

基于 L1 范数的图像超分辨率及差分统计模型

倚海伦, 王 庆

(西北工业大学计算机学院, 西安 710072)

摘要: 在 L1 范数图像超分辨率重建框架下, 引入参数自适应估计, 该方法对模型误差表现出良好的稳健性并且可以加速收敛。结合差分图像统计特性和概率先验模型, 解释了 L1 范数形式的双边全变差正则项概念, 利用 Kullback-Leibler 距离证明了该正则项的优越性, 并分析了混合先验模型在超分辨率重建中应用的可行性等问题。

关键词: 超分辨率; 正则化; 差分图像

L1-norm-based Image Super-resolution and Its Differential Statistical Model

YI Hai-lun, WANG Qing

(School of Computer, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

【Abstract】 A method for automatically estimating parameters is applied to the L1-norm-based image super-resolution reconstruction framework. The approach can get a stable result with model errors and can improve convergence. A novel explanation of L1-norm-based bilateral total variation(BTV) term is presented according to pixel differences statistics, combined with probability prior model. Superiority of BTV is validated using Kullback-Leibler distance. A theoretical analysis of the feasibility and the problems of super-resolution reconstruction are given using mixture prior distribution.

【Key words】 super-resolution; regularization; pixel difference image

随着 CCD 传感器的广泛使用以及图像分辨率的低成本需求, 超分辨率重建(Super-resolution Reconstruction, SRR) 技术已经成为图像复原领域的研究热点, 通过低成本图像获取系统, 运用信号和图像处理技术来提高图像分辨率, 达到有效辨识目标的目的, 其研究成果可应用于视频影像、医学图像、军事遥感图像的分辨率增强应用中。由低分辨率(Low Resolution, LR)序列图像估计一幅高分辨率(High Resolution, HR)图像的重建算法流程可概括为: 建立观测模型, 定义代价函数, 引入正则约束, 最优化求解。基于 Elad^[1]提出的时域模型, 许多学者研究了快速空域算法, 近几年则开始注重算法的鲁棒性, 即要求重建结果不敏感于模型误差。Zomet 等人^[2]提出了一种鲁棒算法, 但缺乏很好的数学证明; MDSP 研究组则提出了基于 L1 范数估计和双边全变差(Bilateral Total Variation, BTV)的超分辨率重建方法^[3], 该方法可以有效地降低模型误差对重建结果的影响。本文以文献^[3]提出的鲁棒算法为基础, 引入正则参数的自适应估计, 并从差分图像的统计分布模型出发, 结合概率先验模型给出 BTV 正则项一个新的解释, 与 L2 范数形式相比, BTV 正则项的 L1 范数形式具有优越性。

1 观测模型及模型误差

针对用照相机或摄像机捕获的序列图像, Elad^[1]描述了 HR 图像 $X(X \in R^{M_1 \times N_1})$ 经退化产生多幅 LR 图像 $Y_k(Y_k \in R^{M_2 \times N_2}, M_2 < M_1, N_2 < N_1)$ 的过程, 即

$$Y_k = D_k B_k F_k X + E_k \quad (1)$$

其中, $1 \leq k \leq L$, L 是可用的 LR 图像帧数; “ $_k$ ” 是矩阵堆积形

式; $F_k \in R^{M_1 N_1 \times M_2 N_2}$ 表示 HR 图像间的运动变换关系; $B_k \in R^{M_2 N_2 \times M_1 N_1}$ 是系统模糊矩阵; $D_k \in R^{M_2 N_2 \times M_1 N_1}$ 是降采样矩阵; E_k 是加性噪声。由 Y_k 重建 X 需要解决一个大型矩阵的线性方程组问题, 可以通过图像算子操作实现快速计算^[4]。重建未知的 HR 图像同时依赖于观测数据和假定的观测模型, 由于假定的不准确或不真实导致观测模型必然存在误差, 因此迫切需要一种算法, 能在获得较好质量的 HR 图像基础上, 具有对模型误差的适应特性。

2 鲁棒的 SRR 算法

图像超分辨率问题是个“病态问题”, 需要引入正则化约束解空间, 通常对如下最小化问题进行求解, 即

$$\hat{X} = \arg \min_X \left\{ \sum_{k=1}^L \|D_k B_k F_k X - Y_k\|_p + \lambda R(X) \right\} \quad (2)$$

其中, $1 \leq p \leq 2$; L1 和 L2 范数下的数据保真估计分别是 $p=1, p=2$ 时的特例, 分别对应拉普拉斯和高斯噪声模型假定下的最大似然估计。已有的众多 SRR 算法都基于高斯噪声模型, 依据估计理论, 这种最小平方估计的影响函数的无界性使估计结果依赖于模型误差。由广义概率比测试^[3]可以证明, 选择拉普拉斯分布噪声模型是一种能更好地处理这种模型误差的方法。基于双边滤波器^[5], 通过构造具有自适应性和鲁

基金项目: 国家教育部新世纪优秀人才支持计划基金资助项目 (2006-1801)

作者简介: 倚海伦(1981-), 女, 硕士研究生, 主研方向: 图像处理, 模式识别; 王 庆, 教授、博士研究生

收稿日期: 2007-01-25 **E-mail:** yhl_eleven@yahoo.com.cn

棒性的权值,得到如下L1范数形式的BTV正则项,其中, $0 < \alpha < 1$, $T_x^{n_1}, T_y^{n_2}$ 分别是沿水平和垂直方向循环平移 n_1 和 n_2 个像素的算子操作,即

$$Y_{BTV}(X) = \sum_{n_1=0}^S \sum_{n_2=0}^S \alpha^{|n_1|+|n_2|} \|X - T_x^{n_1} T_y^{n_2} X\| \quad (3)$$

最终构造最小化函数,即

$$\hat{X} = \arg \min_X \left[\sum_{k=1}^L \|D_k B_k F_k X - Y_k\| + \lambda \sum_{n_1=0}^S \sum_{n_2=0}^S \alpha^{|n_1|+|n_2|} \|X - T_x^{n_1} T_y^{n_2} X\| \right] \quad (4)$$

式(4)可以通过最速下降法迭代求解,其中,正则化参数 λ ; 衰减系数 α ; BTV核支撑 S 。 λ 的选择需要在平滑噪声和保持图像细节之间作权衡,文献[3]通过多次实验确定出一组使重建结果达到最优的参数,这种额外的反复测试过程显然限制了算法速度,本文参照文献[6]中的自适应正则参数估计方法,构造第 n 次迭代时的 λ_n , 其中 $0 < u < 1$, 经验值为 0.25, v 保证分母不为 0。

$$\lambda_n = \ln \left[u \sum_{k=1}^L \|D_k B_k F_k \hat{X}_n - Y_k\| / (Y_{BTV}(\hat{X}_n) + v) + 1 \right] \quad (5)$$

由于 L1 范数下的代价函数不具有二次型形式,图像数据的复杂性,使得采取一维搜索方法确定迭代步长极其困难,文献[3]采用的固定步长方法在一定程度上限制了算法的寻优速度,本文借助分段函数,在迭代初期以较大的步长尽快接近最优值邻近范围,并随着迭代的进行逐步减小步长。

3 实验结果与分析

以Cameraman和Lena灰度图像(256×256)为测试图像,对比Robust^[2], L1+BTv^[3], Zomet^[4], L1+ABTV(引入自适应正则参数及变化步长后的算法)4种重建方法。

实验假定:帧间仅有平移运动;点扩展函数是平移不变的; $\forall k, B_k = B, D_k = D, 1 \leq k \leq L$ 。LR图像的生成:将原始图像以亚像素精度沿20个不同的方向做平移变换,施加高斯模糊(5×5,方差为1.0),降采样(采样因子为4),最后加入高斯白噪声(信噪比SNR为10和16两种),将得到的20幅LR图像(64×64)中前16幅作为输入数据。为模拟运动估计误差的存在,对第14帧~第16帧分别引入人为偏移(误差±1)。重建目标为分辨率提高4倍,以单帧图像双线性插值结果作为迭代初始值,图像质量可由主观视觉效果、峰值信噪比(PSNR)和归一均方误差(NMSE)进行评价。

各种算法的重建结果和迭代-误差收敛曲线见图1、图2。

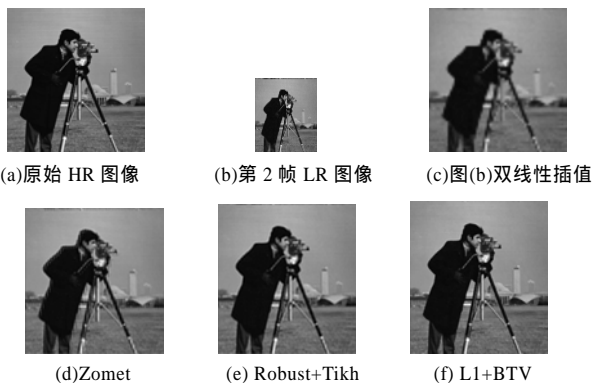


图1 各种算法的重建结果(SNR=16)

实验结果表明,图1(c)质量最差,说明SRR方法利用多幅图像间的补充信息能够获得比单帧插值重建图像更高的分辨率;方法2是L2范数保真与Tikhonov正则化的结合,结果图1(d)锯齿严重,说明它对实验中引入的运动估计误差极其敏感,虽然增大正则参数在一定程度上可以改善锯齿现象,但却会造成图像的模糊。模型准确与否极大地影响非鲁棒的

L2范数最小平方估计框架下的图像重建质量。文献[2]利用中值估计的稳健特性重建图像,本文引入Tikhonov正则约束形成方法3,图1(e)中锯齿得到去除,显示了该鲁棒算法的优势,但边缘区域仍有振铃存在。与前3种方法相比,L1+BTv在不同级别信噪比的情况下均取得最大的PSNR值,重建结果图1(f)中不再有锯齿和振铃,噪声得到较好的滤除,同时又保持了清晰的边缘信息,说明该算法具有良好的模型误差适应性,这正是L1范数估计的鲁棒性和BTV正则化的保持边缘能力共同作用的结果。如图2所示,引入参数自适应变化后,重建结果与L1+BTv算法的重建结果接近,但是在迭代收敛速度方面L1+ABTV具有明显的优势。不同信噪比的重建结果PSNR统计见表1。

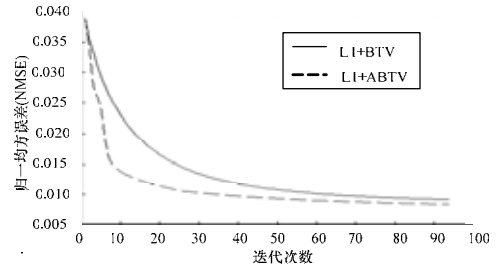


图2 迭代-误差收敛曲线(SNR=16)

表1 不同信噪比的重建结果PSNR统计

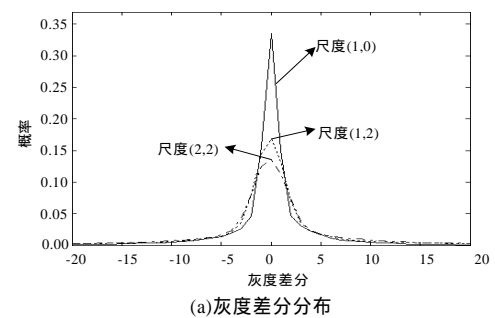
编号	方法	Cameraman		Lena	
		SNR=16	SNR=10	SNR=16	SNR=10
1	双线性插值	20.87	19.89	20.40	19.56
2	Zomet	23.94	22.21	24.50	22.78
3	Robust+Tikh	24.88	22.64	26.75	23.93
4	L1+BTv	27.16	23.40	29.40	24.40
5	L1+ABTV	27.61	23.31	29.58	24.46

4 BTV正则项的差分统计模型

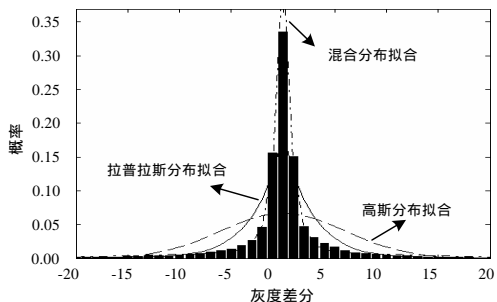
文献[3]是从双边滤波器的构造出发,以正则项的鲁棒特性为目的导出BTV正则函数具有L1范数形式的,这种形式恰恰可以与保真估计的L1范数形式相统一,使得最优化求解变得简单一致,利于算法实现。以第3节实验为基础,以下从差分统计角度着重分析该BTV正则项。

4.1 差分统计特性与Kullback-Leibler距离

图灰度差分布与先验分布拟合见图3。



(a)灰度差分布



(b)(1,0)尺度下3种先验分布对灰度差分布的拟合

图3 灰度差分布与先验分布拟合

式(3)中的 $\underline{x} - T_x^n T_y^n \underline{x}$ 实际为图像 X 在尺度 (n_1, n_2) 下的差分图像, 对于大量自然图像而言, 其灰度差分分布是具有一定统计特性的^[6], 图 3(a)说明在 3 种不同的尺度下, 图 1(c)的灰度差分分布虽然不同, 但都遵从这样的规律: 基本上在 0 附近呈对称分布; 在 0 点处形成一个尖峰; 两边有很长的拖尾。这种分布特性明显不同于高斯分布, 却与拉普拉斯分布非常接近, 针对图 1(c)在尺度(1,0)下的差分分布, 分别用以上两种分布函数进行拟合, 结果见图 3(b), 与高斯分布相比, 拉普拉斯分布更准确的描述了差分图像的平滑区域, 另外, 二者具有截然不同的拖尾, 高斯分布的拖尾非常短, 拉普拉斯分布则相反, 因此, 拉普拉斯分布可以更好地拟合差分图像中的细节成分。由此可以认为, 用拉普拉斯分布描述差分图像较之高斯分布更为准确。

用 Kullback-Leibler(KL)距离比较像素的观测频数与假定模型的理论频数来定量分析两种分布在拟合灰度差分方面的性能, KL 距离是以相对熵的形式度量真实概率分布 $p = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 与假定概率分布 $q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ 之间的距离, 即

$$KL(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i \times \ln(p_i / q_i) \quad (6)$$

其中, $i=1, 2, \dots, n$, KL 值越小, 假定概率分布与真实概率分布就越相似。在 3 个差分尺度下, 分别求取高斯分布和拉普拉斯分布相对于图 1(c)灰度差分分布的 KL 距离, 统计其平均值分别为 0.719 9 和 0.268 1, 可见拉普拉斯分布在拟合灰度差分分布方面确实优于高斯分布。

4.2 BTV 正则项的差分统计解释

正则项为图像估计过程附加了先验知识约束, 对差分图像作不同的统计模型假定, 可以推导出不同的正则函数。对于 Tikhonov 正则函数为 $r_T(\underline{x}) = \|\underline{L}\underline{x}\|_2^2$ 。

当 L 为梯度算子时, 假定差分图像符合高斯分布, 可以导出式中 L2 范数正则项。对于全变差正则函数, 即 $r_{TV}(\underline{x}) = \|\nabla \underline{x}\|_1$ 。

当梯度算子 ∇ 表示像素差分, 由拉普拉斯分布先验假定可以得到 BTV 正则项中的 $\|\underline{x} - T_x^n T_y^n \underline{x}\|_1$ 。另外, 由于不同差分尺度下的灰度差分分布略有不同, 因此拉普拉斯模型参数需要进行相应的改变, 这种模型参数随差分尺度而变化的特性由衰减项 $\alpha^{|n_1|+|n_2|}$ 体现。

用拉普拉斯分布作为差分图像分布的先验模型所得到的 L1 范数正则项比由高斯分布先验模型得到的 L2 范数正则项更易于重建出平滑且保有图像边缘信息的高分辨率图像。本结论从差分统计的角度给出了 BTV 正则函数的统计含义, 与文献[3]中的鲁棒性含义相结合, 共同证明了 L1 范数形式 BTV 正则函数在 SRR 问题中的降噪、保持边缘细节信息以及不敏感于模型误差的特点。

4.3 混合分布先验模型

根据图 3(b), 拉普拉斯分布在差分图像边缘区域确实达到很好的拟合度, 但在图像平滑区域两者仍然存在较大的误

差, 这种误差导致基于 BTV 的 SRR 方法在重建图像较平滑区域时产生分块平滑的卡通效果。可以考虑以某种混合模型代替单一模型, 文献[7]提出了拉普拉斯高斯混合模型, 在此可以用拉普拉斯分布描述灰度差分图像的边缘信息, 而用混合模型描述图像的平滑区域, 其中, 混合模型参数由 EM 算法迭代求得。针对图 1(c), 在(1,0)尺度下, 用该混合模型拟合其灰度差分分布的结果见图 3(b), 混合模型同时准确地描述了图像平滑区域和边缘区域, 统计混合模型在 3 个差分尺度下对于灰度差分分布的 KL 距离的平均值为 0.031 1, 根据 KL 距离的定义得出本理论估计精度较高, 因此, 可以预料基于这种混合模型的 SRR 算法应该可以重建出质量更高的图像, 但是另一方面, 混合模型必然使得数学公式的推导变得困难, 而且在每一个差分尺度下, 需要估计模型参数, 会导致最优化迭代过程复杂性的增加。

5 结束语

本文在 L1 范数超分辨率重建方法基础上, 通过引入自适应的正则参数和变化的迭代步长提高了算法收敛速度, 并从差分图像分布的统计模型出发, 利用 KL 距离证明了 L1 范数 BTV 正则项可以准确地拟合差分图像分布, 从而可以重建出质量更好的高分辨率图像, 由此得到了 BTV 正则项一个新的差分统计解释, 并进一步对拉普拉斯高斯混合先验模型在 SRR 中的可行性和存在的问题做出了理论分析。这种验证方法有助于理解 BTV 正则项的构成, 并为该类重建算法的评估和设计提供了重要的依据。

参考文献

- [1] Elad M, Feuer A. Restoration of Single Super-resolution Image from Several Blurred, Noisy and Downsampled Measured Images[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(12): 1646-1658.
- [2] Zomet A. Robust Super Resolution[C]//Proc. of Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2001: 645-650.
- [3] Farsiu S D, Robinson M. Fast and Robust Multiframe Super-resolution[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(10): 1327-1344.
- [4] Zomet A, Peleg S. Efficient Super-resolution and Applications to Mosaics[C]//Proc. of Int'l Conf. on Pattern Recognition. Wisconsin, USA: [s. n.], 2001: 579-583.
- [5] Tomasi C, Manduchi R. Bilateral Filtering for Gray and Color Images[C]//Proc. of IEEE Int'l Conf. on Computer Vision. Bombay, India: [s. n.], 1998: 836-846.
- [6] Lee E S, Kang M G. Regularized Adaptive High-resolution Image Reconstruction Considering Inaccurate Subpixel Registration[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(7): 826-837.
- [7] Milanfar P. Modeling Multiscale Differential Pixel Statistics[OL]. (2006-06-02). <http://www.cse.ucsc.edu/~milanfar/OdomEI06.pdf>.