

# 平面应变条件下的极限土压力

路德春<sup>1</sup>, 张在明<sup>1, 2</sup>, 杜修力<sup>1</sup>, 姚仰平<sup>3</sup>

(1. 北京工业大学 岩土与地下工程研究所, 北京 100124; 2. 北京市勘察设计研究院, 北京 100038;  
3. 北京航空航天大学 交通科学与工程学院, 北京 100191)

**摘要:** 针对朗肯土压力理论计算结果与实测结果往往出现偏差, 且在很多工况下偏于保守的不足, 基于平面应变条件下考虑中主应力影响的强度准则, 提出新的土压力计算方法。平面应变方向上的主应力在极限平衡条件下为中主应力, 在刚性假定基础上通过静止土压力系数确定, 结合强度准则得到大主应力与小主应力之间的关系, 进而求得土压力系数。该方法的优点在于: 一方面理论严密, 结论简单, 便于应用, 通过简单的计算即可得到分析结果; 另一方面分析结果不仅能充分发挥材料的强度潜能, 产生一定的经济效益, 并且对于实际工程分析结果仍然是偏于安全的。理论分析结果表明, 朗肯土压力理论的计算误差随着土的摩擦角的增大而增大。通过与试验结果的比较表明, 该土压力计算方法更接近实测数据, 从而可更好地指导挡土结构的设计计算。

**关键词:** 土力学; 土压力; 平面应变; 中主应力; 挡土墙

**中图分类号:** TU 43

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2008)增 2 - 3354 - 06

## LIMIT EARTH PRESSURE UNDER PLANE STRAIN CONDITION

LU Dechun<sup>1</sup>, ZHANG Zaiming<sup>1, 2</sup>, DU Xiuli<sup>1</sup>, YAO Yangping<sup>3</sup>

(1. *Institute of Geotechnical and Underground Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;*  
2. *Beijing Engineering Consultants Ltd., Beijing 100038, China;*  
3. *School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China*)

**Abstract:** Based on the strength criterion under plane strain condition and Rankine's theory, a simplified method for determination of limit earth pressure is proposed. The principal stress in the plane strain direction, which can be determined under the rigidity-plasticity assumption using static earth pressure coefficient, is the intermediate principal stress under the limit equilibrium condition. The relationship between major and minor principal stresses is obtained based on the strength criterion. Then the earth pressure coefficient can be determined. Although the proposed method is as simple as that of the Rankine's theory, it can obtain more reasonable calculation results, and accordingly improve the design methodology yielding output more economically. The results also show that the difference between the proposed method and the Rankine's theory is enlarged along with the increase of the friction angle of the material. The validity of this method is confirmed by observed data from the practical foundation engineering. Compared with the Rankine's theory, the proposed method can be more rationally used in soil-retaining structure designing.

**Key words:** soil mechanics; earth pressure; plane strain; intermediate principal stress; retaining walls

**收稿日期:** 2007 - 04 - 17; **修回日期:** 2007 - 06 - 20

**基金项目:** 中国博士后科学基金项目(20070410030); 国家自然科学基金资助项目(90715035, 50809001); 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2007CB714203)

**作者简介:** 路德春(1977 -), 男, 博士, 2006 年于北京航空航天大学获博士学位, 现任讲师, 主要从事强度理论、土的本构模型以及岩土地震工程方面的教学与研究工作。E-mail: dechun@bjut.edu.cn

## 1 引言

随着岩土测试技术的发展以及本构理论研究的深入<sup>[1]</sup>, 人们对土体变形与破坏机制的认识也日趋完善, 尤其是土压力的作用机制。如, 在 CSF(critical slip field)概念基础上的极限平衡分析方法<sup>[2]</sup>; 数值计算方法<sup>[3]</sup>等的相继出现; 基于经典的土压力理论, 引入非线性破坏准则, 考虑中主应力<sup>[4, 5]</sup>、静水压力<sup>[6]</sup>的影响; 考虑支挡结构的刚度<sup>[7]</sup>, 土与挡土结构之间的摩擦因素<sup>[8]</sup>, 以及结合本构模型考虑土体的变形<sup>[9]</sup>等。可以看出, 土压力的正确计算是一个极其复杂的问题, 涉及到的相关因素<sup>[10, 11]</sup>很多, 因而各种土压力的计算方法都不可避免地存在一定的局限性。

英国学者朗肯(W. J. M. Rankine)于 1857 年提出的朗肯土压力理论, 其概念清晰, 理论严谨, 结论简单, 通过简单的计算即可得到分析结果, 并且计算结果偏于安全, 因而深得工程技术人员的普遍欢迎, 至今仍被广泛应用, 成为经典的土压力分析计算理论之一。朗肯土压力理论将土压力的计算问题视为平面应变条件下的极限平衡问题考虑, 并基于 Mohr-Coulomb 准则得出了土压力的计算公式。不足之处在于所采用的 Mohr-Coulomb 准则没有考虑中主应力对强度的影响, 计算结果偏于保守, 已被众多的试验结果所证实<sup>[12]</sup>。平面应变条件下的强度准则  $\sigma_2 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_3}$  已被普遍认可, 但至今还没有实际的具体应用。本文将平面应变条件下的强度准则  $\sigma_2 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_3}$  用于分析土压力问题, 在朗肯土压力理论的基础上提出了新的土压力计算方法。该方法, 一方面具有朗肯土压力理论的优点, 即理论严谨, 形式简单, 便于应用; 另一方面, 可充分发挥材料的强度潜能, 产生一定的经济效益, 并且可得到对实际工程仍然偏于安全的分析结果。

## 2 朗肯土压力理论

### 2.1 基本假定

- (1) 墙背垂直、光滑、墙后填土面水平。
- (2) 半无限刚塑性各点均达到极限平衡条件。

### 2.2 土压力分析方法

朗肯土压力理论是研究平面应变条件下土体达到极限平衡状态时的主应力关系, 以 Mohr-Coulomb 准则为基础, 给出土压力计算公式。从这一角度理

解, 朗肯主动土压力状态和被动土压力状态分别为 Mohr-Coulomb 准则破坏曲线上的点, 可通过 Mohr-Coulomb 准则变形直接得到。Mohr-Coulomb 准则可表示为

$$(1 - \sin \varphi)\sigma_1 - (1 + \sin \varphi)\sigma_3 = 2c \cos \varphi \quad (1)$$

式中:  $\varphi$  为土的内摩擦角,  $c$  为黏聚力。

将式(1)两边同除以  $1 + \sin \varphi$ , 移项并利用三角函数关系, 可得如下主应力关系:

$$\sigma_3 = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \sigma_1 - 2c \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} \quad (2)$$

即

$$\sigma_a = K_a^R \sigma_z - 2c \sqrt{K_a^R} \quad (3)$$

式中:  $K_a^R$  为朗肯主动土压力系数, 其表达式为

$$K_a^R = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (4)$$

同理, 也可通过式(1)变形, 写出被动土压力公式:

$$\sigma_p = K_p^R \sigma_z + 2c \sqrt{K_p^R} \quad (5)$$

式中:  $K_p^R$  为朗肯被动土压力系数, 其表达式为

$$K_p^R = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (6)$$

## 3 静止土压力

Jaky 针对正常固结土, 得出了一维固结侧压力系数  $K_{one}$  的理论解, 即

$$K_{one} = \left( 1 + \frac{2}{3} \sin \varphi \right) \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right) \quad (7)$$

在众多关于该式近似化处理的表达式中, 应用最广泛的是如下表达式<sup>[13]</sup>:

$$K_{one} \approx 1 - \sin \varphi \quad (8)$$

对于正常固结土, 可认为静止土压力系数  $K_0$  与  $K_{one}$  相等, 即

$$K_0 = 1 - \sin \varphi \quad (9)$$

对于超固结土,  $K_0$  可简单地表示为内摩擦角和超固结比  $OCR$  的函数<sup>[14, 15]</sup>, 即

$$K_0 = (1 - \sin \varphi) OCR^{\sin \varphi} \quad (10)$$

## 4 主动与被动土压力

### 4.1 土压力模型

平面应变条件下的主动与被动土压力，其实质就是平面应变条件下土体中的小主应力和大主应力，即主应力之间的关系<sup>[16]</sup>。在朗肯土压力理论假定的基础上，本文假定平面应变条件下，无黏性土的内摩擦角  $\varphi_{ps}$  为常数。主动与被动土压力系数可分别写为

$$K_a = \frac{\sigma_{3ps}}{\sigma_{1ps}} = \frac{1 - \sin \varphi_{ps}}{1 + \sin \varphi_{ps}} \quad (11)$$

$$K_p = \frac{\sigma_{1ps}}{\sigma_{3ps}} = \frac{1 + \sin \varphi_{ps}}{1 - \sin \varphi_{ps}} \quad (12)$$

所以主动与被动土压力系数有如下关系：

$$K_a K_p = 1 \quad (13)$$

本文给出的土压力模型如图 1 所示。自重应力  $\sigma_z$  的表达式为

$$\sigma_z = \gamma z \quad (14)$$

式中： $\gamma$  为土的容重， $z$  为水平地面到单元的深度。

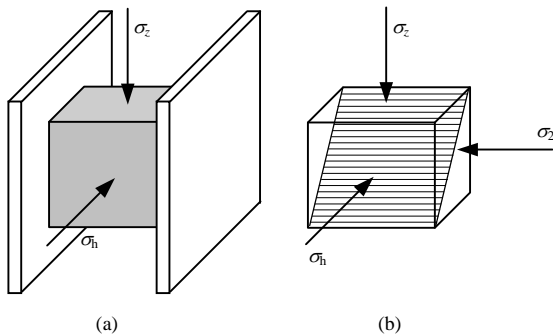


图 1 土压力模型

Fig.1 Model of earth pressure

平面应变方向的主应力在极限平衡条件下为中主应力  $\sigma_2$ 。当水平应力  $\sigma_h$  为主动土压力条件时，主应力关系为  $\sigma_h < \sigma_2 < \sigma_z$ ；当  $\sigma_h$  为被动土压力条件时，主应力关系为  $\sigma_z < \sigma_2 < \sigma_h$ 。

### 4.2 平面应变条件下土的强度准则

Satake 根据相关联流动法则和 SMP 准则得出了平面应变条件下的主应力条件<sup>[17]</sup>，如图 2 所示。罗汀等将其确定为平面应变条件下的强度准则<sup>[18]</sup>，其

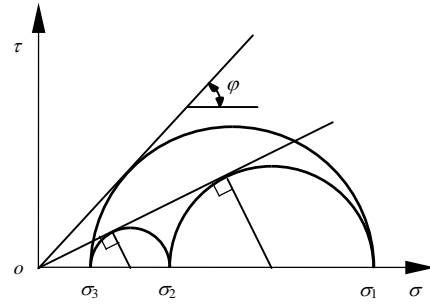


图 2 平面应变条件下的莫尔应力圆

Fig.2 Mohr's stress circle under plane strain condition

表达式为

$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_3} \quad (15)$$

H. Matsuoka 和 T. Nakai<sup>[19]</sup>通过砂土的真三轴试验证实，在平面应变条件下砂土破坏时，主应力关系满足式(15)。

### 4.3 无黏性土的土压力

如图 1 所示，主动土压力状态为， $\sigma_z$  保持不变，减小  $\sigma_h$  直至土体在平面应变条件下达到极限平衡状态。由强度准则式(15)可知，求  $\sigma_h$  的关键在于如何确定中主应力  $\sigma_2$ 。

由刚塑性假定可知， $\sigma_h$  减小时，土体在达到极限平衡条件前不发生变形，因而不改变  $\sigma_2$  的大小， $\sigma_2$  可通过静止土压力条件式确定，即

$$\sigma_2 = K_0 \sigma_z \quad (16)$$

实际土体不符合刚塑性条件，在  $\sigma_h$  减小时有变形产生，因而中主应力  $\sigma_2$  减小，所以由式(16)确定的中主应力为其最大值。将式(16)代入式(15)可得无黏性土的主动土压力系数  $K_a$  为

$$K_a = \frac{\sigma_h}{\sigma_z} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_z^2} = K_0^2 \quad (17)$$

因此，式(17)确定的主动土压力系数是其最大值。对于正常固结土，静止土压力系数  $K_0$  可由式(9)确定，将其代入式(17)可得

$$K_a = (1 - \sin \varphi)^2 \quad (18)$$

对于无黏性土，将式(18)代入式(13)可得被动土压力系数  $K_p$  为

$$K_p = \frac{1}{(1 - \sin \varphi)^2} \quad (19)$$

朗肯主动土压力系数  $K_a^R$  (式(4))和本文提出的主动土压力系数  $K_a$  (式(18))随内摩擦角  $\varphi$  的变化规律, 如图 3 所示, 随着内摩擦角的增大, 主动土压力系数减小, 并且本文提出的主动土压力系数小于朗肯主动土压力系数, 由式(17)确定的主动土压力系数为其最大值, 可见朗肯主动土压力系数偏大, 对于挡土墙等结构设计过于保守。如图 4 所示, 以  $\varphi = 30^\circ$  为例, 朗肯主动土压力系数  $K_a^R = 1/3$ ; 本文提出的主动土压力系数  $K_a = 1/4$ , 相对误差为  $1/3$ 。以本文提出的主动土压力系数  $K_a$  为准, 分析朗肯主动土压力系数  $K_a^R$  的相对误差  $d$ :

$$d = \frac{K_a^R - K_a}{K_a} = \tan^2 \varphi \quad (20)$$

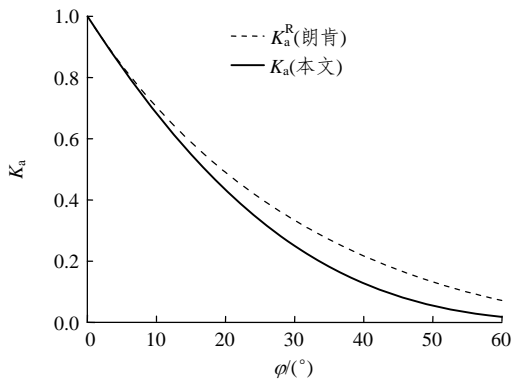


图 3 主动土压力系数与内摩擦角的关系

Fig.3 Relationship between active earth pressure coefficients and internal friction angle

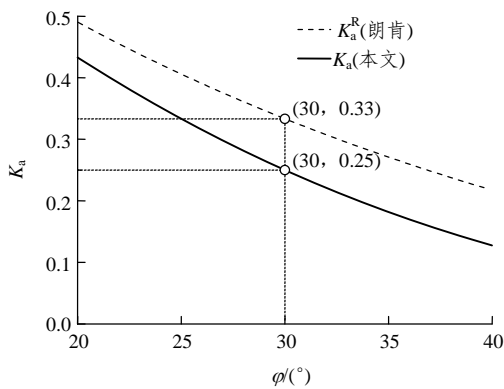


图 4  $\varphi = 30^\circ$  时朗肯主动土压力系数的相对误差

Fig.4 Relative error of Rankine's active earth pressure coefficients when  $\varphi = 30^\circ$

$d$  随着  $\varphi$  的增大而增大(见图 5), 当  $\varphi = 30^\circ$  时,  $d = 1/3$ 。朗肯被动土压力系数  $K_p^R$  (式(6))和本文提出的被动土压力系数  $K_p$  (式(19))与内摩擦角  $\varphi$  的变化规律如图 6 所示, 随着内摩擦角的增大, 被动土压力系数增大, 并且  $K_p$  大于  $K_p^R$ 。

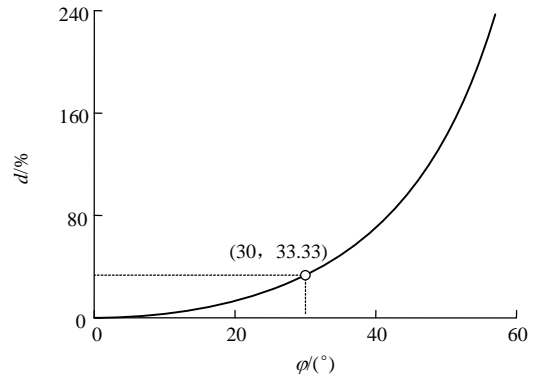


图 5 朗肯主动土压力系数的相对误差

Fig.5 Relative error of active earth pressure coefficients calculated with Rankine's theory

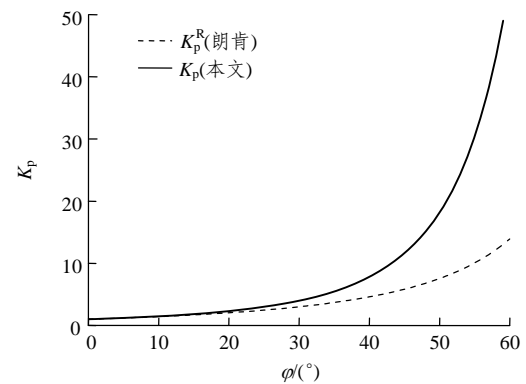


图 6 被动土压力系数与内摩擦角的关系

Fig.6 Relationship between passive earth pressure coefficients and internal friction angle

#### 4.4 黏性土的土压力

对于黏性土, 可通过坐标平移与无黏性土统一, 其关系式<sup>[5]</sup>为

$$\bar{\sigma}_i = \sigma_i + \sigma_0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (21)$$

式中:  $\sigma_0$  为黏结应力, 在三轴压缩条件下有如下关系:

$$\sigma_0 = c \cot \varphi \quad (22)$$

式中:  $c$  为黏聚力。将式(21)代入式(17)可得

$$\sigma_a + c \cot \varphi = K_a (\sigma_z + c \cot \varphi) \quad (23)$$

将式(18)代入式(23)可得黏性土的主动土压力公式:

$$\sigma_a = (1 - \sin \varphi)^2 \sigma_z - \cos \varphi (2 - \sin \varphi) c \quad (24)$$

同理可得黏性土的被动土压力公式:

$$\sigma_p = \frac{1}{(1 - \sin \varphi)^2} \sigma_z + \frac{\cos \varphi (2 - \sin \varphi)}{(1 - \sin \varphi)^2} c \quad (25)$$

### 5 算例

#### 5.1 无黏性土算例

图 7 给出了砂土的主动土压力<sup>[20]</sup>，其中， $h$  为墙高， $\sigma_a$  为墙体水平土压力。试验采用无黏性的松散砂土，内摩擦角  $\varphi = 34^\circ$ ，容重  $\gamma = 19.56 \text{ kN/m}^3$ 。相当于挡墙的板，由杂木制成，厚度 5 cm，高 1 m，宽 1 m，并用两肋加强，以满足刚度要求。图 7 中，试验曲线为挡墙垂直且水平移动 3 mm 时测得的土压力，由于土体未达到极限平衡状态，因此该曲线表示的土压力大于主动土压力。图 7 的计算结果表明，郎肯土压力理论计算的主动土压力偏大，本文方法与郎肯土压力理论比较更接主动土压力。

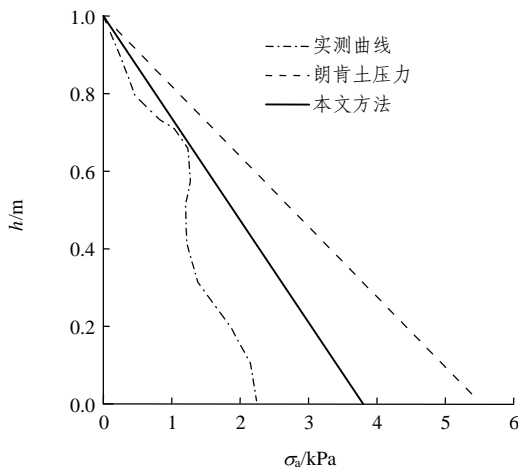
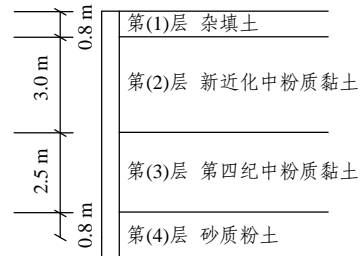


图 7 砂土的主动土压力<sup>[20]</sup>  
Fig.7 Active earth pressure of sand<sup>[20]</sup>

#### 5.2 黏性土算例

某深基坑，深 7.1 m，采用桩径为 800 mm 的悬壁桩支护，桩长 12.7 m。图 8 给出了由室内试验测得的基坑土层分布及土性指标<sup>[5]</sup>。

图 9 给出了黏土的主动土压力  $\sigma_a$  随深度  $z$  的变化曲线。通过理论计算和实测曲线的比较表明，本文方法确定的主动土压力介于郎肯土压力与实测曲线之间，更接近实测曲线，并且大于实测曲线。一方面，一定程度上改进了郎肯土压力计算结果过于保守的不足，另一方面，分析结果对于挡土结构的设计计算是安全的。因此，本文提出的土压力计算方法，与郎肯土压力比较具有很大的优越性。



- 第(1)层:  $\gamma = 19.2 \text{ kN/m}^3$ ,  $c = 15 \text{ kPa}$ ,  $\varphi = 15^\circ$
- 第(2)层:  $\gamma = 19.0 \text{ kN/m}^3$ ,  $c = 5 \text{ kPa}$ ,  $\varphi = 21^\circ$
- 第(3)层:  $\gamma = 19.6 \text{ kN/m}^3$ ,  $c = 14 \text{ kPa}$ ,  $\varphi = 24.8^\circ$
- 第(4)层:  $\gamma = 20.0 \text{ kN/m}^3$ ,  $c = 6 \text{ kPa}$ ,  $\varphi = 28.5^\circ$

图 8 土层示意图<sup>[5]</sup>  
Fig.8 Illustration of soil layers<sup>[5]</sup>

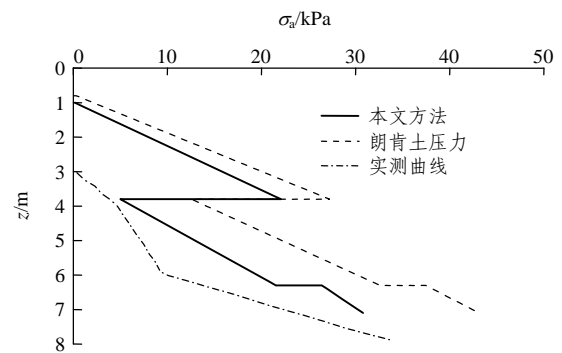


图 9 黏土的主动土压力  $\sigma_a$  与深度  $z$  的关系曲线  
Fig.9 Relational curves between active earth pressure  $\sigma_a$  of clay and depth  $z$

### 6 结论

土压力问题的本质是土的应力 - 应变关系，应利用合理的本构模型求解，在极限平衡条件下可将其简化通过强度准则确定。本文在郎肯土压力理论基本假定的基础上，将平面应变条件下的强度准则  $\sigma_2 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_3}$  用于分析土压力问题，提出了新的土压力计算方法。该方法既具有郎肯土压力的优点，即理论严谨，结论简单实用，又可充分发挥材料的强度潜能，产生一定的经济效益，并且得到对实际工程偏于安全的分析结果。通过与试验结果比较表明，本文提出的土压力计算方法优于郎肯土压力理论，所给出的土压力系数可取代郎肯土压力系数。

#### 参考文献(References):

[1] 路德春. 基于广义非线性强度理论的土的应力路径本构模型[博士

- 学位论文[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2006.(LU Dechun. A constitutive model for soils considering complex stress paths based on the generalized nonlinear strength theory[Ph. D. Thesis][D]. Beijing: Beihang University, 2006. (in Chinese))
- [2] ZHU D Y, QIAN Q H, LEE C F. Active and passive critical slip fields for cohesionless soils and calculation of lateral earth pressures[J]. *Geotechnique*, 2001, 51(5): 407 - 423.
- [3] DEEPANKAR C, SHAILESH S. New approach for estimation of static and seismic active earth pressure[J]. *Geotechnical and Geological Engineering*, 2006, 24(1): 117 - 127.
- [4] WOODWARD P K. Earth pressure coefficients based on the Lade-Duncan criterion[J]. *Engineering Structures*, 1997, 19(9): 733 - 737.
- [5] 江 强, 朱建明, 姚仰平. 基于 SMP 准则的土体三维应力状态土压力问题[J]. *岩土工程学报*, 2006, 28(增): 1 415 - 1 417.(JIANG Qiang, ZHU Jianming, YAO Yangping. Earth pressures of three-dimensional soil stress states based on SMP failure criterion[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2006, 28(Supp.): 1 415 - 1 417.(in Chinese))
- [6] YANG X L, YIN J H. Estimation of seismic passive earth pressures with nonlinear failure criterion[J]. *Engineering Structures*, 2006, 28(3): 342 - 348.
- [7] PSARROPOULOS P N, KLONARIS G, GAZETAS G. Seismic earth pressure on rigid and flexible retaining walls[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2005, 25(7/10): 795 - 809.
- [8] LANCELOTTA R. Analytical solution of passive earth pressure[J]. *Geotechnique*, 2002, 52(8): 617 - 619.
- [9] 秦四清, 李 晓. 非线性库仑主动土压力分析理论[J]. *岩石力学与工程学报*, 2006, 25(12): 2 399 - 2 406.(QIN Siqing, LI Xiao. Nonlinear theory on Coulomb's active earth pressure[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, 25(12): 2 399 - 2 406.(in Chinese))
- [10] 李广信. 基坑支护结构上水土压力的分算与合算[J]. *岩土工程学报*, 2000, 22(3): 348 - 352.(LI Guangxin. Estimating the water and earth pressures on the supporting structure around a foundation pit separately and together[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2000, 22(3): 348 - 352.(in Chinese))
- [11] 张在明. 北京地区高层和大型公用建筑的地基基础问题[J]. *岩土工程学报*, 2005, 27(1): 11 - 23.(ZHANG Zaiming. Problems on foundations of high-rise and large-scale public building in Beijing Area[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2005, 27(1): 11 - 23.(in Chinese))
- [12] 顾慰慈. 挡土墙土压力计算[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2002.(GU Weici. Calculation of earth pressure on retaining wall[M]. Beijing: China Building Material Industry Publishing House, 2002.(in Chinese))
- [13] WROTH C P. The interpretation of in-situ soil tests[J]. *Geotechnique*, 1984, 34(4): 449 - 489.
- [14] SCHMIDT B. Earth pressures at rest related to stress history[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1966, 3(4): 239 - 242.
- [15] SIVAKUMAR V, DORAN I G, GRAHAM J, et al. Relationship between  $K_0$  and overconsolidation ratio: a theoretical approach[J]. *Geotechnique*, 2002, 53(4): 450 - 454.
- [16] 路德春, 姚仰平, 周安楠. 土体平面应变条件下的主应力关系[J]. *岩石力学与工程学报*, 2006, 25(11): 1 320 - 1 326.(LU Dechun, YAO Yangping, ZHOU Annan. Relationship between principal stresses of soil mass under plane strain condition[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, 25(11): 1 320 - 1 326.(in Chinese))
- [17] SATAKE M. Stress deformation and strength characteristics of soil under three difference principal stresses(discussion)[J]. *Proceedings of the Japanese Society of Civil Engineers*, 1976, 246: 137 - 138.
- [18] 罗 汀, 姚仰平, 松冈元. 基于 SMP 准则的土的平面应变强度公式[J]. *岩土力学*, 2000, 21(4): 390 - 393.(LUO Ting, YAO Yangping, MATSUOKA H. Soil strength equation in plane strain based on SMP[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2000, 21(4): 390 - 393.(in Chinese))
- [19] MATSUOKA H, NAKAI T. Stress deformation and strength characteristics of soil under three difference principal stresses(closure)[J]. *Proceedings of the Japanese Society of Civil Engineers*, 1976, 246: 139 - 140.
- [20] 周应英, 任美龙. 刚性挡土墙主动土压力的试验研究[J]. *岩土工程学报*, 1990, 12(2): 19 - 26.(ZHOU Yingying, REN Meilong. An experimental study on active earth pressure behind rigid retaining wall[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1990, 12(2): 19 - 26.(in Chinese))