

# 岩层移动复合层板模型的系统方法解析

赵晓东 宋振骥  
(山东科技大学 泰安 271019)

**摘要** 从弹性力学基本方程出发,未加任何有关位移和应力模式的附加假设,利用系统方法,引入状态空间,推导出状态方程,建立了岩层移动的复合层板模型。并以位移为基本未知量,在横观各向同性和层间滑动接角状态下,解出开挖水平煤层引起的岩层移动问题的精确级数解,为解决复杂的开采沉陷系统提供了新的途径。

**关键词** 岩层移动,复合层板,状态空间,状态方程

**分类号** TD325 **文献标识码** A **文章编号** 1000-6915(2001)02-0197-05

## 1 引言

文[1]将上覆岩体看成是横观各向同性的多层层关弹性的接触问题,并用富氏积分变换进行了求解,使岩层移动理论研究有了重要突破。从文[1]的推导可以看出,如果将岩体看成正交各向异性体,而非横观各向同性体,则文[1]的推导和计算将会更为繁琐,使问题变得复杂化,其最后得出的微分方程也将更为难解。本文得用文[2]的结果,对文[1]提出的问题,同样只通过弹性力学的基本方程,引入系统状态空间,建立状态方程,利用系统的方法对岩层移动复合层板模型作了解析,得出在系统方法下该问题的解析解。

## 2 系统状态空间的描述

### 2.1 系统的状态方程和输出方程

图1所示,系统的输入变量为  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , 系统的输出变量为  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , 系统内部状态变量为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 描述系统状态变量变化率的一阶微分方程组称为系统的状态方程,即

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (1)$$

式中:  $x$  为  $n \times 1$  状态矢量,  $A(t)$  为  $n \times n$  系统矩阵,  $B(t)$  为  $n \times r$  控制矩阵。

代数方程组

$$y = C(t)x + D(t)u \quad (2)$$

称为系统的输出方程,或观测方程。式中:  $y$  为  $m \times$

1 的输出矢量,  $C(t)$  为  $m \times n$  输出矩阵,  $D(t)$  为  $m \times r$  前馈矩阵。

由于系统状态变量的选取不是唯一的,因而描述系统行为的  $A, B, C$  和  $D$  4 个矩阵也随所选状态变量的不同而不同。

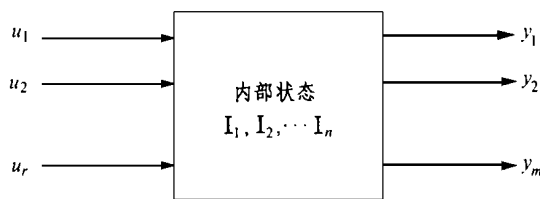


图1 多输入-输出系统

Fig. 1 Multiinput-output system

### 2.2 线性常系数齐次状态方程及其解

齐次状态方程是指输入为零的状态方程,即

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3)$$

其满足初始状态有

$$x(t)|_{t=0} = x(0) \quad (4)$$

初始状态  $x_i(0) = c_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的线性齐次状态方程(3)有且仅有唯一解,即

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad (5)$$

式中:  $e^{At}$  为矩阵的指数函数。

## 3 横观各向同性弹性层板的状态方程

为了保持符号的统一,高  $U, V, W$  分别是层

1999年10月16日收到初稿,1999年12月27日收到修改稿。

作者 赵晓东 简介:男,1969年生,博士,1991年毕业于山东矿业学院应用数学与软件工程系应用数学与软件专业,现任副教授,主要从事 GIS 及其在岩土工程应用方面的研究工作。

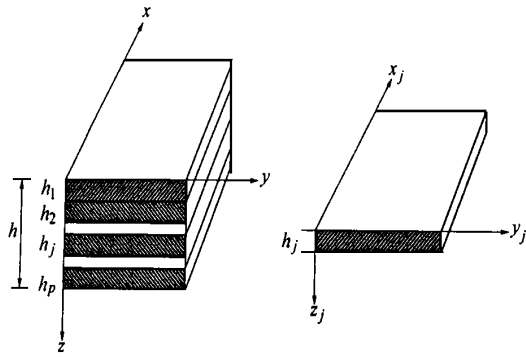


图 2 弹性复合层板

Fig. 2 Elastic complex laminated plate

板沿  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向的位移分量, 如图 2 所示。由于把开挖引起的附加应力作为外载考虑, 因而不计体积力, 故平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

几何方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\partial U}{\partial x}, & xy &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \\ y &= \frac{\partial V}{\partial y}, & yz &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \\ z &= \frac{\partial W}{\partial z}, & zx &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

横观各向同性体的物理方程为

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ yz \\ zx \\ xy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ yz \\ zx \\ xy \end{Bmatrix} \quad (8)$$

将式(7)代入式(8), 得

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ yz \\ zx \\ xy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

从式(6), (9) 中消去应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , 为此, 记

$$X = \tau_{xz}, \quad Y = \tau_{yz}, \quad Z = \sigma_z, \quad \sigma_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

并令

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{C_{13}}{C_{33}} & C_2 &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \\ C_3 &= C_{12} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} & C_4 &= \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \\ C_5 &= \frac{1}{C_{33}} & C_6 &= \frac{1}{C_{44}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由式(9)的第 3~5 行可分别求得

$$\frac{\partial W}{\partial z} = C_5 Z + C_1 U + C_1 V \quad (11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = C_6 Y - W \quad (12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = C_6 X - W \quad (13)$$

由式(6)的第 3 行可求出

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -X - Y \quad (14)$$

又由式(9)中的第 1, 2, 6 行可求出

$$x = C_{11} U + C_{12} V + C_{13} \frac{\partial W}{\partial z} \quad (15a)$$

$$y = C_{12} U + C_{11} V + C_{13} \frac{\partial W}{\partial z} \quad (15b)$$

$$xy = C_4 (U + V) \quad (15c)$$

将式(15a), (15b), (11)代入式(6)的第 1 行可求得

$$\frac{\partial X}{\partial z} = - (C_2^2 + C_4^2) U - (C_3 + C_4) V + C_1 Z \quad (16)$$

将式(15b), (15c), (11)代入式(6)的第 2 行可求得

$$\frac{\partial Y}{\partial z} =$$

$$- (C_3 + C_4) U - (C_4^2 + C_2^2) V + C_1 Z \quad (17)$$

联合式(11)~(17), 则有

$$\frac{\partial}{\partial z} [U \quad V \quad Z \quad X \quad Y \quad W]^T = \bar{D} (U \quad V \quad Z \quad X \quad Y \quad W)^T \quad (18)$$

式中:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_6 & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 & - \\ 0 & 0 & 0 & - & - & 0 \\ -(C_2^2 + C_4^2) & -(C_3 + C_4) & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -(C_3 + C_4) & -(C_4^2 + C_2^2) & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_1 & C_5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时, 应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  已被消去。当然, 还可由式(15a), (15b), (15c) 求出。将式(11)分别代入可求得

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ xy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & C_3 & -C_1 \\ C_3 & C_2 & -C_1 \\ C_4 & C_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ Z \end{Bmatrix} \quad (19)$$

上式表明, 一旦  $U, V, Z$  求出, 则可求出  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ 。

现取:

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_m \sum_n U_{mn}(z) \cos \frac{m-x}{a} \sin \frac{n-y}{b} \\ V &= \sum_m \sum_n V_{mn}(z) \sin \frac{m-x}{a} \cos \frac{n-y}{b} \\ Z &= \sum_m \sum_n Z_{mn}(z) \sin \frac{m-x}{a} \sin \frac{n-y}{b} \\ X &= \sum_m \sum_n X_{mn}(z) \cos \frac{m-x}{a} \sin \frac{n-y}{b} \\ Y &= \sum_m \sum_n Y_{mn}(z) \sin \frac{m-x}{a} \cos \frac{n-y}{b} \\ W &= \sum_m \sum_n W_{mn}(z) \sin \frac{m-x}{a} \sin \frac{n-y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$a, b$  为计算区域层板的长和宽。不难看出, 式(20)所表达的函数满足四边简支的边界条件(其他情况可通过附加应力进行处理)及平衡方程, 即

$$\left. \begin{aligned} x = W = V = 0 \quad x = 0, \quad a \text{ 处} \\ y = W = U = 0 \quad y = 0, \quad b \text{ 处} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

将式(20)代入式(18), 对每一对  $m, n$  有

$$\frac{d}{dz} [U_{mn}(z) \quad V_{mn}(z) \quad Z_{mn}(z) \quad X_{mn}(z) \quad Y_{mn}(z) \quad W_{mn}(z)]^T = D [U_{mn}(z) \quad V_{mn}(z) \quad Z_{mn}(z) \quad X_{mn}(z) \quad Y_{mn}(z) \quad W_{mn}(z)]^T \quad (22)$$

式中:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_6 & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 & - \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ -(C_2^2 + C_4^2) & (C_3 + C_4) & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -(C_3 + C_4) & -(C_4^2 + C_2^2) & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & -C_1 & C_5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\text{式中: } \lambda = \frac{m}{a}, \quad \mu = \frac{n}{b}.$$

式(22)是一个常系数齐次状态方程, 该方程组即为我们要求的横观各向同性层板的状态方程。

### 4 复合层板模型的计算

对每一层板选取一局部坐标, 坐标原点取在层板的上表面,  $z$  轴垂直板向下, 对任一层板  $j$  的坐标  $z_j$ , 有  $0 \leq z_j \leq h_j$  ( $h_j$  为层板厚度), 共有  $p$  层, 每层均为横观各向同性层板。

由式(5), 得状态方程(22)的解为

$$[U_{mn}(z) \quad V_{mn}(z) \quad Z_{mn}(z) \quad X_{mn}(z) \quad Y_{mn}(z) \quad W_{mn}(z)]^T = e^{Dz} [U_{mn}(0) \quad V_{mn}(0) \quad Z_{mn}(0) \quad X_{mn}(0) \quad Y_{mn}(0) \quad W_{mn}(0)]^T \quad (24)$$

若令

$$\left. \begin{aligned} R(z) &= [U_{mn}(z) \quad V_{mn}(z) \quad Z_{mn}(z) \quad X_{mn}(z) \quad Y_{mn}(z) \quad W_{mn}(z)]^T \\ R(0) &= [U_{mn}(0) \quad V_{mn}(0) \quad Z_{mn}(0) \quad X_{mn}(0) \quad Y_{mn}(0) \quad W_{mn}(0)]^T \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$D(z) = e^{Dz} \quad (26)$$

对任一层板  $j$  来说, 式(24)变成

$$R_j(z) = D_j(z) R_j(0) \quad z \in [0, h_j] \quad (27)$$

下标  $j$  表示对第  $j$  层而言。

在式(27)中令  $z = h_j$ , 得

$$R_j(h_j) = D_j(h_j) R_j(0) \quad (28)$$

由于采用了局部坐标, 式(28)对所有层板均成立。根据文[1]层间的应力和位移连续条件(滑动接触条件), 对相邻两层上下表面有

$$R_{j+1}(0) = R_j(h_j)$$

逐层类推, 得

$$R_p(h_p) = D_p(h_p) D_{p-1}(h_{p-1}) \dots D_2(h_2) D_1(h_1) R_1(0) = \prod_{j=p}^1 D_j(h_j) R_j(0) \quad (29)$$

$$\text{令 } D_j(h_j) = \frac{1}{j^p}$$

则式(29)变为

$$R_p(h_p) = R_1(0) \quad (30)$$

将式(30)写成显示, 则有

$$\begin{bmatrix} U_{mn}(h_p) \\ V_{mn}(h_p) \\ Z_{mn}(h_p) \\ X_{mn}(h_p) \\ Y_{mn}(h_p) \\ W_{mn}(h_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn}(0) \\ V_{mn}(0) \\ Z_{mn}(0) \\ X_{mn}(0) \\ Y_{mn}(0) \\ W_{mn}(0) \end{bmatrix} \quad (31)$$

由文[1]给定的边界条件如下:

$$X(0) = Y(0) = Z(0) = X(h_p) = Y(h_p) = 0$$

采空区位移按如下级数展开:

$$W(x, y) = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin \frac{m x}{a} \sin \frac{n y}{b}$$

$$W_{mn} = \frac{4H}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m x}{a} \sin \frac{n y}{b} = \frac{16H}{mn^2}$$

式中:  $H$  为采高。

取式(31)的第 4, 5, 6 三行组成新的方程组, 则有

$$\begin{bmatrix} 41 & 42 & 46 \\ 51 & 52 & 56 \\ 61 & 62 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn}(0) \\ V_{mn}(0) \\ W_{mn}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{mn}(h_p) \\ Y_{mn}(h_p) \\ W_{mn}(h_p) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 43 & 44 & 45 \\ 53 & 54 & 55 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{mn}(h_p) \\ Y_{mn}(h_p) \\ W_{mn}(h_p) \end{bmatrix} = \frac{16H}{mn^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

通过式(32)可求出  $U_{mn}(0)$ ,  $V_{mn}(0)$ ,  $W_{mn}(0)$ 。此时, 初始值  $R_1(0)$  为已知。将求出的初始值回代到式(27)并令  $j = 1$ , 便可求出第一层的各力学分量。其它层内的各力学分量可类推求出, 则整个复合层板的位移和应力处处可求。

### 5 实例研究

根据本文的层板理论, 这里给出了文[3]中一个计算任意位移的实例。该例的地质结构比较简单, 煤层倾角近乎水平, 煤层采厚为 5.2 m, 上覆岩层平均厚度为 98.5 m, 大部分为粉砂岩, 属软岩。长壁

工作面开采尺寸分别为 200 m 和 300 m, 上覆岩层分为 10 个分层, 各层计算参数如表 1 所示。

表 1 层板理论预测开采沉陷的力学参数

Table 1 The mechanical parameters used for the subsidence prediction with laminated plate theory

层号	层厚/m	弹性系数/ $10^4$ MPa	泊松比
1	9.85	1.00	0.13
2	9.85	1.34	0.17
3	9.85	1.49	0.20
4	9.85	1.36	0.20
5	9.85	1.49	0.21
6	9.85	1.52	0.21
7	9.85	1.34	0.20
8	9.85	1.49	0.20
9	9.85	2.35	0.22
10	9.85	1.77	0.20

图 3 为开采后的复合层板及其相应  $z$  方向的位移。图 4 为开采后的  $x$  和  $y$  方向的水平位移。正如所料, 最大垂直方向位移在开采区的中心部位。模型计算最大值为 4.72 m, 实测值为 4.95 m, 误差为 5%。

### 6 结 语

本文的模型基于弹性理论, 未加任何有关位移和应力模式的附加假设, 利用系统方法, 在位移边界条件下推导出每一层板的状态空间和状态方程。所有推导基于矩阵方法, 计算机容易实现。利用复合层板模型, 提供了实例研究, 并与实测值作了比较,

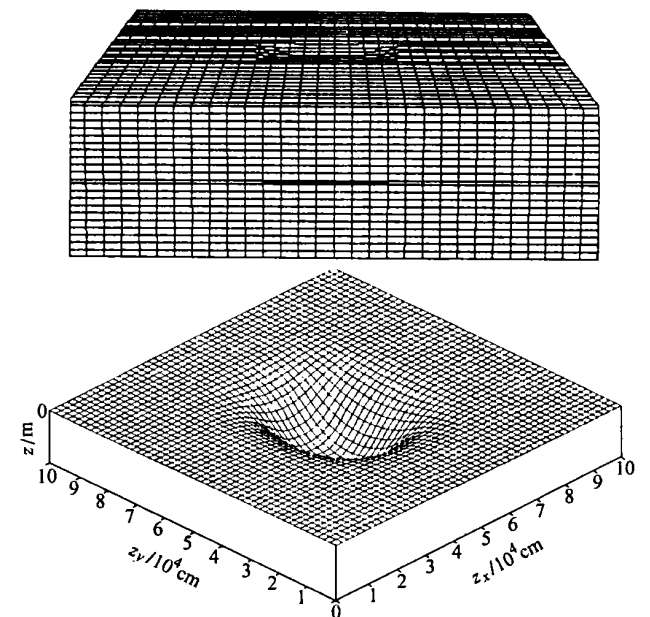
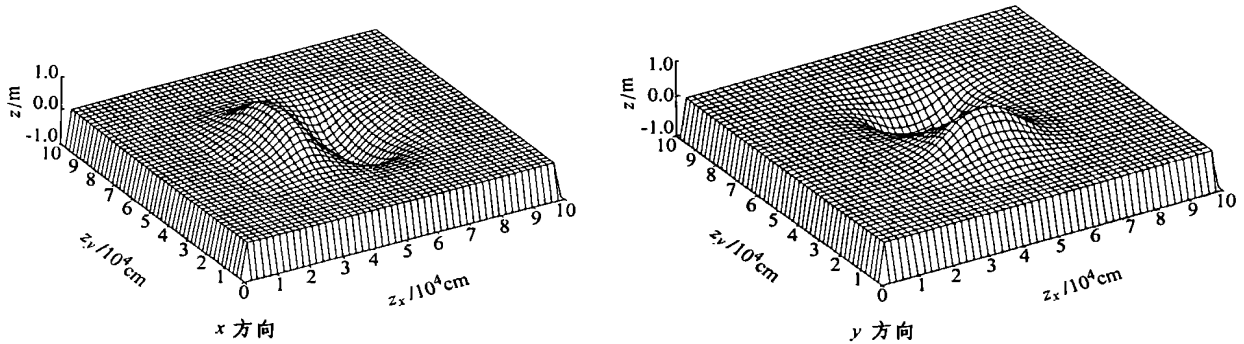


图 3 开采后的复合层板及其相应  $z$  方向的位移  
Fig. 3 Complex laminated plate model after excavation and corresponding  $z$ -displacement

图 4  $x$  和  $y$  方向的水平位移Fig. 4 Horizontal displacements in  $x$  and  $y$  directions

收到了满意的应用效果。

### 参 考 文 献

1 赵晓东. 开采沉陷预测研究及其 GIS 面元栅格数字化方法[博士

学位论文][D]. 泰安: 山东科技大学, 1999

2 李增琪. 使用富氏积分变换计算开挖引起的地表移动[J]. 煤炭学报, 1983, (2): 18~28

3 麻凤海, 刘 琪, 王泳嘉. 巨系统复合介质岩层移动模型及工程应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(6): 536~543

## ANALYTICAL SOLUTION OF SYSTEM METHOD ON THE MODEL OF COMPLEX LAMINATED PLATES FOR ROCK STRATA MOVEMENT

Zhao Xiaodong, Song Zhenqi

(Shandong University of Science & Technology, Tai an 271019 China)

**Abstract** Starting from the basic equation of elastic mechanics, without any additional hypotheses of displacement or stress model, just introducing state space and state equation, the model of Complex Laminated Plates for Rock Strata Movement is made. In addition, using displacement as a basic unknown variable, the accurate analytical series solution for the problem of strata movement caused by extraction of horizontal seam is obtained when transversely isotropic elastic layers are in sliding contact state. A new approach is put forward to solve the complicated system of mining subsidence.

**Key words** strata movement, complex laminated plate, state space, state equation

### 新书简介

《岩体地应力与工程建设》一书由刘允芳、罗超文、龚壁新、刘元坤、盛 谦、刘 鸣合著, 湖北科学技术出版社 2000 年 9 月出版, 32 开本, 296 页, 25 万字, 定价 36 元。

该书系统地论述了当前国外通用的各种地应力测量方法的理论、测量原理、测量元件和测量仪器以及实测数据处理技术。并论述了根据地应力实测资料和地质条件确定大范围工程区的地应力场的分析方法, 特别是讨论了我国岩石工程在地应力测量和研究方面的主要成就。全书共分 7 章: 1. 地应力及其测量, 2. 岩体表面应力测量技术, 3. 套钻孔应力解除法地应力测量技术, 4. 水压致裂法地应力测量技术, 5. 其他地应力测量方法的测量技术, 6. 地应力场分析, 7. 地应力测量与研究在水工地下工程中的应用。

该书理论扎实, 观点新颖, 视野开阔, 实例丰富, 可供地质、水工、矿山、隧道、军工、地震以及地面、地下、边坡岩石工程的科研、设计等工程技术人员和大专院校师生、研究生参考。欲购该书者请与该书作者联系。联系地址: 汉口赵家条九万方长江科学院岩基所, 邮编: 430010。