所作的功为:

$$dW = \int_0^{\epsilon_1} \sigma dy dz \cdot d\epsilon dx$$

$$= \int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon dV$$

$$= (\int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon) dV$$

所以: $dU = dW = (\int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon) dV$

比能: $u = \frac{dU}{dV} = \int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon$

当应力小于比例极限时

$\longrightarrow u = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$

比能: $u = \frac{dU}{dV} = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon$

当应力小于比例极限时 $\longrightarrow u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$

由胡克定律 $\sigma = E\varepsilon$

$\longrightarrow u = \frac{1}{2} E\varepsilon^2$ 或: $u = \frac{\sigma^2}{2E}$

● 由比能求应变能

◆ 应力分布均匀时

$$U = uV$$

◆ 应力分布不均匀时

$$U = \int_V u dV$$

◆ 应力分布均匀时

$$U = uV = \frac{\sigma^2}{2E}V = \frac{N^2 Al}{2EA^2} = \frac{N^2 l}{2EA}$$

● 推广到多杆系统 $U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2E_i A_i}$

由能量守恒原理 $U = W = \frac{1}{2} P \Delta l$

有 $\frac{1}{2} P \Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2E_i A_i}$

例3 (书例2.9)

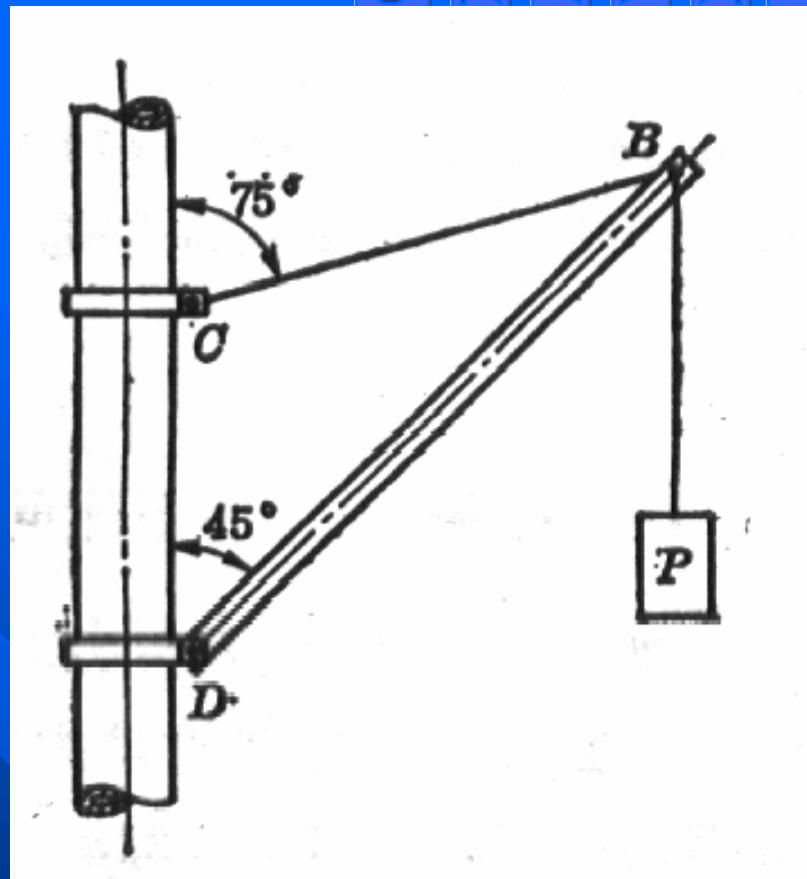
已知: BD 杆外径90mm, 壁厚2.5mm, 杆长 $l=3\text{m}$ 。 $E=210\text{ GPa}$ 。 BC 是两条钢索, 每根截面积 172 mm^2 , $E_1=177\text{ GPa}$ 。 $P=30\text{ kN}$, 不考虑立柱变形。

求: B 点垂直位移。

解: 解三角形得 $BC=l_1=2.20\text{m}$, $CD=1.55\text{m}$
 BC 、 BD 的截面积分别为

$$A_1=344\text{ mm}^2, \quad A=687\text{ mm}^2$$

取 B 点, 受力如图:



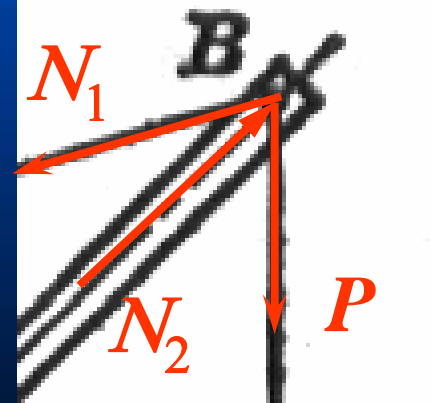
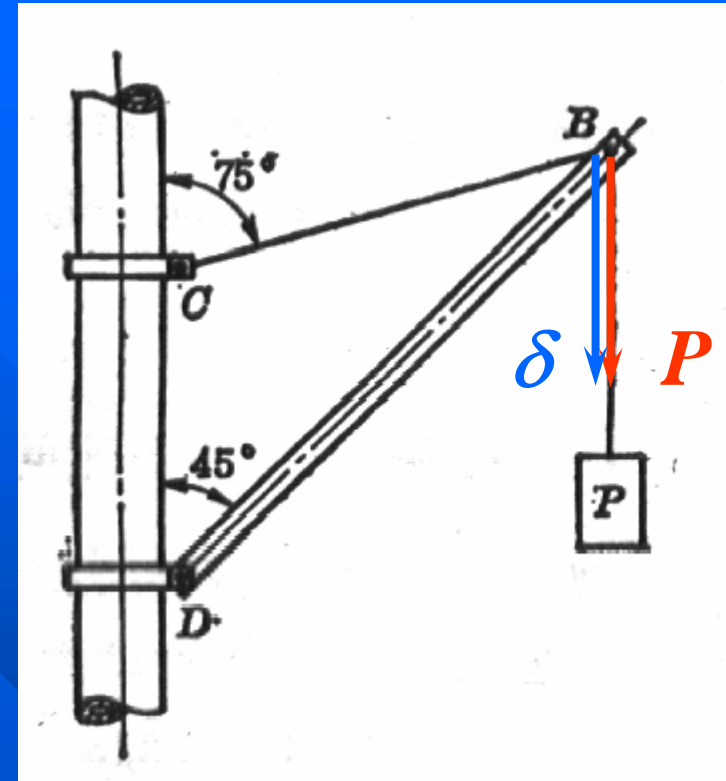
取B点，受力如图：

$$\rightarrow N_1=1.41P, N_2=1.93P$$

外力P所作的功等于BC及BD杆的变形能，所以

$$W = \frac{1}{2} P \delta = \frac{N_1^2 l_1}{2E_1 A_1} + \frac{N_2^2 l}{2EA}$$

$$\rightarrow \delta = 14.93 \times 10^{-3} P = 4.48 \times 10^{-3} \text{ m}$$



§ 2.10 拉伸、压缩静不定问题

● 关于静不定的基本概念

- ◆ 静定问题 —— 未知力（内力或外力）个数等于独立的平衡方程数；
- ◆ 静不定问题 —— 未知力个数多于独立的平衡方程数；
- ◆ 静不定次数 —— 未知力个数与独立平衡方程数之差，也称静不定度数；
- ◆ 多余约束 —— 保持结构静定多余的约束。

求解静不定问题的基本方法

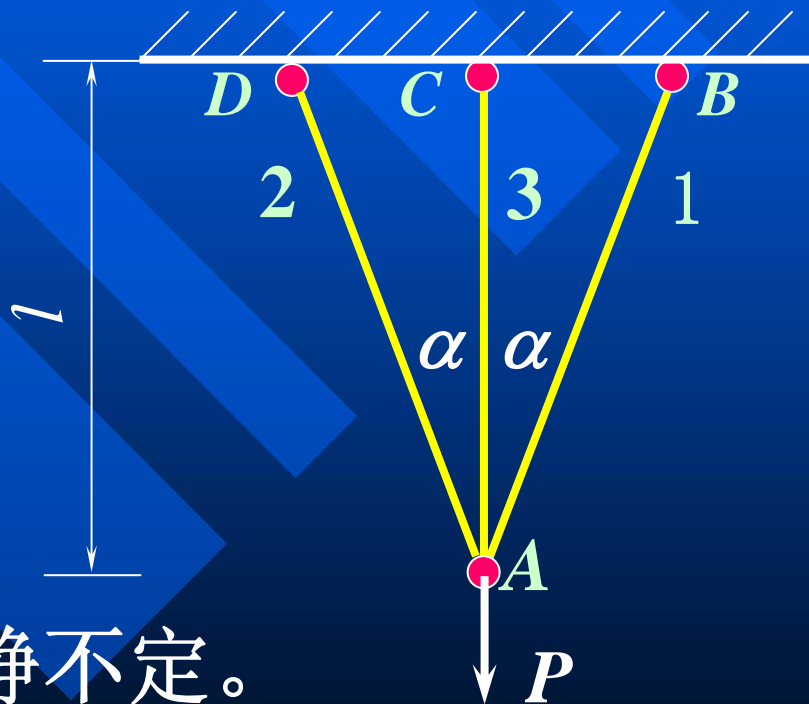
- ◆ 静力平衡方程 — 力的平衡关系。
- ◆ 变形协调方程 — 变形与约束的协调关系。
- ◆ 物理关系 — 力与变形的关系。

例 1 (书p.50)

已知：1、2杆相同，抗拉刚度为 E_1A_1 ，3杆的抗拉刚度为 E_3A_3 ，长为 l ， α 角。

求：各杆的内力。

解：静不定的次数？ 1次 静不定。



例 1 (书p.50)

已知: 1、2杆相同, 抗拉刚度为 E_1A_1 , 3杆的抗拉刚度为 E_3A_3 , 长为 l , α 角。

求: 各杆的内力。

解: 静不定次数? 1次。

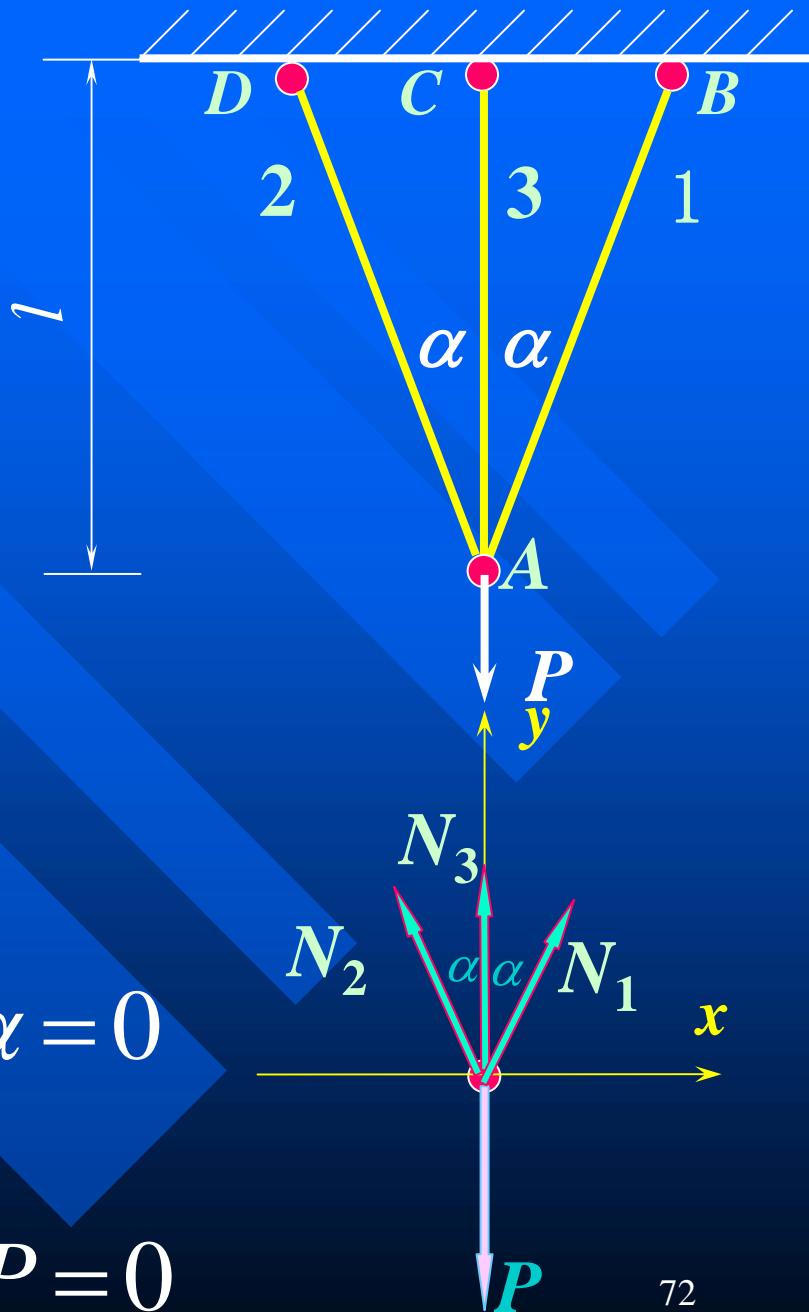
(1) 静平衡方程

取A点, 受力如图。

$$\sum X = 0 \quad N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0$$

$$\rightarrow \quad N_1 = N_2$$

$$\sum Y = 0 \quad N_3 + 2N_1 \cos \alpha - P = 0$$



(1) 静平衡方程

$$N_1 = N_2 \quad (1)$$

$$N_3 + 2N_1 \cos\alpha - P = 0 \quad (2)$$

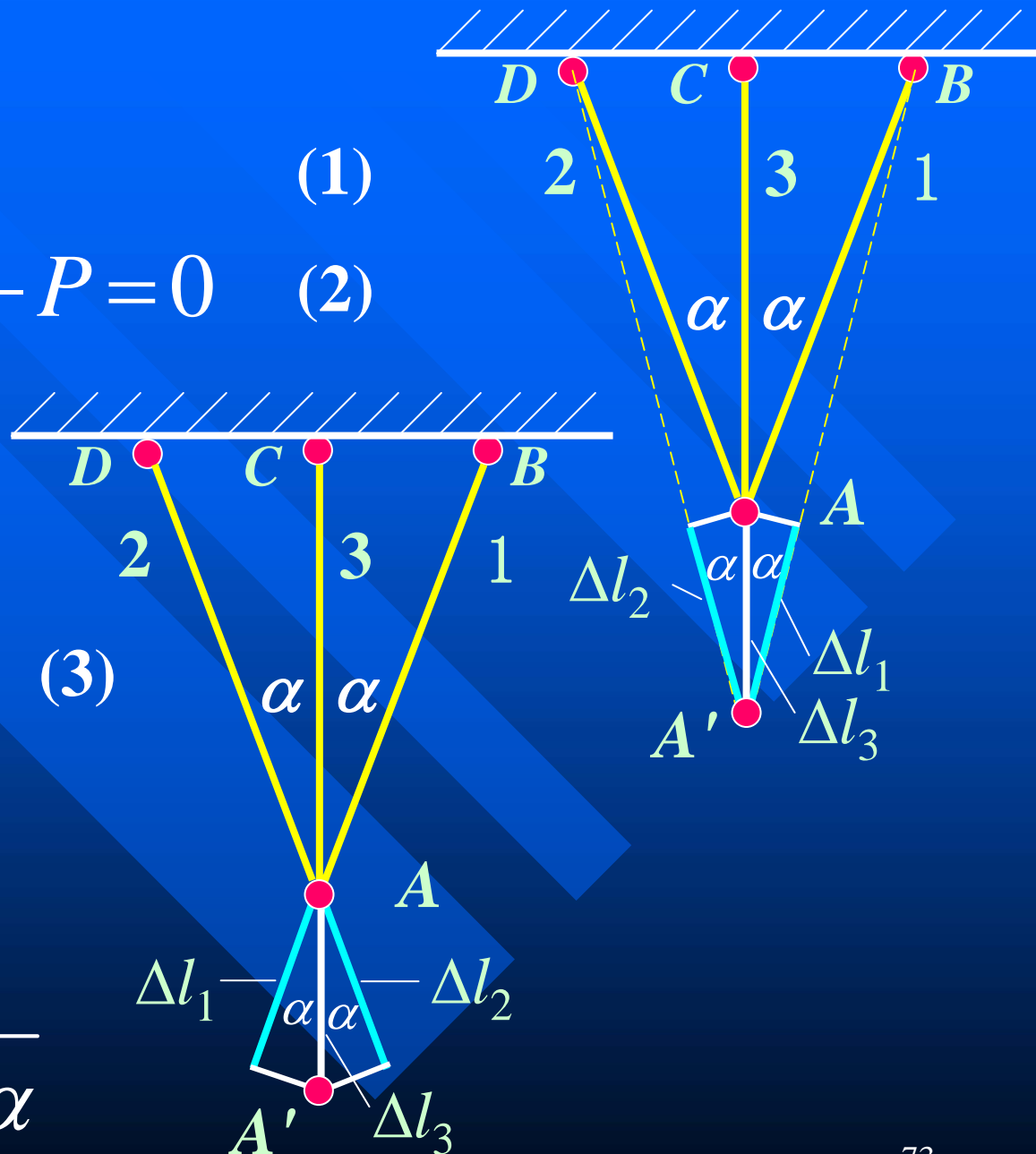
(2) 变形协调方程

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \Delta l_2 \\ &= \Delta l_3 \cos\alpha \quad (3) \end{aligned}$$

法二

(3) 物理关系

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E_1 A_1 \cos\alpha}$$



(1) 静平衡方程 $N_1 = N_2$ (1)

$$N_3 + 2N_1 \cos\alpha - P = 0 \quad (2)$$

(2) 变形协调方程 $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 \cos\alpha$ (3)

(3) 物理关系 $\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E_1 A_1 \cos\alpha} \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{E_3 A_3}$

物理关系代入变形协调方程

$$\frac{N_1 l}{E_1 A_1 \cos\alpha} = \frac{N_3 l}{E_3 A_3} \cos\alpha \quad (4)$$

与平衡方程联立，可解出：

(1) 静平衡方程 $N_1 = N_2$ (1)

$$N_3 + 2N_1 \cos\alpha - P = 0 \quad (2)$$

物理关系代入变形协调方程

$$\frac{N_1 l}{E_1 A_1 \cos\alpha} = \frac{N_3 l}{E_3 A_3} \cos\alpha \quad (4)$$

与平衡方程联立，可解出：

$$N_1 = N_2 = \frac{P \cos^2 \alpha}{2 \cos^3 \alpha + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1}}, \quad N_3 = \frac{P}{1 + 2 \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^3 \alpha}$$

例 2

已知：等直杆, $EA, P; a, b$ 。

求：两端的约束反力。

解：静不定次数？ 1次。

(1) 静平衡方程

取杆，受力如图。

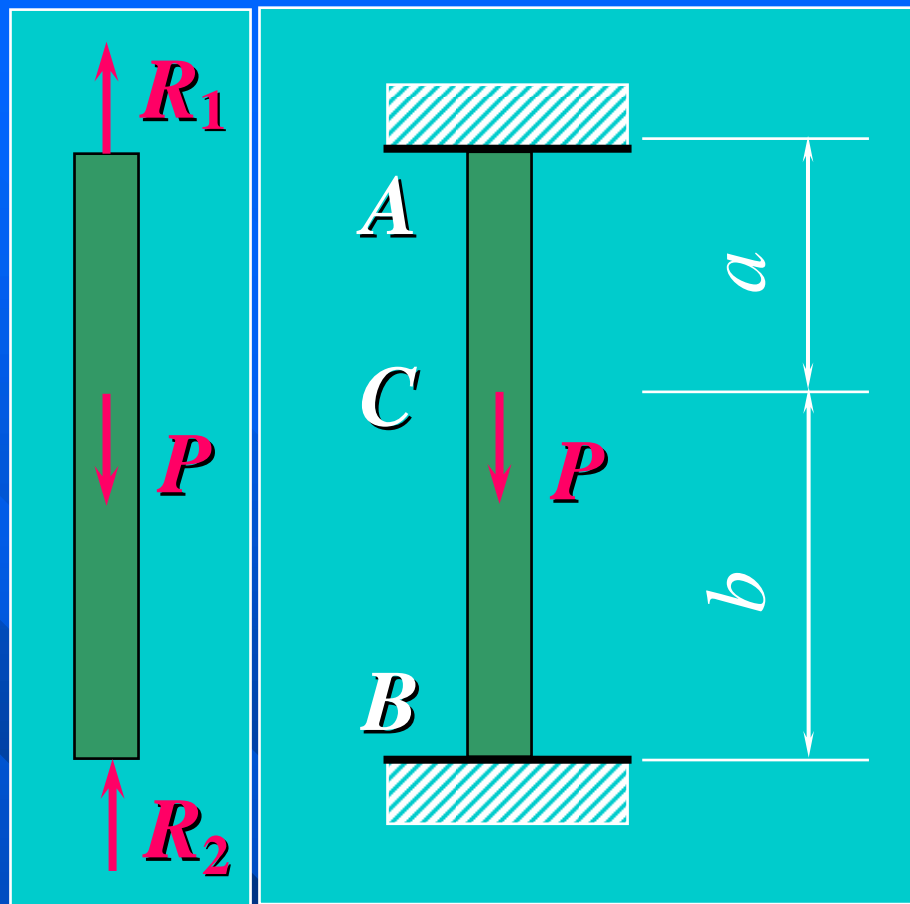
$$\sum Y = 0 \quad R_1 + R_2 = P$$

(2) 变形协调方程

AC段受拉，拉伸变形为 Δl_{AC}

BC段受压，压缩变形为 Δl_{BC}

而AB杆总长度不变，所以 $\Delta l_{AC} = \Delta l_{BC}$



(1) 静平衡方程

$$R_1 + R_2 = P$$

(2) 变形协调方程

$$\Delta l_{AC} = \Delta l_{BC}$$

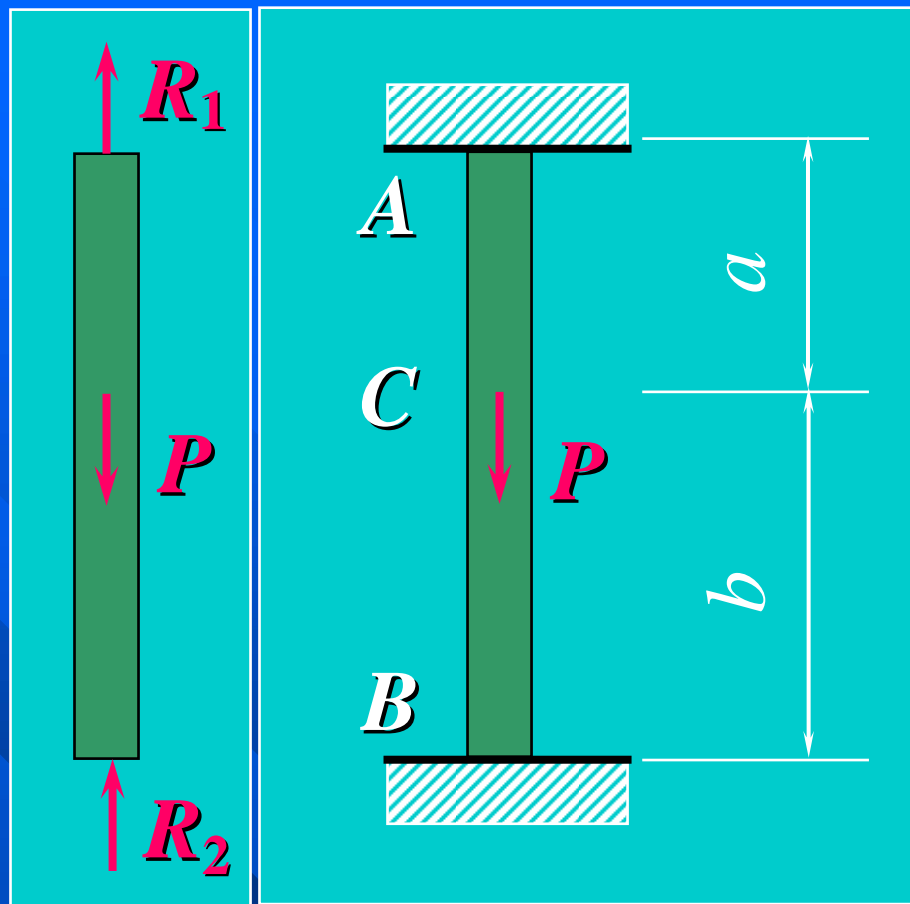
(3) 物理关系

$$\text{AC段轴力} \quad N_{AC} = R_1$$

$$\text{BC段轴力} \quad N_{BC} = R_2$$

$$\text{所以 } \Delta l_{AC} = \frac{N_{AC}a}{EA} = \frac{R_1a}{EA}, \quad \Delta l_{BC} = \frac{N_{BC}b}{EA} = \frac{R_2b}{EA}$$

由物理关系和变形协调方程，得 $R_1a = R_2b$ 77



(1) 静平衡方程

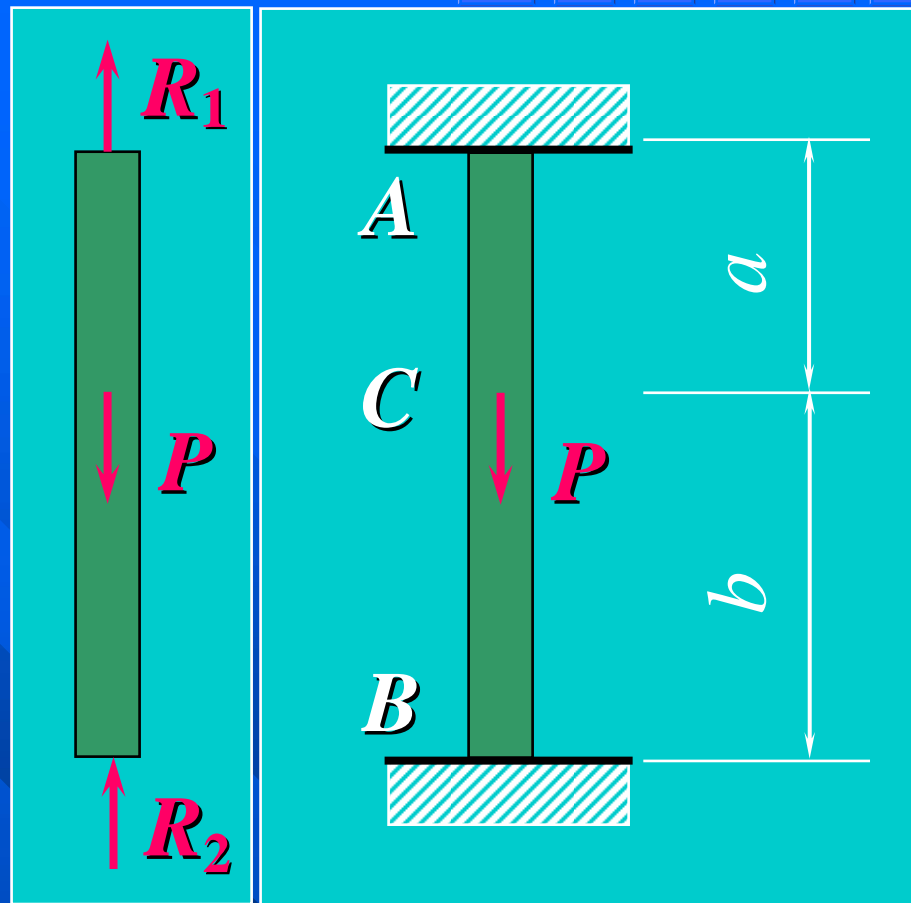
$$R_1 + R_2 = P$$

(2) 变形协调方程

$$\Delta l_{AC} = \Delta l_{BC}$$

(3) 物理关系

$$\Delta l_{AC} = \frac{R_1 a}{EA}, \quad \Delta l_{BC} = \frac{R_2 b}{EA}$$



由物理关系和变形协调方程，得 $R_1 a = R_2 b$

与平衡方程联立，解得： $R_1 = \frac{Pa}{a + b}$ ， $R_2 = \frac{Pb}{a + b}$

例 3 (书例 2.11)

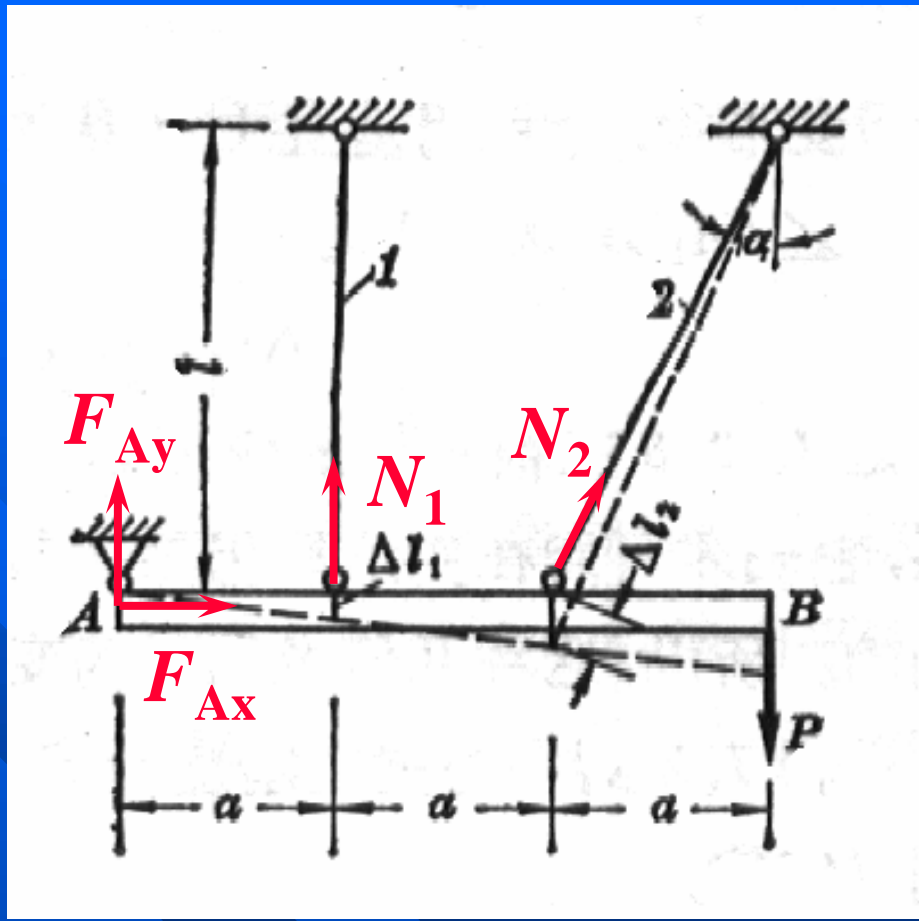
已知: AB 为刚性梁, 1、2两杆的横截面面积相等, 材料相同, P 力已知。

求: 1、2两杆的内力。

解: 静不定次数? 1次。

(1) 静平衡方程

取 AB 杆, 受力如图。



$$\sum M_A(F) = 0 \quad N_1 a + N_2 \cos \alpha \cdot 2a - P 3a = 0$$

$$\longrightarrow N_1 + 2N_2 \cos \alpha - 3P = 0$$

(1) 静平衡方程

$$N_1 + 2N_2 \cos\alpha - 3P = 0$$

(2) 变形协调方程

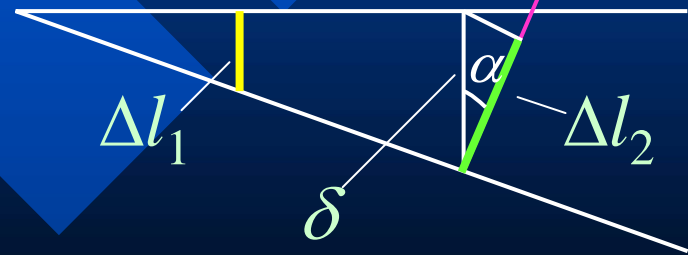
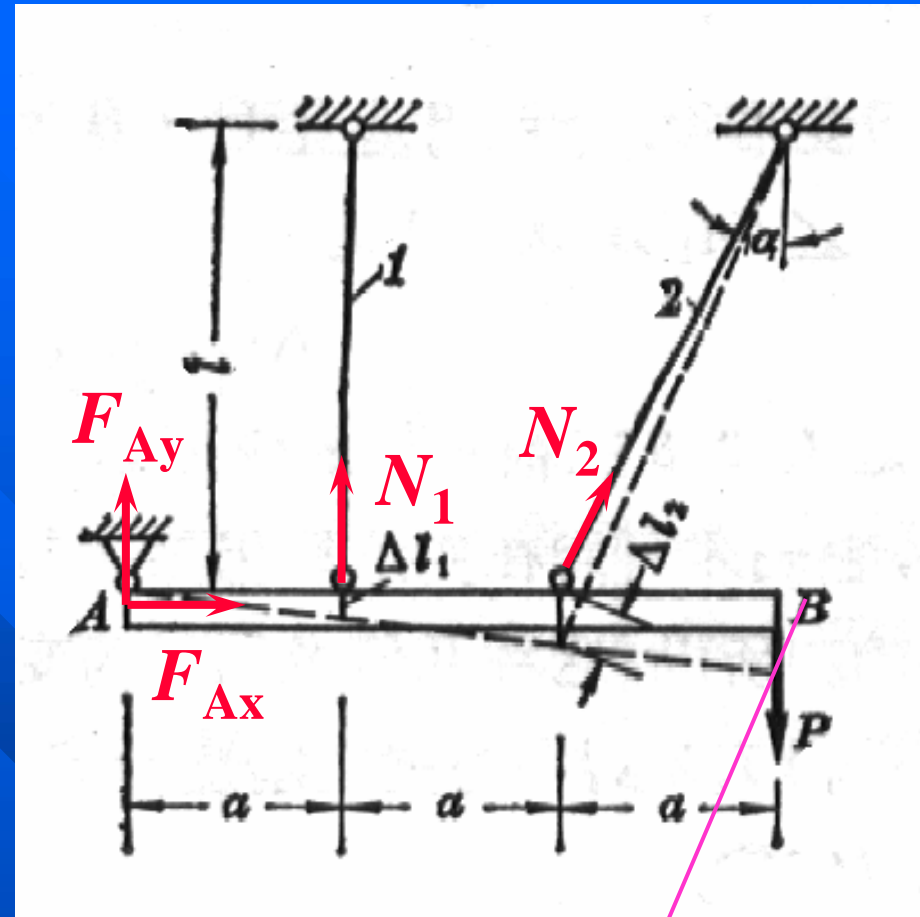
$$\delta = 2\Delta l_1$$

$$\Delta l_2 = \delta \cos\alpha$$

$$\rightarrow \frac{\Delta l_2}{\cos\alpha} = 2\Delta l_1$$

(3) 物理关系

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA \cos\alpha}$$



(1) 静平衡方程

$$N_1 + 2N_2 \cos\alpha - 3P = 0$$

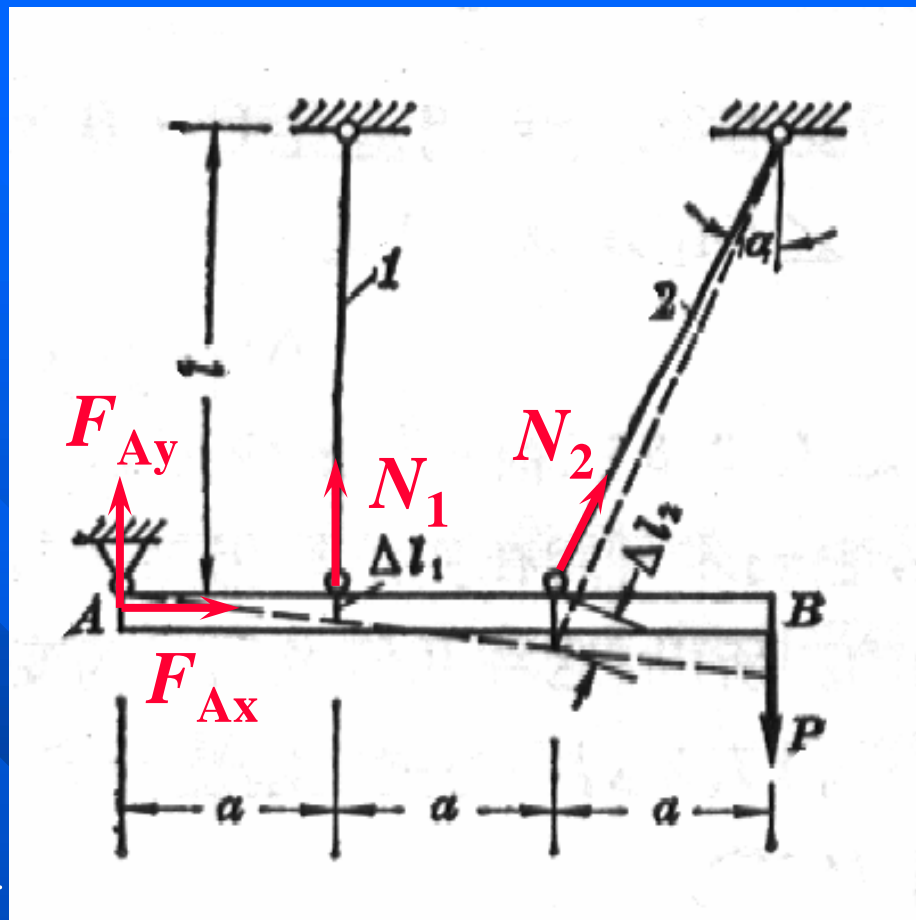
(2) 变形协调方程

$$\frac{\Delta l_2}{\cos\alpha} = 2\Delta l_1$$

(3) 物理关系

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA \cos\alpha}$$

联立解出 $N_1 = \frac{3P}{4\cos^3\alpha + 1}, \quad N_2 = \frac{6P\cos^2\alpha}{4\cos^3\alpha + 1}$



§ 2.11 温度应力与装配应力

1. 温度应力

由于温度变化引起的应力，称为温度应力或热应力。

温度应力仅存在于静不定结构中。

- 化工管道
- 桥梁
- 裸露的输气管及水管

- 由温度引起的变形 $\Delta l_T = \alpha \Delta T \cdot l$

其中， α 为材料的线膨胀系数； ΔT 为温度变化值； l 为杆的长度。

● 由温度引起的变形 $\Delta l_T = \alpha \Delta T \cdot l$

其中， α 为材料的线膨胀系数； ΔT 为温度变化值； l 为杆的长度。

碳钢的线膨胀系数： $\alpha = 12.5 \times 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$

例 4

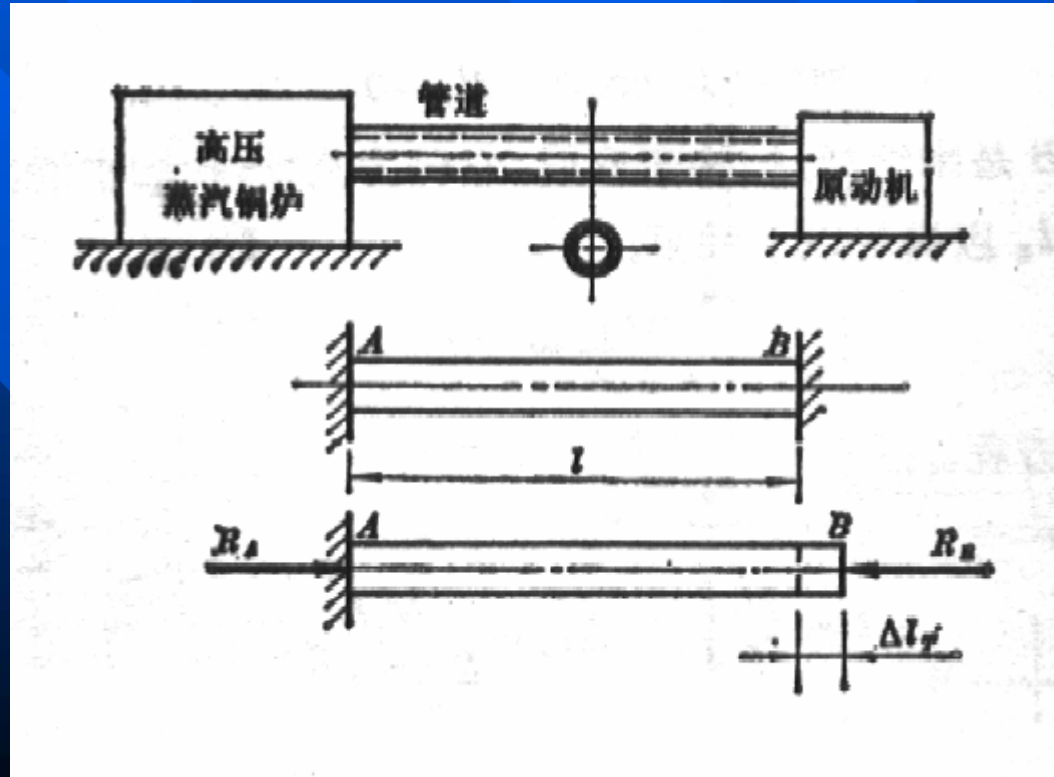
已知： $\alpha = 12.5 \times 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$ ， $E=200\text{GPa}$ 。

求：温度应力。

解：取杆，受力如图。

(1) 静平衡方程

$$R_A = R_B$$

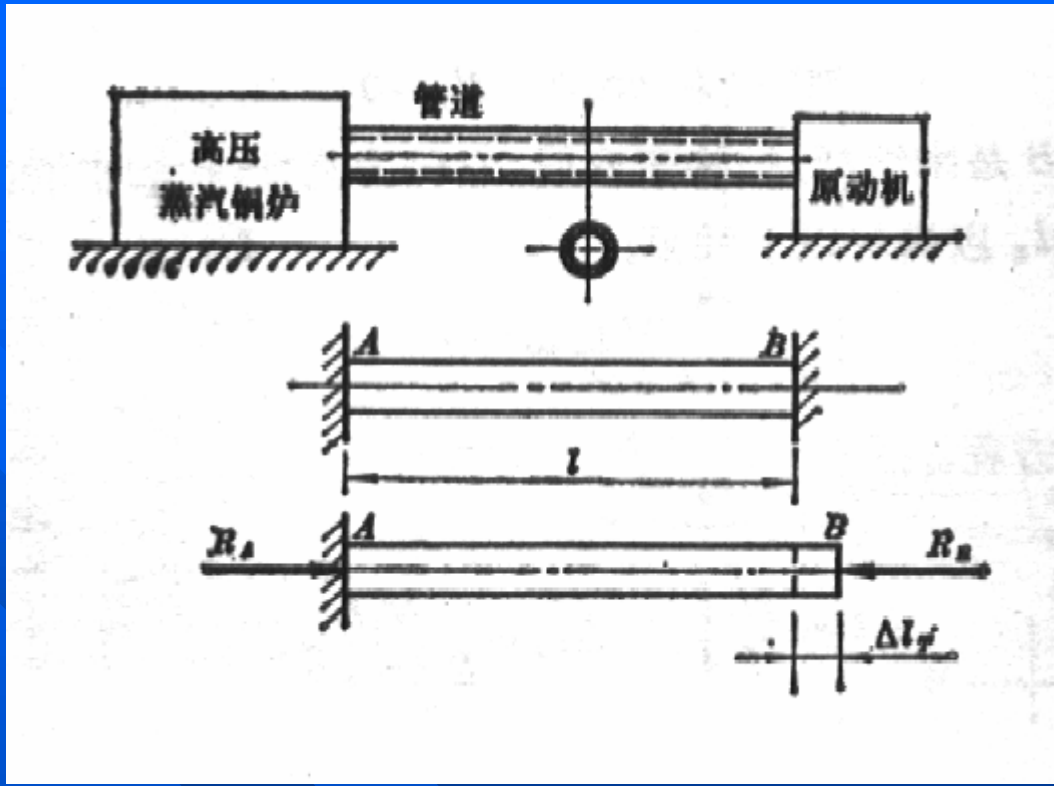


例 4

已知: $\alpha = 12.5 \times 10^{-6}$
 ($1/^\circ\text{C}$), $E=200\text{GPa}$ 。

求: 温度应力。

解: 取杆, 受力如图。



(1) 静平衡方程

$$R_A = R_B$$

(2) 变形协调方程

$$\Delta l_T = \Delta l_R$$

(3) 物理关系

$$\Delta l_T = \alpha \Delta T \cdot l,$$

$$\Delta l_R = \frac{R_B l}{EA}$$

$$\rightarrow \alpha \Delta T \cdot l = \frac{R_B l}{EA}$$

$$\rightarrow R_B = EA \alpha \Delta T$$

(1) 静平衡方程

$$R_A = R_B$$

(2) 变形协调方程

$$\Delta l_T = \Delta l_R$$

$$\rightarrow \alpha \Delta T \cdot l = \frac{R_B l}{EA} \quad \rightarrow R_B = EA \alpha \Delta T$$

$$\rightarrow \sigma_T = \frac{R_B}{A} = \alpha E \Delta T = 2.5 \Delta T \text{ MPa}$$

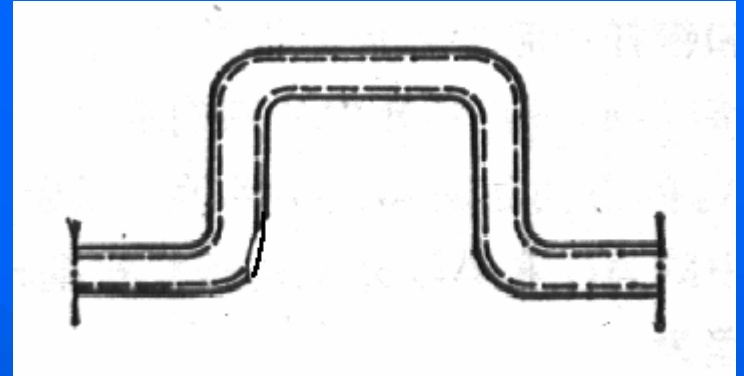
(3) 物理关系

$$\Delta l_T = \alpha \Delta T \cdot l, \quad \Delta l_R = \frac{R_B l}{EA}$$

当 $\Delta T = 80^\circ\text{C}$ 时, $\sigma_T = 200 \text{ MPa}$

而低碳钢的 σ_s 仅 235 MPa , 许用应力 $[\sigma]$ 通常仅 120 MPa 左右。所以温度应力是非常大的。

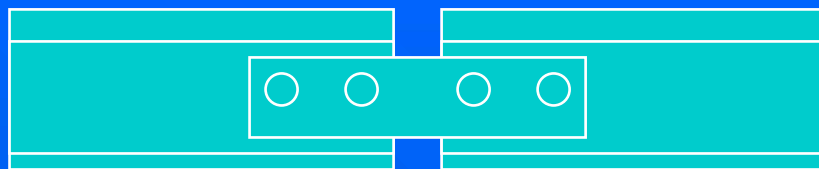
伸缩节



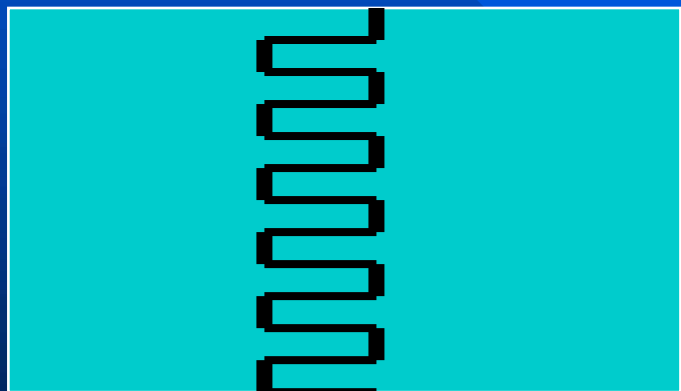
波纹管伸缩节



伸缩缝



火车钢轨伸缩缝



梳状伸缩缝



叠合伸缩缝

江阴长江大桥的伸缩缝



伸缩缝

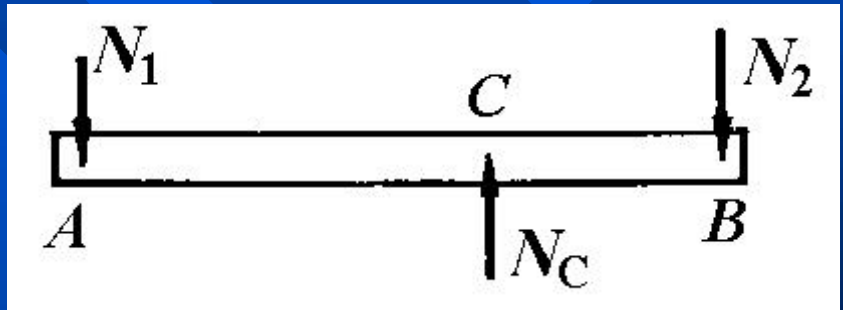
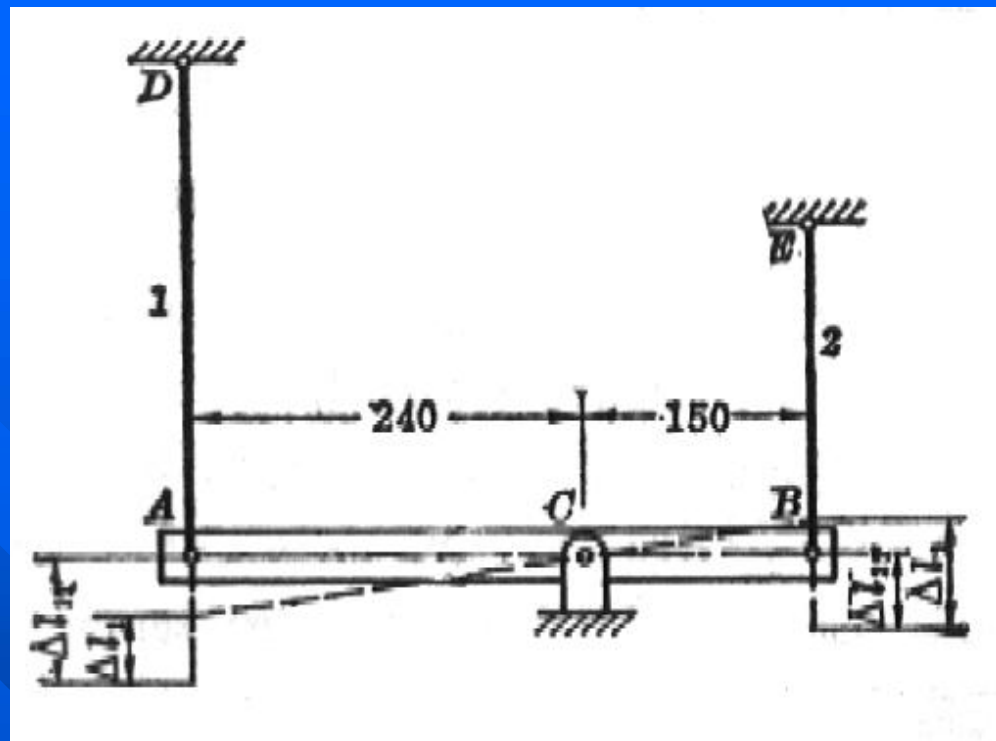
当温度从 -20°C 到 60°C 时，桥面伸长将达 1.34m

例 5 (书例 2.12)

已知: ACB 为刚性杆,
 钢杆 AD 的 $A_1=100\text{mm}^2$,
 $l_1=330\text{mm}$, $E_1=200$
 GPa, $\alpha_1=12.5\times 10^{-6}/^\circ\text{C}$;
 铜杆 BE 的 $A_2=200\text{mm}^2$,
 $l_2=220\text{mm}$, $E_2=100$
 GPa, $\alpha_2=16.5\times 10^{-6}/^\circ\text{C}$,
 温升 30°C 。

求: 两杆的轴力。

解: (1) 静平衡方程



取 AB 杆, 受力如图。

$$\sum M_C(F) = 0 \quad N_1 \cdot 240 = N_2 \cdot 150$$

(1) 静平衡方程

$$N_1 240 = N_2 150$$

(2) 变形协调方程

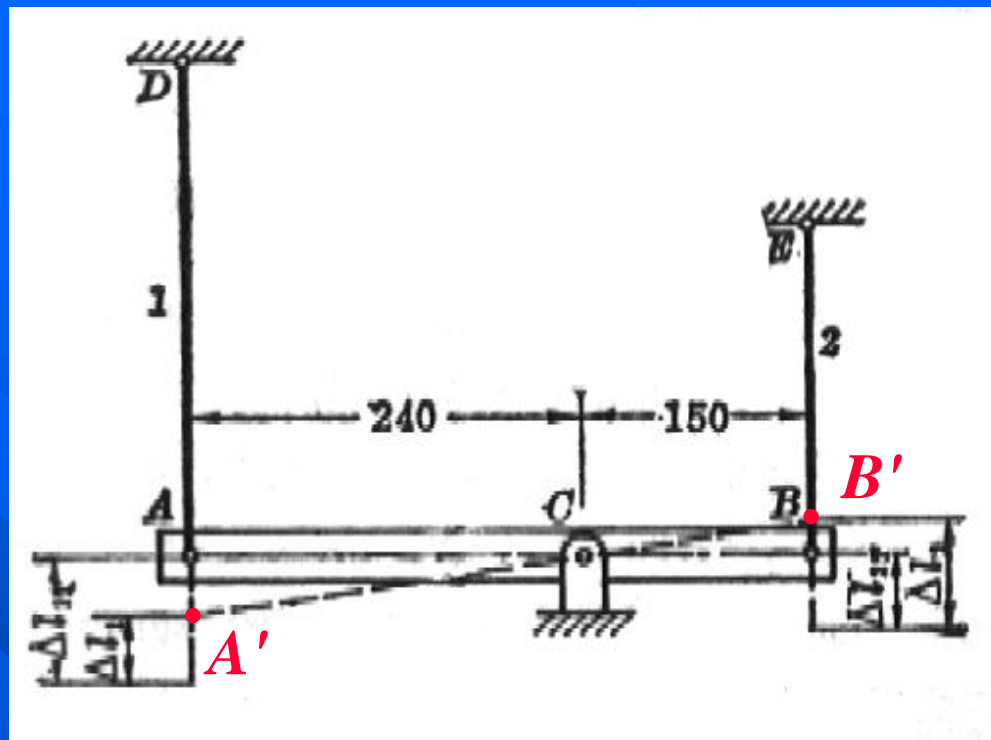
$$AA' = \Delta l_{1T} - \Delta l_1$$

$$BB' = \Delta l_2 - \Delta l_{2T}$$

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{240}{150}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta l_{1T} - \Delta l_1}{\Delta l_2 - \Delta l_{2T}} = \frac{240}{150}$$

(3) 物理关系 $\Delta l_{1T} = \alpha_1 \Delta T \cdot l_1 = 124 \times 10^{-6} \text{ m}$



(1) 静平衡方程

$$N_1 240 = N_2 150$$

(2) 变形协调方程

$$\frac{\Delta l_{1T} - \Delta l_1}{\Delta l_2 - \Delta l_{2T}} = \frac{240}{150}$$

(3) 物理关系

$$\Delta l_{1T} = \alpha_1 \Delta T \cdot l_1 = 124 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\Delta l_{2T} = \alpha_2 \Delta T \cdot l_2 = 109 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = 0.0165 \times 10^{-6} N_1$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = 0.011 \times 10^{-6} N_2$$

结果为正，
表示两杆
的确受压。

联立解得： $N_1 = 6.68 \text{ kN}$, $N_2 = 610.7 \text{ kN}$

2. 装配应力

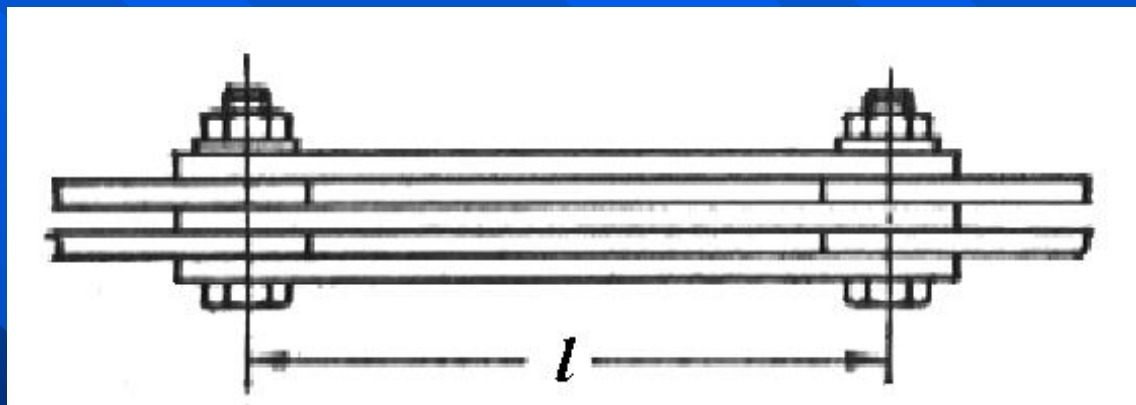
由于加工时的尺寸误差，造成装配后的结构存在应力，称装配应力。

装配应力仅存在于静不定结构中。

例 6 (书例 2.13)

已知： 三杆长为 l ，
截面积、材料均相同，
中间杆短于名义长度，
加工误差为 $\delta = l/2000$ 。

求： 装配应力。



例 6 (书例 2.13)

已知: 三杆长为 l , 截面积、材料均相同, 中间杆短于名义长度, 加工误差为 $\delta = l/2000$.

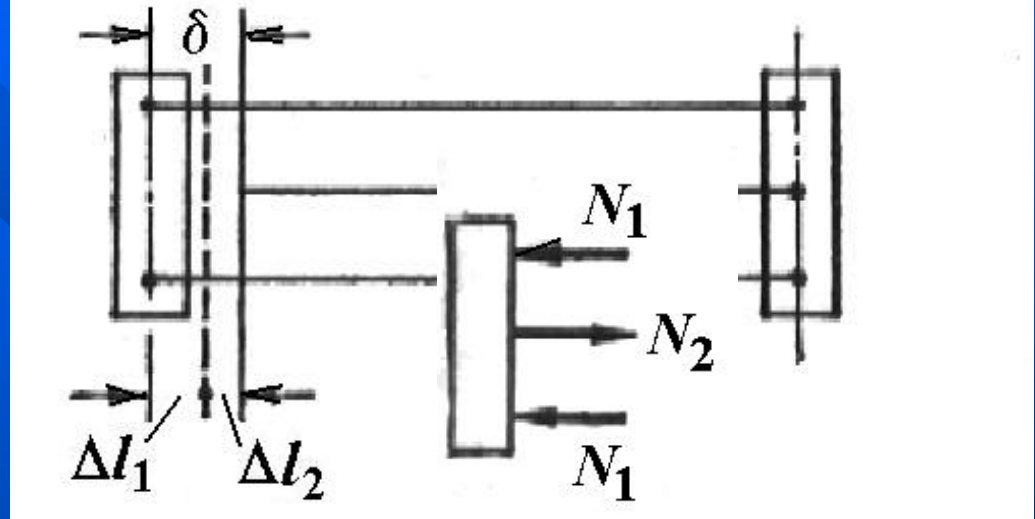
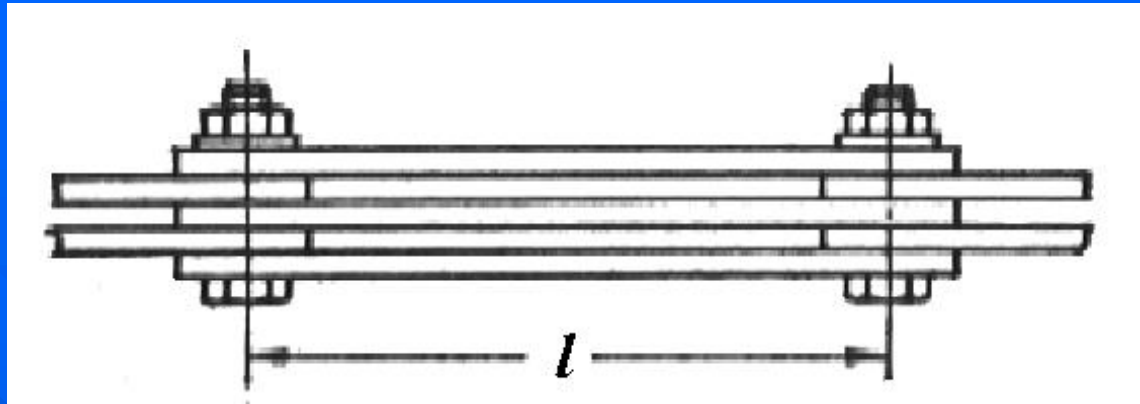
求: 装配应力。

解: 分析变形。

(1) 静平衡方程

取螺栓, 受力如图。

→ $2N_1 = N_2$



(2) 变形协调方程

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta = \frac{l}{2000}$$

(1) 静平衡方程

$$2N_1 = N_2$$

(2) 变形协调方程

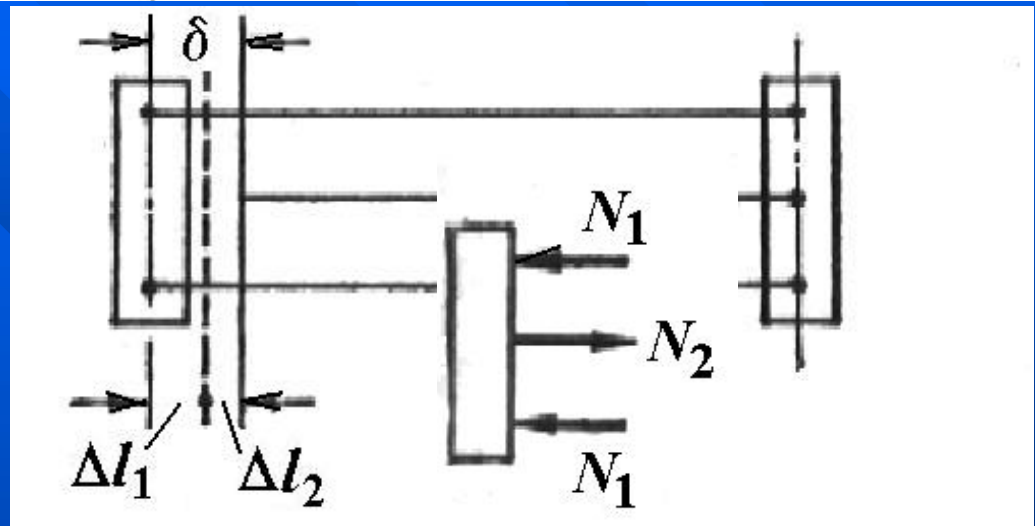
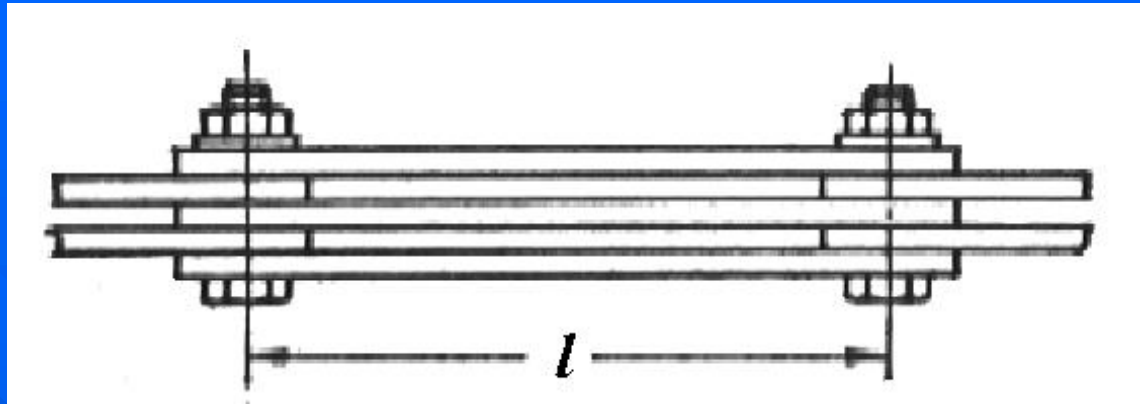
$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta = \frac{l}{2000}$$

(3) 物理关系

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA}$$

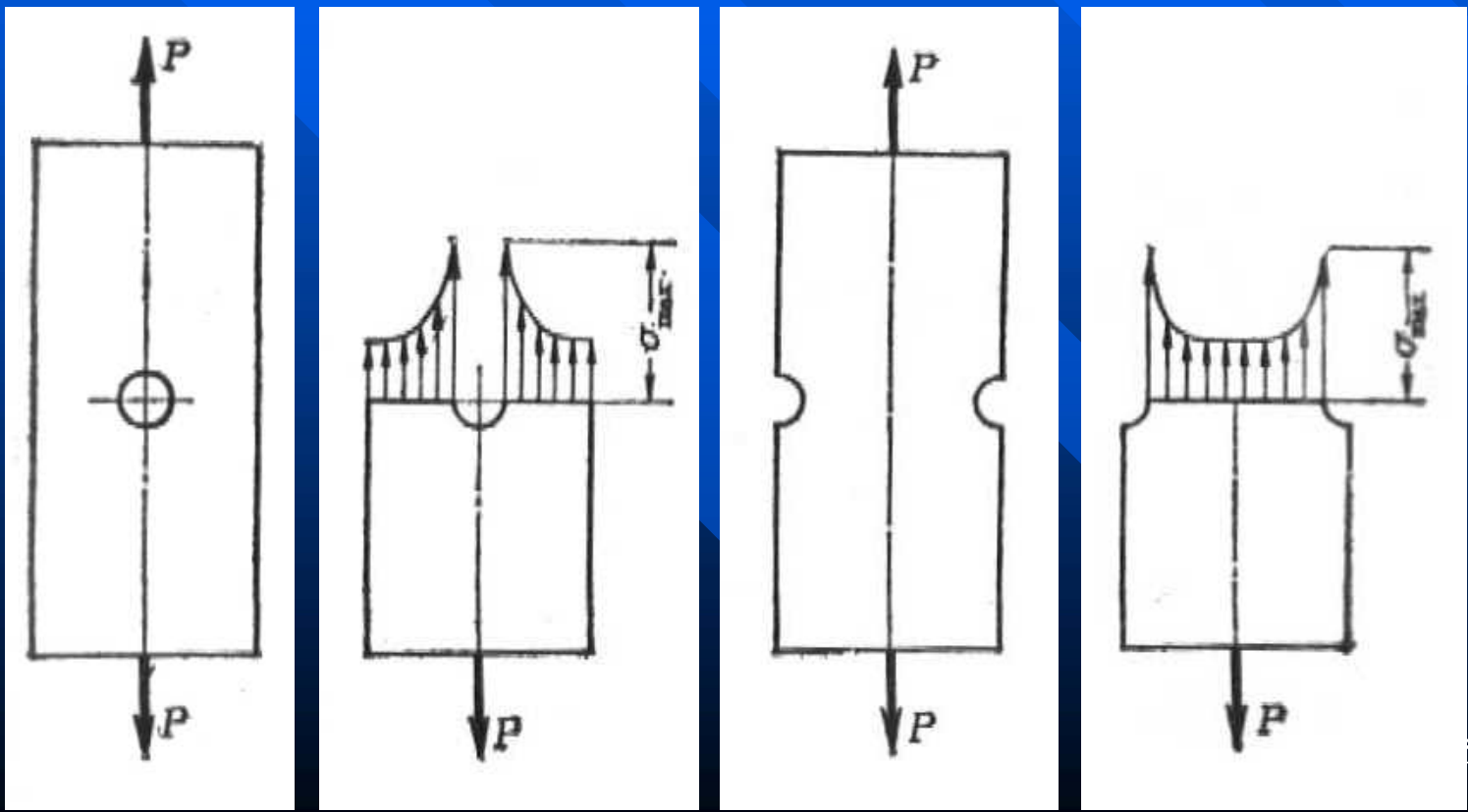
联立解得: $N_1 = \frac{EA}{6000}, \quad N_2 = \frac{EA}{3000}$

→ $\sigma_1 = 33.3 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 66.7 \text{ MPa}$

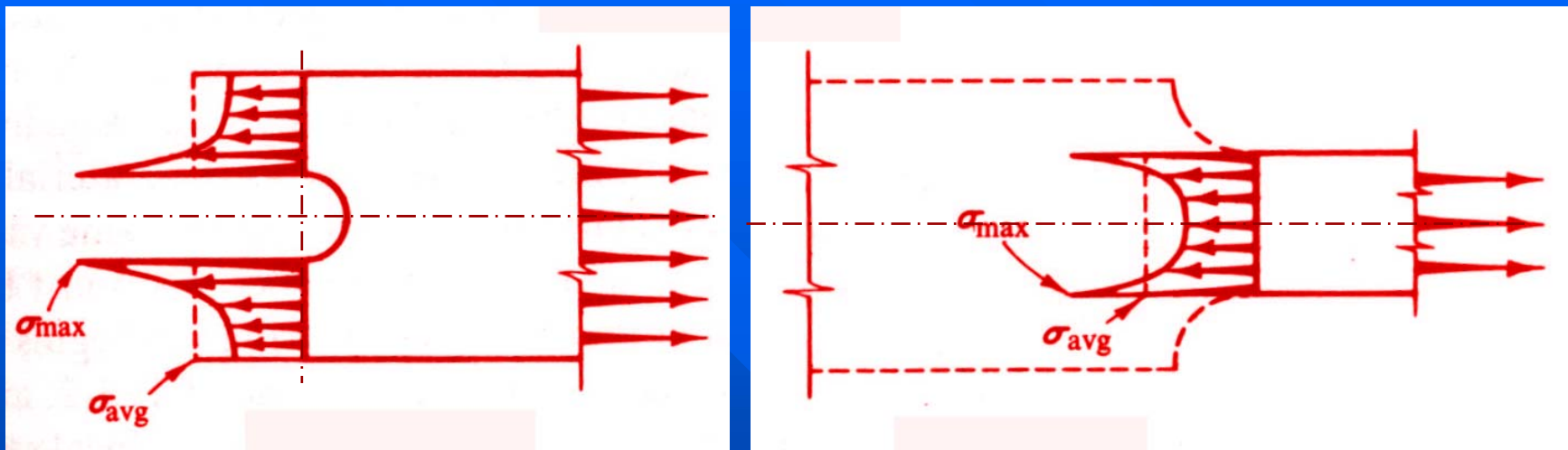


§ 2.12 应力集中的概念

由于截面尺寸的突然变化，使截面上的应力分布不再均匀，在某些部位出现远大于平均值的应力，这种现象称为应力集中。



● 应力集中与圣维南原理



● 理论应力集中系数 $k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma}$

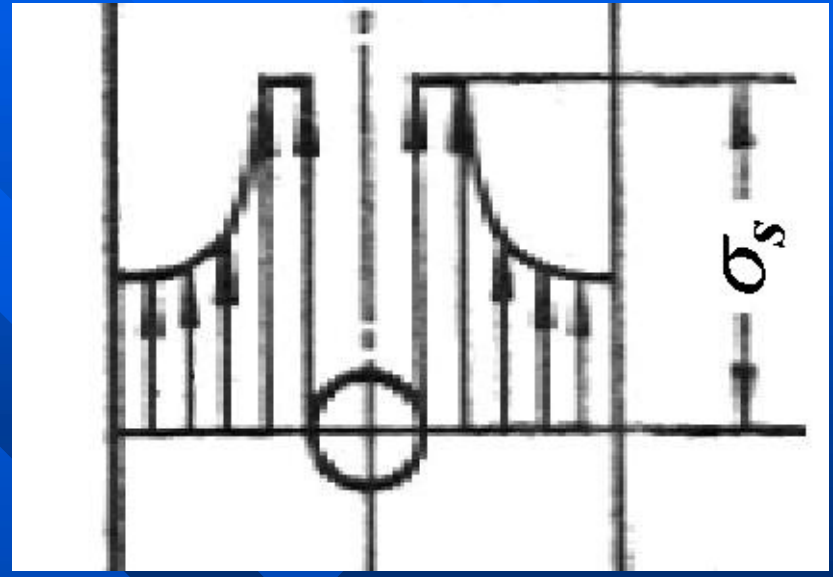
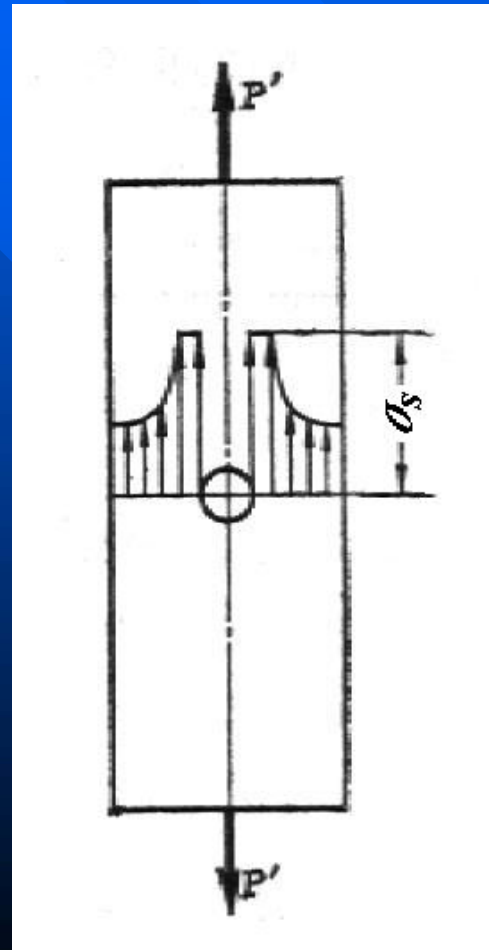
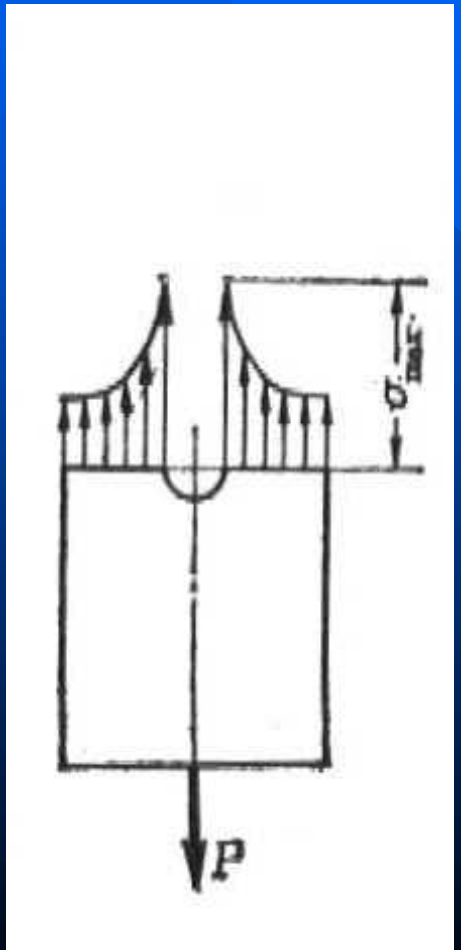
这里， σ 为截面上的平均应力。

k 的值可以查手册。

当宽度远大于圆孔直径时， $k = 3$ 。

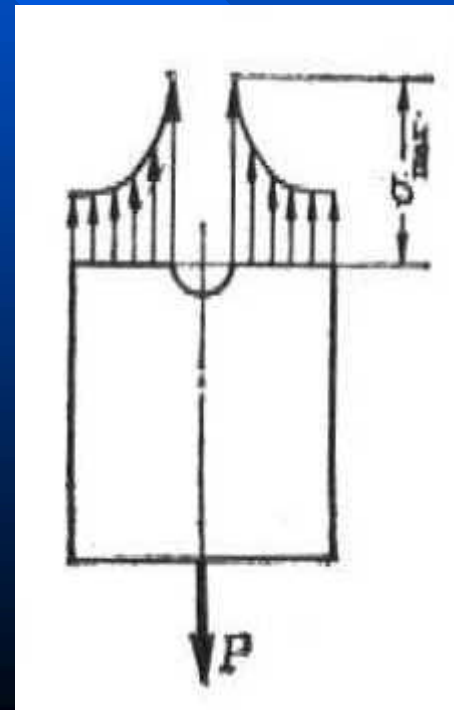
● 应力集中的影响

- 静载荷时
- ◆ 塑性材料 —— 产生屈服后，应力重新分配。



应力趋于平均。
这种情况下，可不考虑应力集中的影响。

- 静载荷时
- ◆ 塑性材料 —— 产生屈服后，应力重新分配，应力趋于平均。
这种情况下，可不考虑应力集中的影响。
- ◆ 脆性材料 —— 应力集中部位的应力首先达到强度极限而破坏。
应力集中的危害严重。
- ◆ 灰口铸铁 —— 内部缺陷是产生应力集中的主要因素，外形变化是次要因素。
- 动载荷时



■ 动载荷时

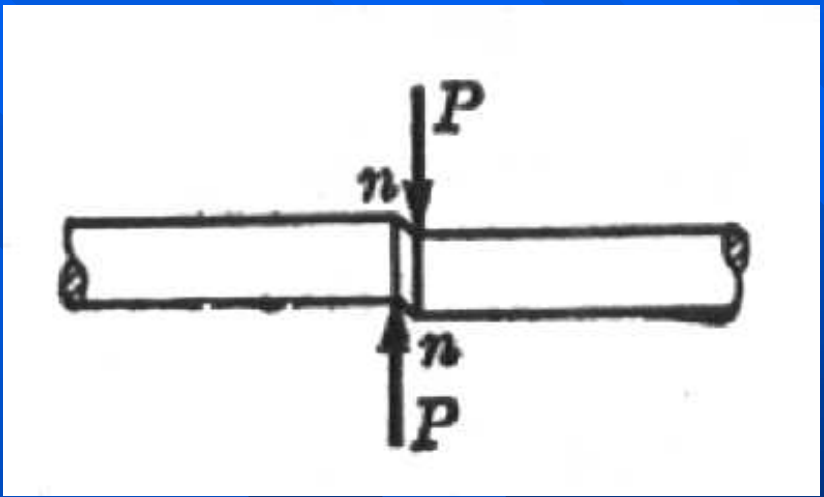
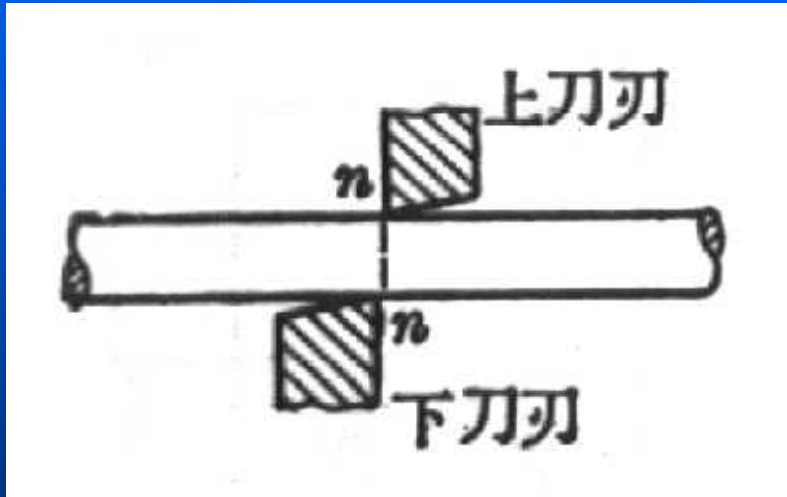
在交变应力或冲击载荷作用下，应力集中对塑性材料和脆性材料的强度都有严重影响。

- ◆ **塑性材料**—在交变应力作用下，应力集中部位首先产生疲劳裂纹而产生疲劳破坏。

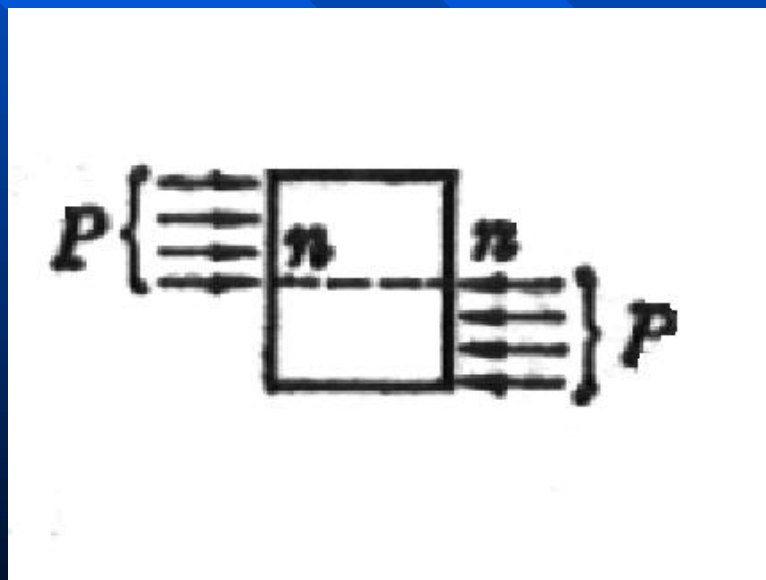
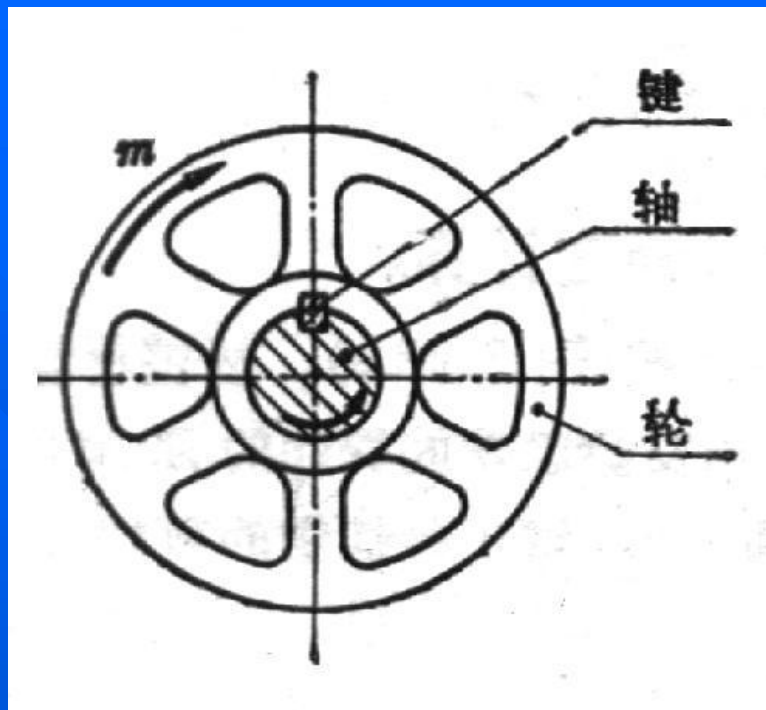
§ 2.13 剪切与挤压的实用计算

1. 剪切的实用计算

- 钢杆的受剪



- 键的受剪



- 剪切件的特点

- ◆ 受力的特点

杆件两侧作用有两个大小相等，方向相反，作用线相距很近的外力。

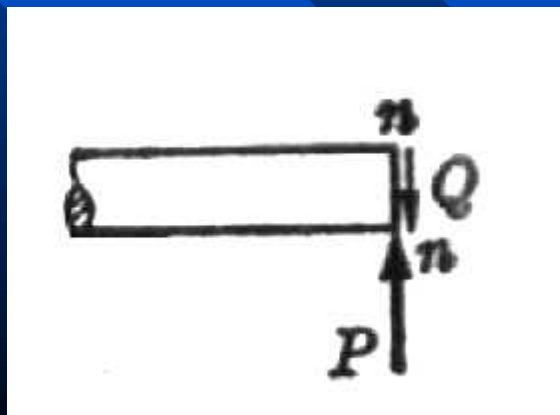
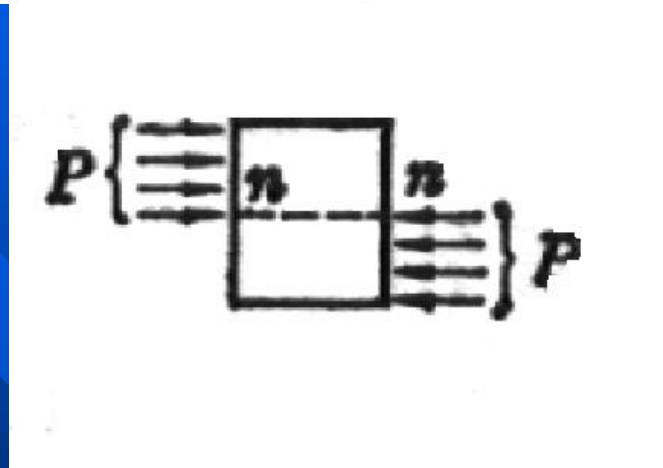
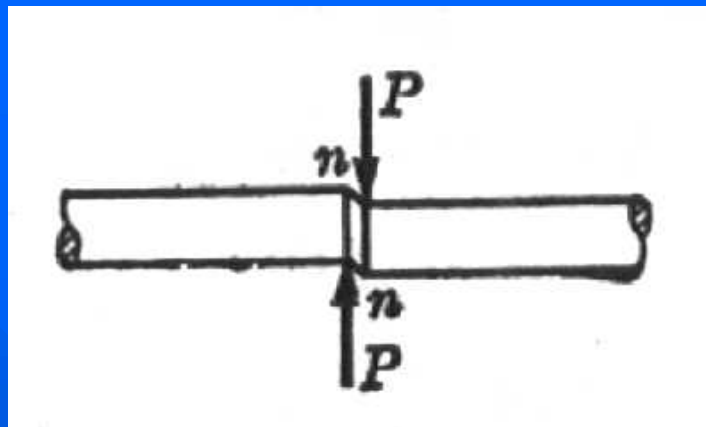
- ◆ 变形的特点

两外力作用线间的截面发生错动。

- ◆ 剪力

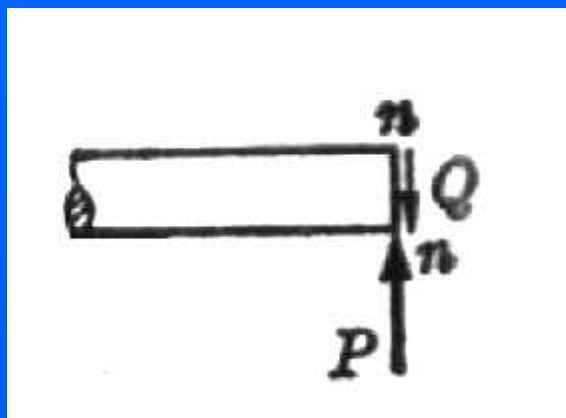
受剪面上的剪力

$$Q = P$$



- ◆ 剪力
受剪面上的剪力

$$Q = P$$



- ◆ 切应力计算

简化假设: 切应力在受剪面上均匀分布。

名义切应力: $\tau = \frac{Q}{A}$ → 受剪面的面积。

- ◆ 强度条件 $\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau]$

例 1 (书例2.14)

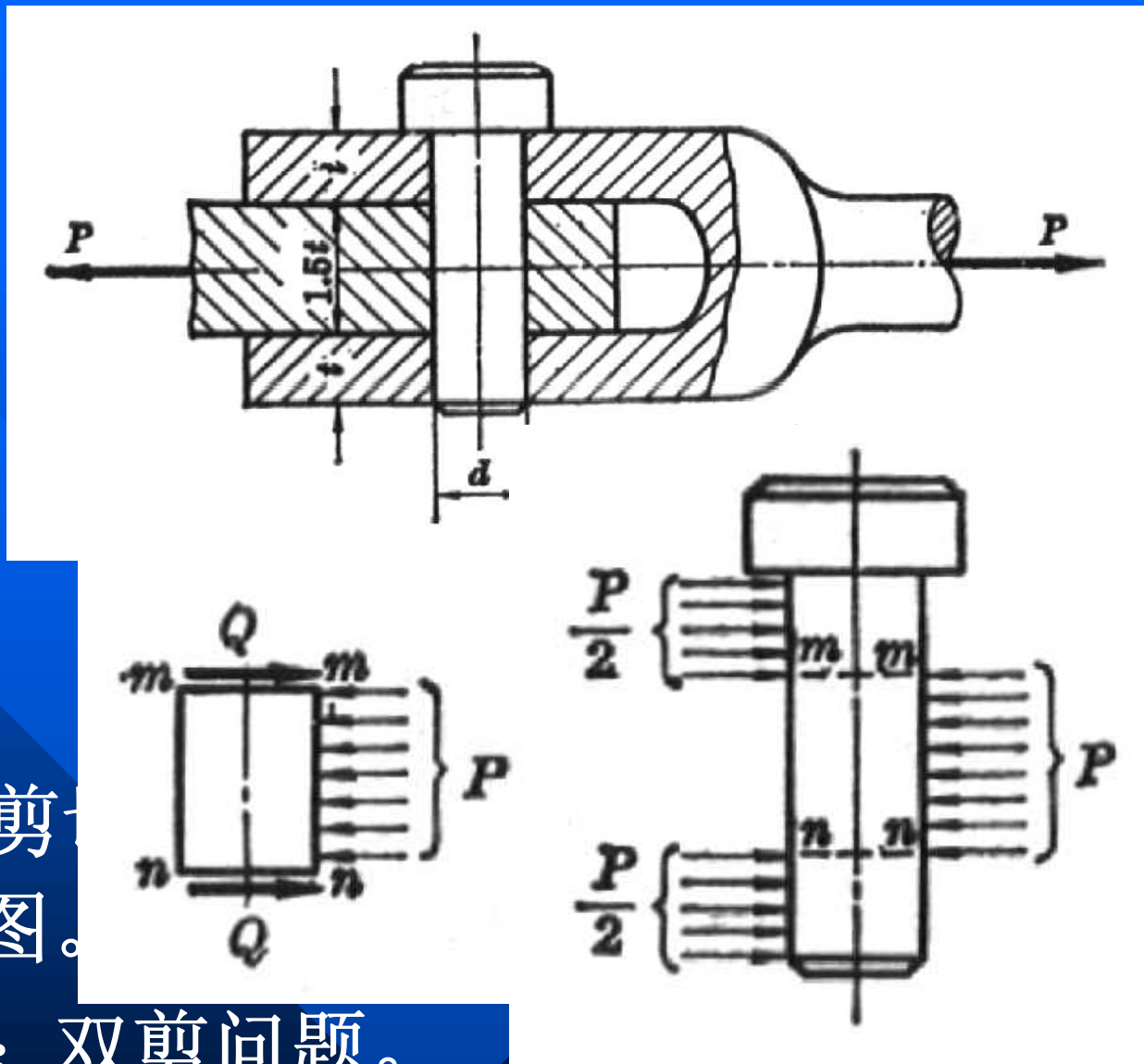
已知：插销材料为20钢， $[\tau] = 30\text{MPa}$ ，直径 $d=20\text{mm}$ ， $t = 8\text{mm}$ ， $1.5t = 12\text{mm}$ ， $P = 15\text{kN}$ 。

求：校核插销的剪切。

解：插销受力如图。

具有两个剪切面：双剪问题。

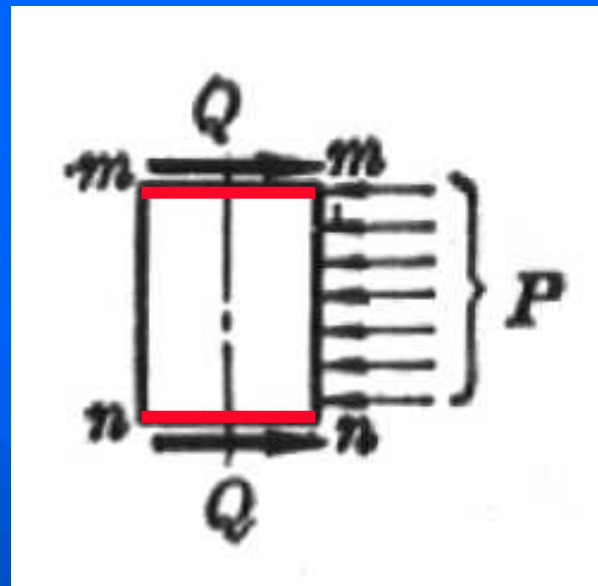
取两个剪切面之间的杆为研究对象，受力如图。



解：插销受力如图。

具有两个剪切面：双剪问题。

取两个剪切面之间的杆为研究对象，受力如图。



$$\sum X = 0 \quad Q = P/2$$

剪切面的面积 $A = \frac{\pi d^2}{4}$

→ $\tau = \frac{Q}{A} = 23.9 \text{ MPa} \leq [\tau] = 30 \text{ MPa}$

结论：满足剪切强度要求。

例 2 (书例2.15)

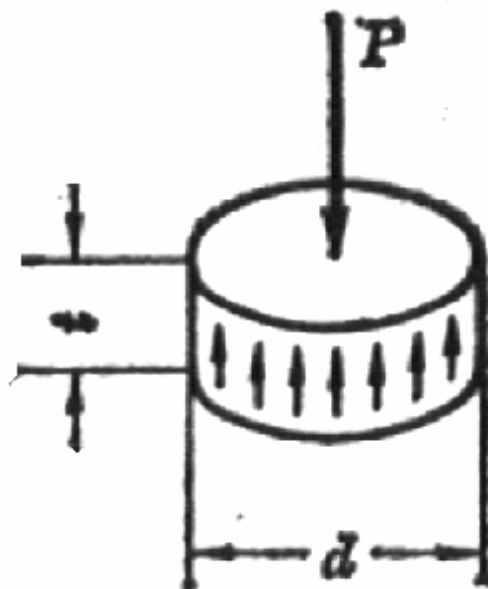
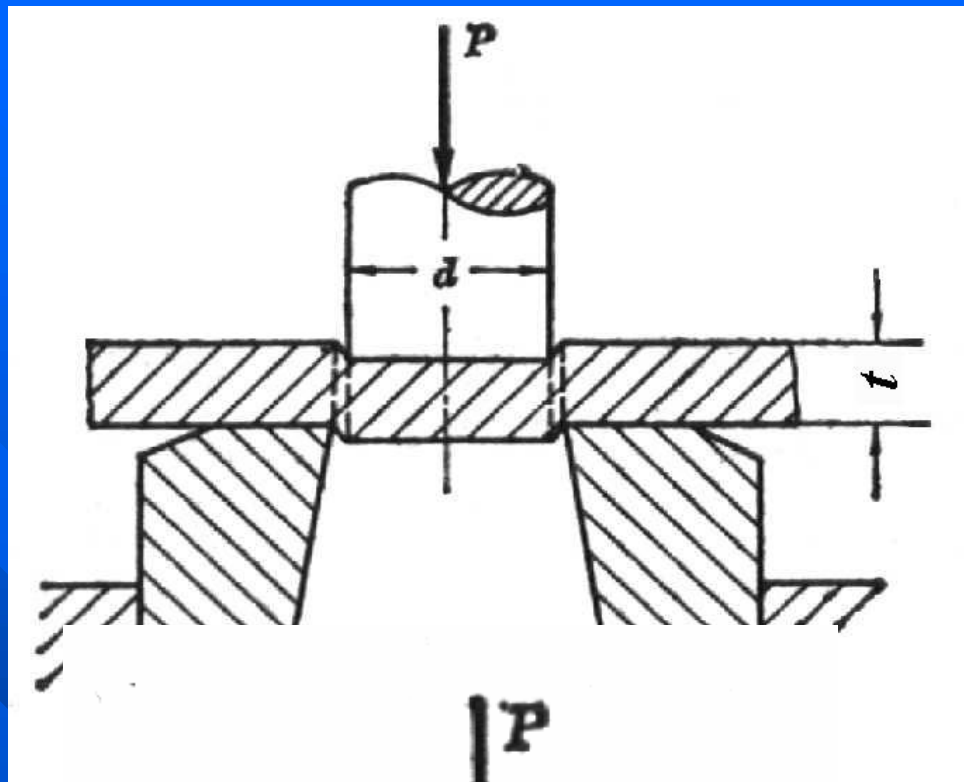
已知：钢板厚 $t=10\text{mm}$ ，
其剪切极限应力 $\tau_u=300$
MPa。

求：要冲出直径 $d=25$
mm的孔，需多大冲剪力 P ？

解：剪切面是哪一个面？
剪切面的面积

$$A = \pi d \cdot t = 785\text{mm}^2$$

$$P \geq A \tau_u = 236\text{kN}$$



2. 挤压的实用计算

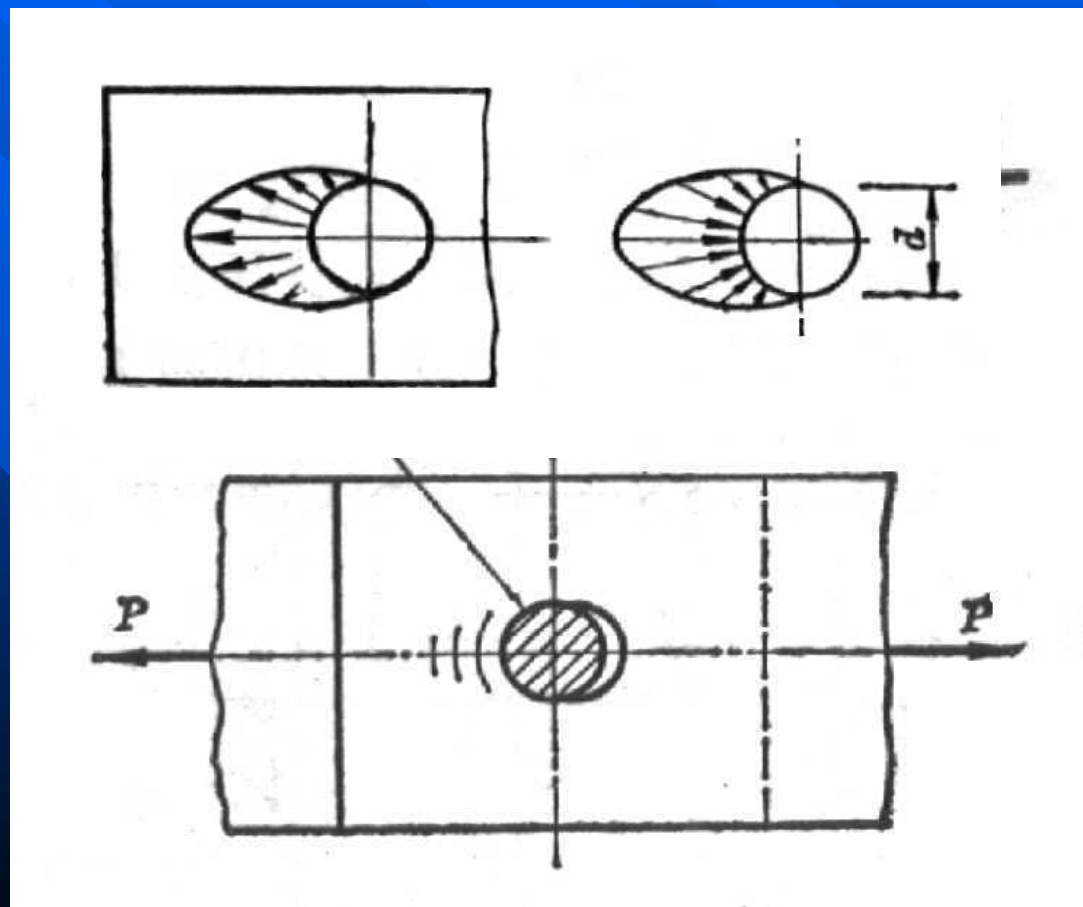
- 挤压

连接件和被连接件接触面相互压紧的现象。

- 接触面上由于挤压力太大而产生塑性变形，形成的破坏称挤压破坏。

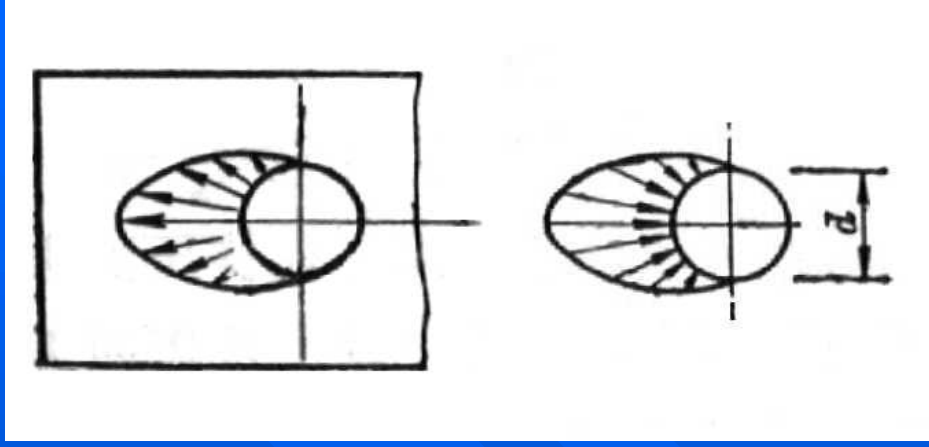
- 应力分布

- 简化假设



- 简化假设

应力在挤压面上均匀分布。



- 挤压应力

$$\sigma_{bs} = \frac{P}{A_{bs}}$$

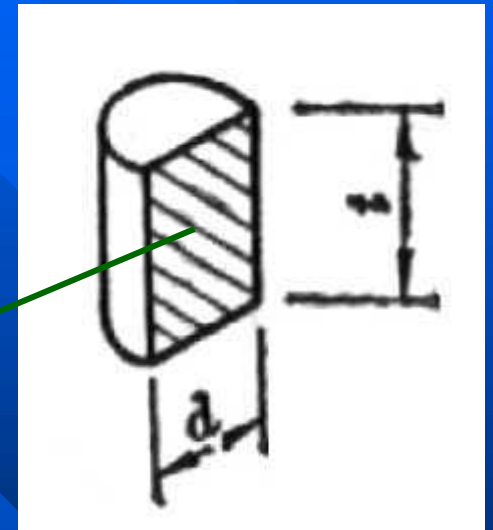
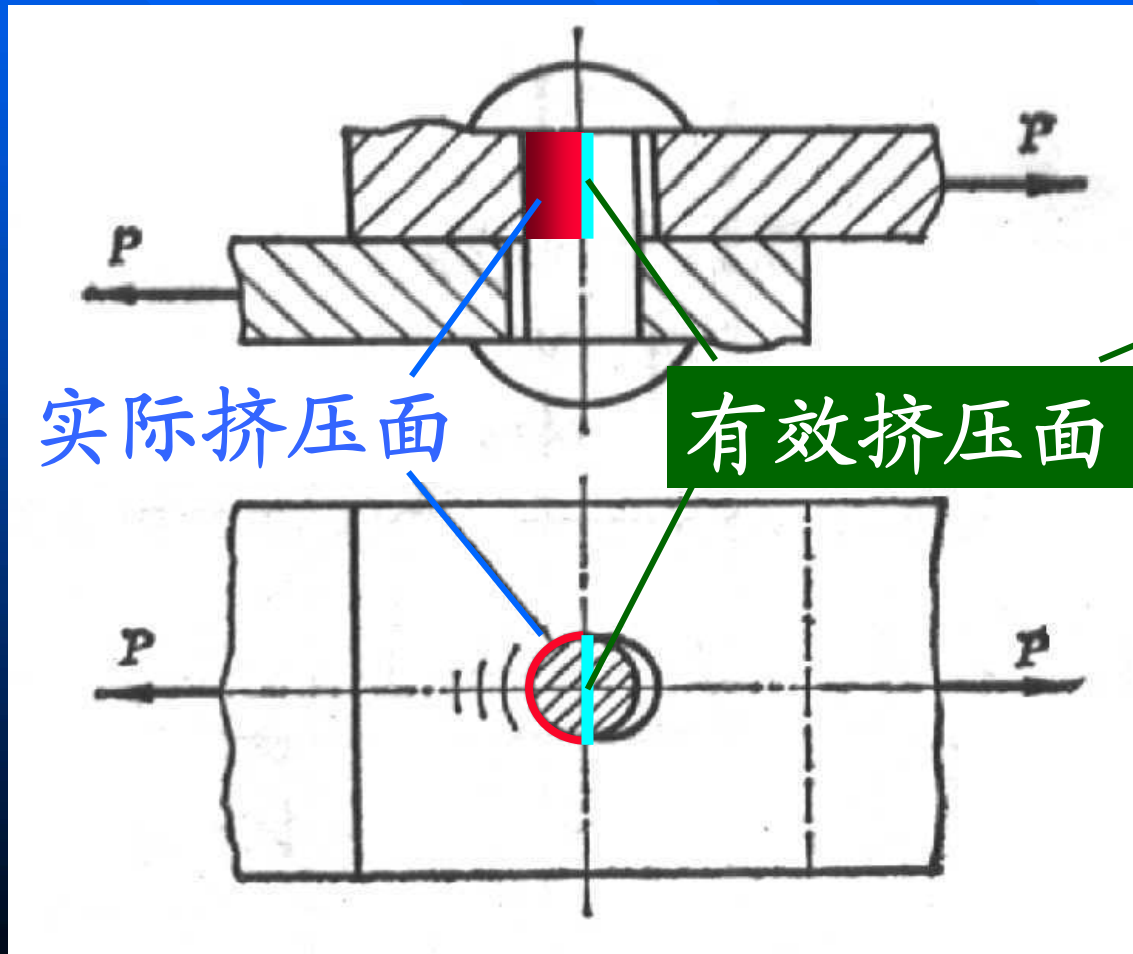
P ———→ 挤压面上传递的力
 A_{bs} ———→ 有效挤压面的面积。

- 有效挤压面面积的计算

有效挤压面面积等于实际挤压面面积在垂直于总挤压力作用线的平面上的投影。

- 有效挤压面面积的计算

有效挤压面面积等于实际挤压面面积在垂直于总挤压力作用线的平面上的投影。



对圆截面杆:

$$A_{bs} = d \cdot t$$

对圆截面杆:

$$A_{bs} = d \cdot t$$

对平键:

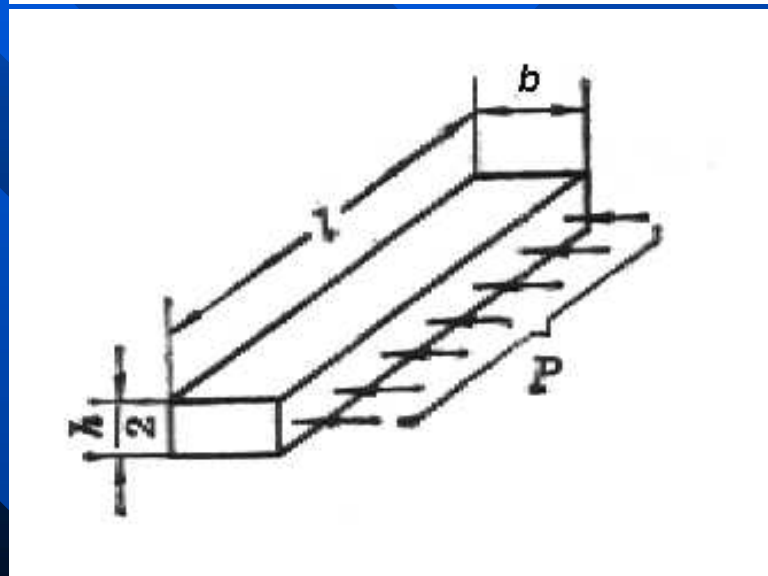
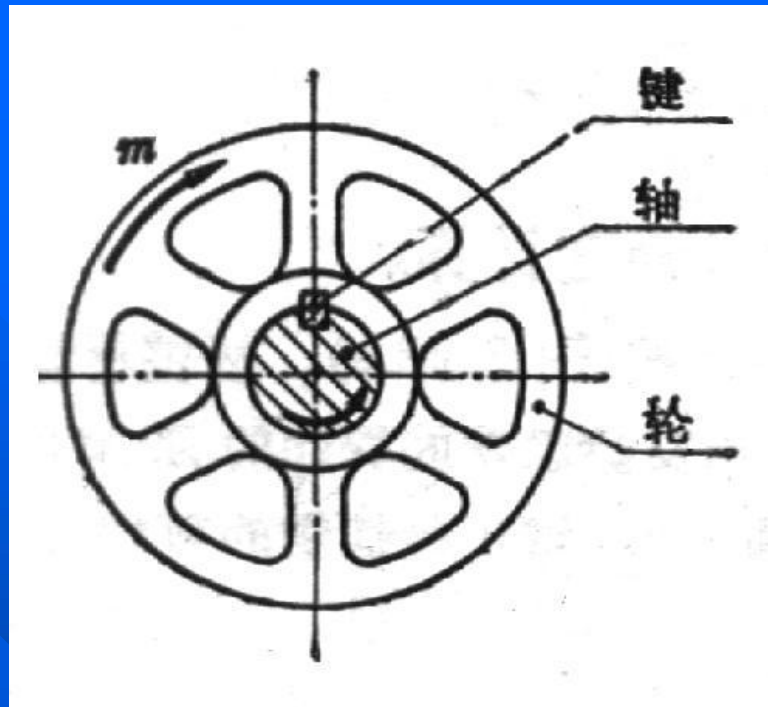
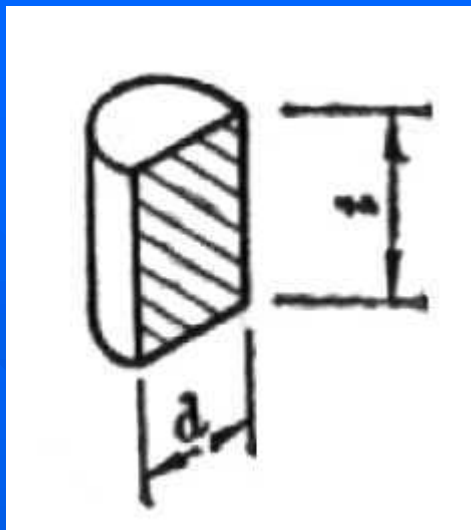
$$A_{bs} = \frac{1}{2} h \cdot l$$

● 挤压强度条件

$$\sigma_{bs} = \frac{P}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$$

许用挤压应力通常大于许用应力，一般地

$$[\sigma_{bs}] = (1.7 \sim 2)[\sigma]$$



例 3 (书例2.16)

已知: $d=70\text{mm}$, 键的尺寸为 $b \times h \times l = 20 \times 12 \times 100\text{mm}$, 力偶 $m = 2 \text{ kNm}$, 键的 $[\tau] = 60 \text{ MPa}$, $[\sigma_{bs}] = 100 \text{ MPa}$ 。

求: 校核键的强度。

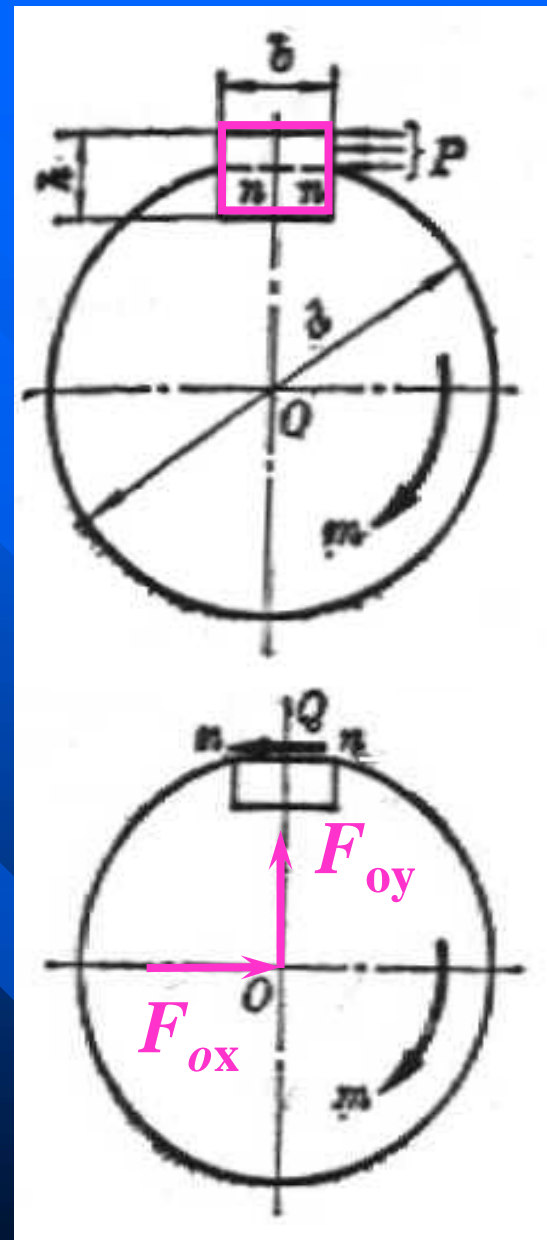
解: 1) 校核键的剪切强度

◆ 剪切面上的剪力

取键的下半部分和轴, 受力如图

$$\sum M_o(F) = 0 \quad Q \cdot d / 2 = m$$

$$\rightarrow \quad Q = \frac{2m}{d}$$



1) 校核键的剪切强度

◆ 剪切面上的剪力

取键的下半部分和轴，受力如图

$$\sum M_o(F) = 0 \quad Q \cdot d/2 = m$$



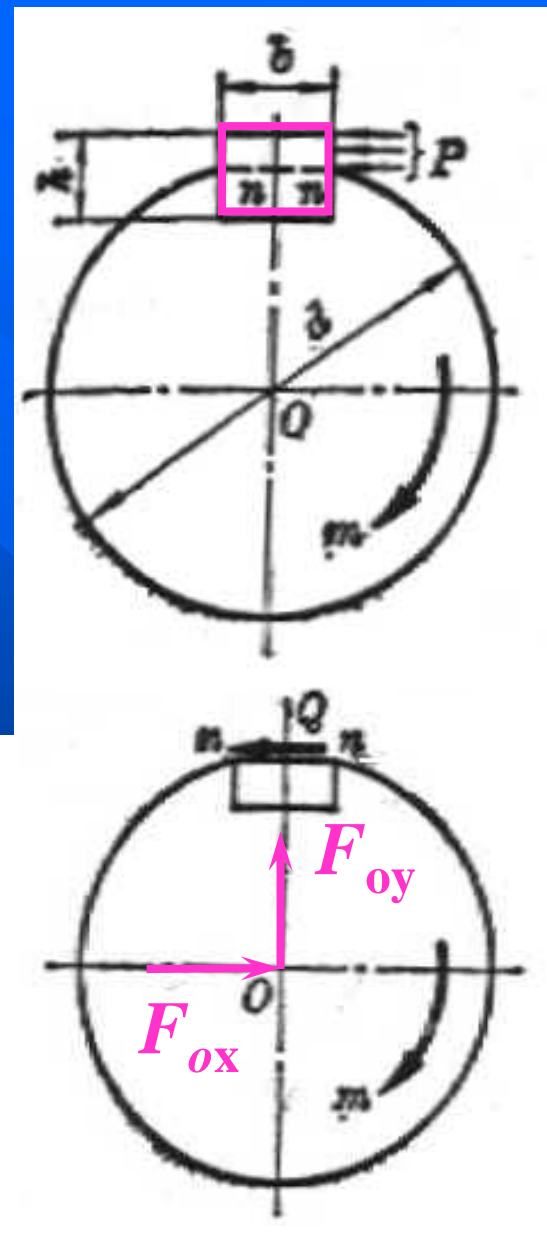
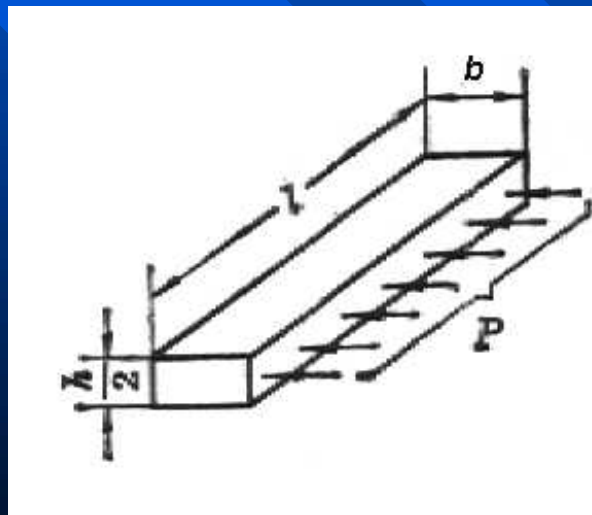
$$Q = \frac{2m}{d}$$

◆ 剪切面的面积

$$A = bl$$

◆ 切应力

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{2m}{d \cdot bl}$$



◆ 切应力

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{2m}{d \cdot bl} = 28.6 \text{ MPa} < [\tau] = 60 \text{ MPa}$$

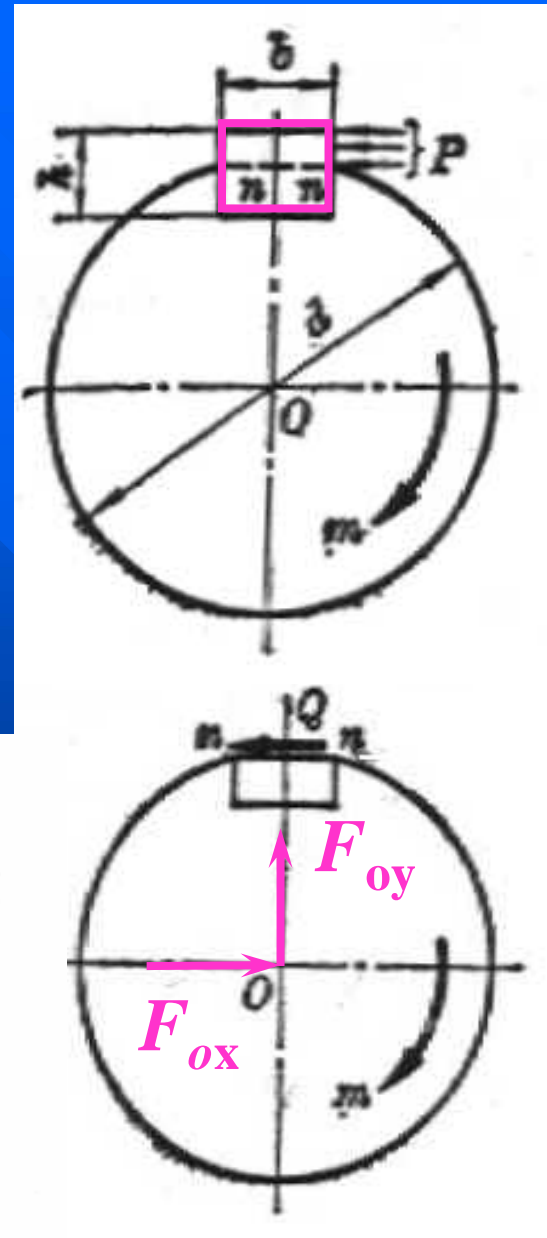
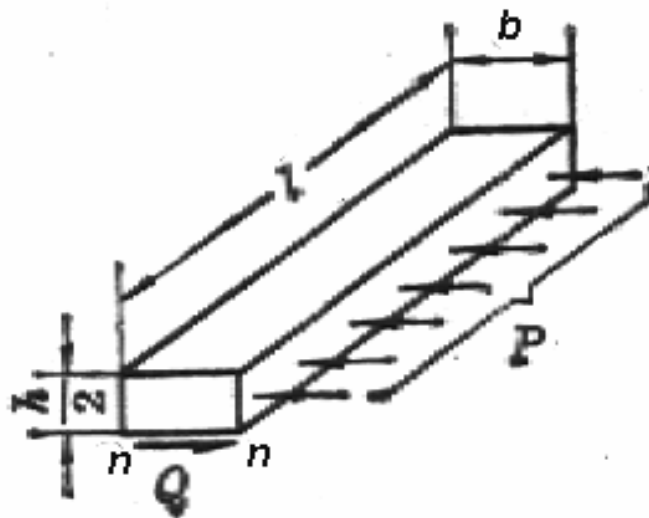
满足剪切强度要求。

2) 校核键的挤压强度

◆ 挤压力

取键的上半部分，受力如图

$$P = Q$$



2) 校核键的挤压强度

◆ 挤压力

取键的上半部分，受力如图

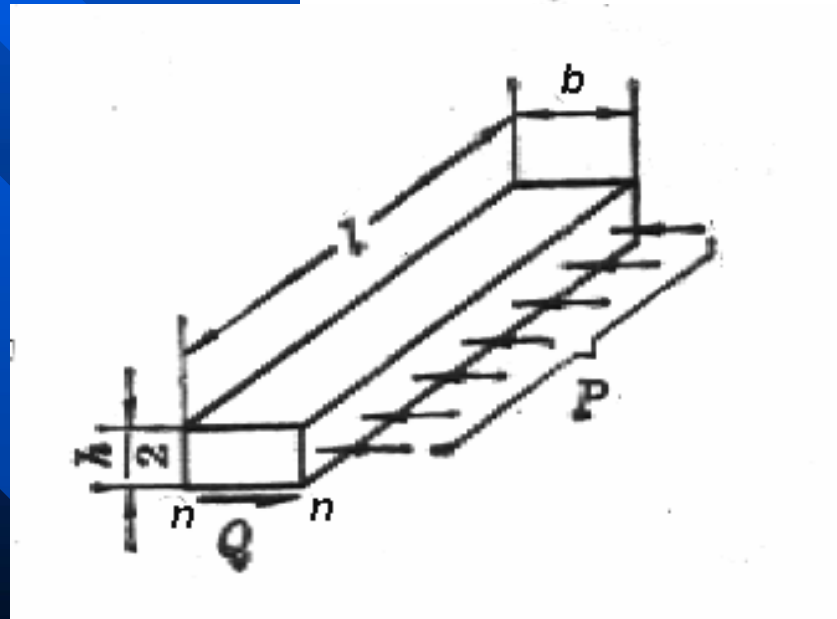
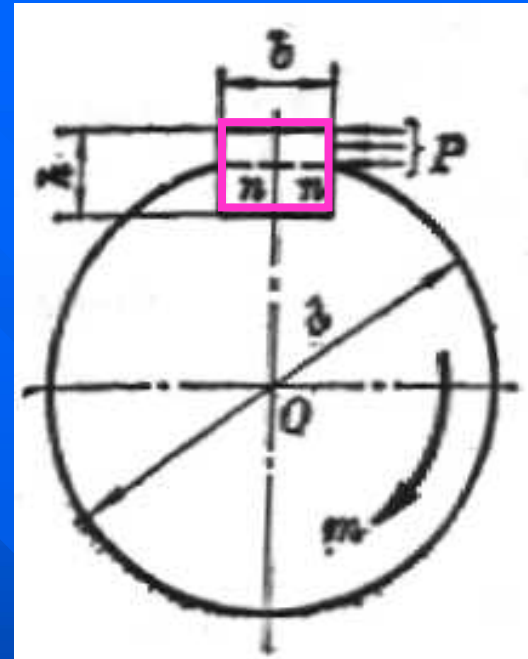
$$P = Q$$

◆ 有效挤压面 $A_{bs} = \frac{1}{2}hl$

◆ 挤压应力

$$\sigma_{bs} = \frac{P}{A_{bs}} = 95.3 \text{ MPa}$$
$$A_{bs} < [\sigma_{bs}]$$

满足挤压强度要求。



例 4 (书例2.17)

题目同书例2.14

已知: $[\tau] = 30$

MPa, 直径 $d = 20$ mm, $t = 8$ mm,

$1.5t = 12$ mm, $P =$

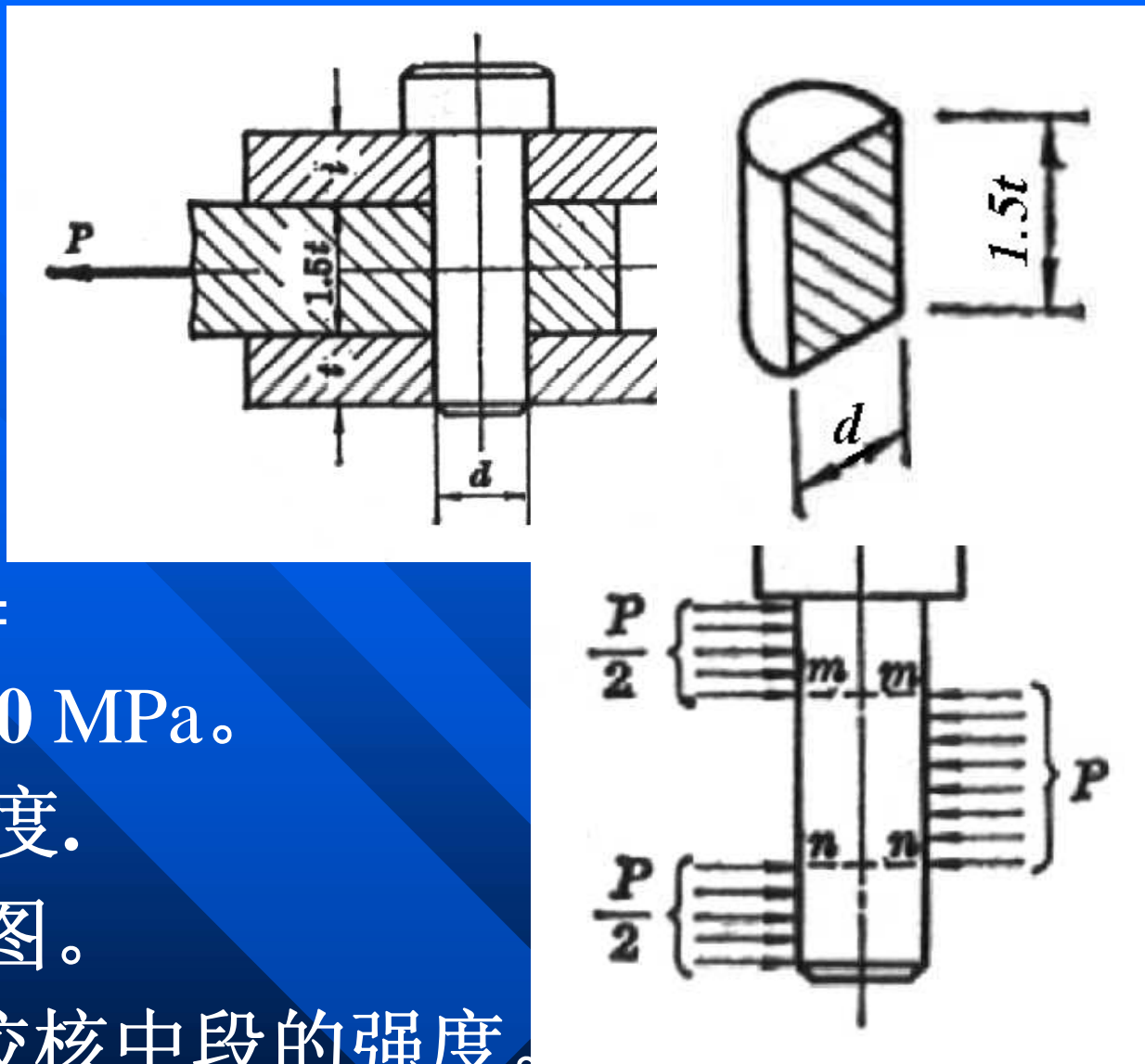
15kN。 $[\sigma_{bs}] = 100$ MPa。

求: 校核挤压强度。

解: 插销受力如图。

中段较危险, 应校核中段的强度。

◆ 有效挤压面 $A_{bs} = d \cdot 1.5t$

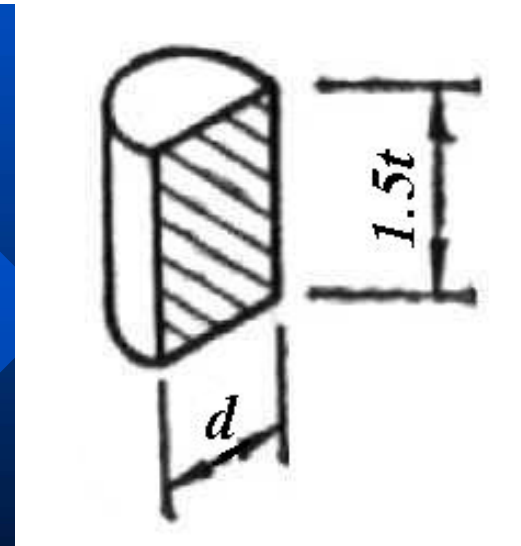
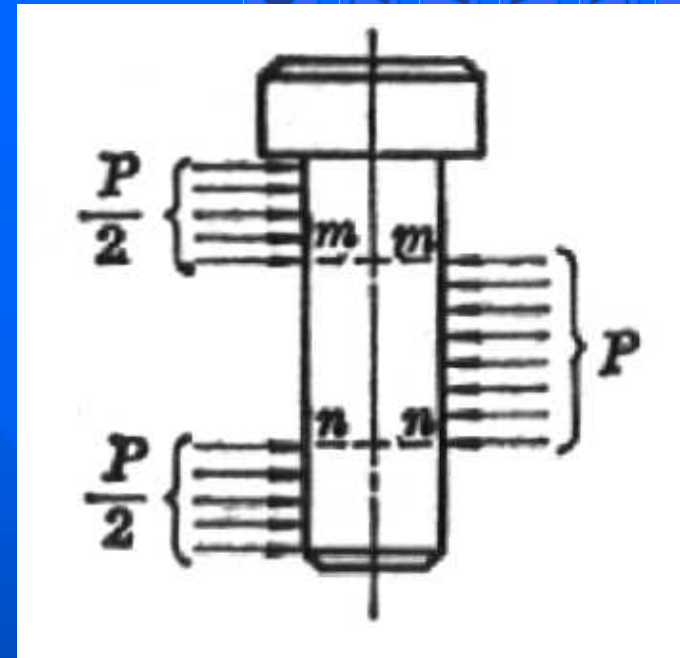


◆ 有效挤压面 $A_{bs} = d \cdot 1.5t$

◆ 挤压应力

$$\sigma_{bs} = \frac{P}{A_{bs}} = 62.5 \text{ MPa} < [\sigma_{bs}]$$

满足挤压强度要求。



谢谢大家!