

## 全极化散射中心提取与参数估计: P-ESPRIT 方法

代大海 王雪松 邢世其 肖顺平  
(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

**摘要:** 该文提出了一种新的全极化散射中心提取与参数估计方法: P-ESPRIT 方法。该方法是一种极化和超分辨联合处理方法, 不仅实现了对各极化通道散射中心的数目、位置、强度以及归一化极化散射矩阵等参量的同时估计, 而且充分利用了目标全极化信息, 提高了散射中心提取与参数估计的精度。与 MUSIC, ML 等超分辨方法相比, P-ESPRIT 不需要进行搜索, 因此它还具有实时性高的优点。基于仿真和实测数据的实验结果证实了该方法的有效性。

**关键词:** 雷达目标识别; 全极化; 散射中心; P-ESPRIT 算法

中图分类号: TN957.51

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)08-1963-05

## Full-Polarization Scattering Center Extraction and Parameter Estimation: P-ESPRIT Algorithm

Dai Da-hai Wang Xue-song Xing Shi-qi Xiao Shun-ping  
(School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology,  
Changsha 410073, China)

**Abstract:** A novel method which is called polarimetric-ESPRIT (P-ESPRIT) algorithm is presented for full-polarization scattering center extraction and parameter estimation. The P-ESPRIT algorithm is a joint processing of polarization and super-resolution. It is able to estimate the number, positions, intensities and normalized scattering matrices of scattering centers instantaneously rather than the one which extracts parameters from each channel separately, and its performance is better than the latter because the fully-polarized information is used. It has computational advantage over other methods like MUSIC and ML because it needn't search. The validity is proved by the experimental results based on simulated and real data.

**Key words:** Radar target recognition; Full-polarization; Scattering center; P-ESPRIT algorithm

### 1 引言

雷达目标识别本质上是一个电磁逆散射问题, 而电磁逆散射问题又可近似为目标散射中心提取问题<sup>[1]</sup>。与二维成像雷达(SAR, ISAR 等)相比, 一维成像雷达不需要长时间积累、更容易实现, 因此基于一维散射中心提取的目标识别成为雷达目标识别领域的研究热点<sup>[2-4]</sup>。

近年来, 随着雷达极化理论研究的逐步深入和器件水平的大幅度提高, 目标极化信息的开发和利用受到了国内外学者的广泛关注, 极化与高分辨结合成为雷达目标识别最具应用前景的研究方向<sup>[5]</sup>。针对双通道正交极化同时接收雷达体制, 文献[6]提出了瞬态极化响应(TPR)的概念, 通过拟合得出极化椭圆描述子特征集用于雷达目标识别, 文献[7,8]进一步将 Prony 方法用于极化散射中心提取。这实际上是一种接收全极化, 本文所说的全极化是指不仅需要正交极化接收, 还需要正交极化发射, 比上述接收全极化的概念更为广泛。

在此前提下, 本文将研究提取散射中心的极化散射矩阵信息, 比上述极化椭圆描述子在信息量上更为完整。虽然极化域不像其它域(如空域、时域、频域等)那样可以单独提供分辨力, 但是当极化信息和其它信息联合处理时则变得特别有用<sup>[9]</sup>。全极化散射中心提取的本质应该是立足于极化和超分辨的联合处理, 而不仅仅是二者简单的串联。相较于单极化通道分别处理情形, 这种联合处理不仅使处理变得方便, 而且还将改善参数估计的性能。

本文首先将建立基于正交极化发射和接收的全极化信号模型, 进而提出并推导一种基于 ESPRIT 方法的全极化散射中心提取与参数估计方法(以下简称 P-ESPRIT 方法), 实现对各极化通道散射中心的数目、位置、强度以及归一化极化散射矩阵的同时估计, 最后, 结合仿真和实测数据实验来分析 P-ESPRIT 方法的性能。

### 2 全极化信号模型

全极化步进频测量雷达可以获得目标的宽带全极化散射矩阵序列, 根据点散射模型, 目标信号的回波形式可表示为

2006-12-30 收到, 2007-07-09 改回  
全国优秀博士论文专项资助(08100101), 新世纪优秀人才计划项目(NCET-04-0997)和国家自然科学基金(60672033)资助课题

$$x_l(n) = \sum_{m=1}^M s_{m,l} e^{-j\frac{4\pi r_m}{c} f_n} + u_l(n) \quad (1)$$

其中  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $N$  为发射频点总数;  $l = 1, 2, \dots, L$  对应不同的极化通道(若无特殊说明, 下文中均假设  $L = 4$ , 即全极化情形);  $c$  为光速,  $f_n = f_0 + n\Delta f$ ,  $f_0$  为起始频率,  $\Delta f$  为频率步进;  $M$  为散射中心数目;  $s_{m,l}$  表示第  $m$  个散射中心在第  $l$  种极化测量条件下的复散射系数, 对应着散射矩阵的一个元素;  $r_m$  表示第  $m$  个散射中心的位置;  $u_l(n)$  表示在第  $l$  种极化测量条件下的第  $n$  个频点测量时的测量噪声(值得指出的是, 这里仅分析全极化步进频信号情形, 实际上线性调频信号测量雷达经过匹配滤波或 STRECH 处理后也可得到类似结果, 参见文献[10])。

将式(1)写成矩阵的形式, 即

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{u} \quad (2)$$

其中  $\mathbf{z}$  为  $N \times L$  维矩阵, 对应全极化测量信息;  $\mathbf{s}$  为  $M \times L$  维矩阵, 对应目标散射中心的极化散射矩阵信息;  $\mathbf{A}$  为  $N \times M$  维导向矢量矩阵, 对应目标散射中心的位置信息;  $\mathbf{u}$  为  $N \times L$  维测量噪声矩阵。它们具体表示形式如下:

$$\mathbf{z} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_L] \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(r_1) \quad \mathbf{a}(r_2) \quad \dots \quad \mathbf{a}(r_M)] \quad (4)$$

$$\mathbf{s} = [s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_L] \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_L] \quad (6)$$

其中  $\mathbf{x}_l = [x_l(1) \quad x_l(2) \quad \dots \quad x_l(N)]^T$  对应单极化测量信息;

$\mathbf{a}(r_m) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\frac{4\pi r_m \Delta f}{c}} & \dots & e^{-j\frac{4\pi r_m (N-1)\Delta f}{c}} \end{bmatrix}^T$  为第  $m$  个散射中心对应的导向矢量;

$\mathbf{s}_l = [s_{1,l} \quad s_{2,l} \quad \dots \quad s_{M,l}]^T$ ,

$\mathbf{u}_l = [u_{1,l} \quad u_{2,l} \quad \dots \quad u_{M,l}]^T$  分别为单极化目标散射信息矢量和测量噪声矢量。

### 3 全极化散射中心提取: P-ESPRIT 方法

ESPRIT 算法最初主要用于阵列信号处理中的信号到达角(DOA)估计, 其基本思想是利用信号子空间的旋转不变特性, 通过构造两个完全相同的信号子阵模型, 通过特征分解、最小二乘等方法, 估计出两子阵之间的旋转算符, 进而得到对信号方向的直接估计, 它具有很高的分辨率、估计精度, 并且有很好的稳定性, 并且具有不需要知道阵列流型、不必进行谱峰搜索等优点<sup>[11,12]</sup>。

本文将阵列信号处理中常用的 ESPRIT 空间谱估计的思想拓广用于全极化一维散射中心特征提取, 在建立了上述全极化信号模型之后, 将解决多个极化通道的散射中心数目、位置、强度(本文里“强度”概念是指极化散射矩阵各元素的平方和, 表征了散射中心的全极化散射强弱)以及归一化极化散射矩阵(强度归一化的极化散射矩阵)的同时估计问题。下面给出具体的算法。

令

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \text{last row} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{first row} \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

相应地,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \text{last row} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{first row} \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

从而构造出两个具有相同结构的全极化信号子阵模型

$$z_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{s} + \mathbf{u}_1 \quad (9)$$

$$z_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{s} + \mathbf{u}_2 = \mathbf{A}_2 \Phi \mathbf{s} + \mathbf{u}_2 \quad (10)$$

其中 first row 和 last row 分别代表相应矩阵的第一行和最后一行,  $\Phi = \text{diag} \left\{ e^{-j\frac{4\pi r_1 \Delta f}{c}}, e^{-j\frac{4\pi r_2 \Delta f}{c}}, \dots, e^{-j\frac{4\pi r_M \Delta f}{c}} \right\}$  称为旋转算符矩阵。

设全极化测量信号的协方差矩阵  $\mathbf{R}_{zz} = E(\mathbf{z}\mathbf{z}^H)$  和散射中心数目  $M$  均已知, 则对  $\mathbf{R}_{zz}$  进行特征分解, 分别得到信号子空间和噪声子空间,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{zz} &= \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_s & \mathbf{E}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_s^H \\ \mathbf{E}_n^H \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{E}_s \Sigma_s \mathbf{E}_s^H + \sigma^2 \mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^H \end{aligned} \quad (11)$$

由于  $\mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^H + \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^H = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{E}_s^H \mathbf{E}_s = \mathbf{I}$ , 代入式(11)可得

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{A}\mathbf{T} \quad (12)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{A}^H \mathbf{E}_s (\Sigma_s - \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \quad (13)$$

虽然  $\mathbf{T}$  是一个未知的矩阵, 但它具有非奇异性, 下面分析只用到它的非奇异性。用  $\mathbf{T}$  右乘式(8), 则有

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{T} \\ \text{last row} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{first row} \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (14)$$

由于  $\mathbf{E}_s$  张成的信号子空间与导向矢量张成的子空间相同, 即  $\text{span}\{\mathbf{A}\} = \text{span}\{\mathbf{E}_s\}$ , 故可对  $\mathbf{E}_s$  采取同样的分块, 即

$$\mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \text{last row} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{first row} \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

由式(12), 式(14), 式(15)可知

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{T}^{-1} \Phi \mathbf{T} = \mathbf{E}_2 \quad (16)$$

定义  $\psi = \mathbf{T}^{-1} \Phi \mathbf{T}$ , 它是显然是  $\Phi$  的相似变换, 因此具有相同的特征值。那么估计出  $\psi$  后, 进行特征分解, 其所有特征值组成的对角矩阵, 即为所求得旋转算符矩阵  $\Phi$ 。

前已通过式(11)得到信号子空间  $\hat{\mathbf{E}}_s$ , 那么根据式(15)抽取  $\hat{\mathbf{E}}_s$  的前  $N-1$  行组成矩阵  $\hat{\mathbf{E}}_1$ , 后  $N-1$  行组成矩阵  $\hat{\mathbf{E}}_2$ , 由式(16)可得

$$\hat{\psi} = \left( \hat{\mathbf{E}}_1^H \hat{\mathbf{E}}_1 \right)^{-1} \hat{\mathbf{E}}_1^H \hat{\mathbf{E}}_2 \quad (17)$$

对  $\hat{\psi}$  值进行特征分解, 即可求得各极化通道散射中心的位置的共同估计

$$\hat{r}_m = \frac{-\arg[\lambda_m(\hat{\psi})] \times c}{4\pi\Delta f} \quad (18)$$

其中  $\lambda_m(\bullet)$  表示第  $m$  个特征值， $\arg(\bullet)$  为取复数相位。

对于全极化散射中心提取而言，不仅要估计出每个散射中心的位置，还应估计出该散射中心的极化散射矩阵。在可得到散射中心位置估计之后，就可以根据式(4)构造出导向矢量矩阵的估计  $\hat{\mathbf{A}}$ ，进而由式(2)得到各散射中心的极化散射矩阵的最小二乘解为

$$\hat{\mathbf{s}} = \left(\hat{\mathbf{A}}^H \hat{\mathbf{A}}\right)^{-1} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{z} \quad (19)$$

将  $\hat{\mathbf{s}}$  的每一行重排，得到每一个散射中心的极化散射矩阵  $\hat{\mathbf{S}}_m = \begin{bmatrix} \hat{s}_{m,HH} & \hat{s}_{m,HV} \\ \hat{s}_{m,VH} & \hat{s}_{m,VV} \end{bmatrix}$ ，再通过简单的计算即可得到各散射中心的全极化散射强度  $\hat{I}_m$  以及归一化极化散射矩阵的估计  $\hat{\mathbf{S}}_m$ ，即

$$\hat{I}_m = |\hat{s}_{m,HH}|^2 + |\hat{s}_{m,HV}|^2 + |\hat{s}_{m,VH}|^2 + |\hat{s}_{m,VV}|^2 \quad (20)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_m = \left[ \hat{\mathbf{S}}_m \exp(-j \arg(\hat{s}_{m,HH})) \right] / \sqrt{\hat{I}_m} \quad (21)$$

得到极化散射矩阵的估计之后即可对各散射中心的属性进行判断<sup>[13,14]</sup>，并应用于目标识别。

以上分析中假设散射中心数目  $M$  和  $\mathbf{R}_{zz}$  是已知的，实际上二者都是需要估计的。本文采用空间谱估计中常用的盖氏圆法<sup>[12]</sup>，因为该方法具有对信噪比不太敏感等特点。另外，为最大限度利用观测数据，本文采用双向平滑估计方法<sup>[12]</sup>估计  $\mathbf{R}_{zz}$ ，具体实现即

$$\hat{\mathbf{R}}_{zz} = \frac{1}{2N_{BP}} \sum_{k=1}^{N_{BP}} \left( \hat{\mathbf{R}}_k + \mathbf{J} \hat{\mathbf{R}}_k^* \mathbf{J} \right) \quad (22)$$

其中  $N_{BP} = N - p + 1$ ， $\hat{\mathbf{R}}_k = \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H$ ， $\mathbf{z}_k$  是第  $k$  个  $p \times L$  维的测量数据矩阵， $\mathbf{J}$  是一个  $p \times p$  维的交换矩阵。

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & \cdots & x_L(k) \\ x_1(k+1) & x_2(k+1) & \cdots & x_L(k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(k+p-1) & x_2(k+p-1) & \cdots & x_L(k+p-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

值得指出的是，为了使式(19)中  $\hat{\mathbf{s}}$  的最小二乘解唯一，要求  $\hat{\mathbf{A}}^H \hat{\mathbf{A}}$  非奇异，即要求  $p > M$ 。

#### 4 性能分析与实验验证

由上节可知，全极化散射中心提取的精度取决于对散射中心位置估计的精确程度。有关ESPRIT超分辨算法的估计性能已有很多文献进行过较为详细地分析<sup>[12,15]</sup>，由于分析过程复杂，这里仅给出仿真分析。为评价本文方法的性能，选取各个极化通道分别处理的常规方法作为对照。

设定如下一个具有两个散射中心的目标，各散射中心参数见表1(目标满足互易性，即  $\mathbf{s}_{HV} = \mathbf{s}_{VH}$ )。仿真起始频率为 8.75GHz，频率步进为 5MHz，频点数为 100， $p = 10$ ，仿真次数为 100，信噪比为 20dB，其中信噪比定义为目标强度与噪声强度之比，即  $\text{SNR} = 10 \lg(I/(4\sigma^2))$ 。

表 1 给出了各散射中心参数估计的详细结果，其中估计误差方差定义为  $\text{var}(\hat{r}_m) = E[(r_m - \hat{r}_m)^2]$ ，其余参量的估计误差方差定义是类似的，不再赘述。可以看出，常规方法的不便之处在于，各通道散射中心位置估计是不重合的，这样即使各通道都能够正确估计散射中心数目，还必须再对进行对各通道的散射中心的作关联和配对处理。此外，在参数估计精度方面，P-ESPRIT 方法也要比分通道单独处理的常规方法要准确得多。这是因为 P-ESPRIT 方法在估计协方差矩阵时，同时用到了所有通道的信息，提高了信噪比(参见图 1 给出的 P-ESPRIT 方法和各单极化方法的协方差矩阵的特征值分布图)，这对于准确估计散射点数目是有益的；其次，全极化信息的利用也提高了对散射中心位置估计的精确程度，进而提高了散射矩阵各元素的估计精度；另外，只涉及估计一个全极化的协方差矩阵，只作一次矩阵分解，因此其特征提取的速度较常规方法要快，效率更高。

表 1 散射中心设置与估计结果

		$r_m$	$I_m$	$\mathbf{s}_{HH}$	$\mathbf{s}_{HV}$	$\mathbf{s}_{VV}$
设定真值		-1.5	1	3/4	0.433	1/4
		0.5	1	1/2	1/2i	-1/2i
各通道	估计均值	—	—	0.7496-0.0016i	0.4303-0.0029i	0.2513-0.0031i
	单独估计	—	—	0.5010-0.0023i	0.0019+0.4979i	-0.0053-0.4925i
		均方误差	—	0.0136	0.0099	0.0135
P-ESPRIT	估计均值	-1.4967	0.9953	0.7496-0.0016i	0.4303-0.0029i	0.2513-0.0031i
	估计	0.4924	1.0152	0.5010-0.0023i	0.0019+0.4979i	-0.0053-0.4925i
		均方误差	0.0101	0.0118	0.0019	0.0026
				0.0019	0.0026	0.0031

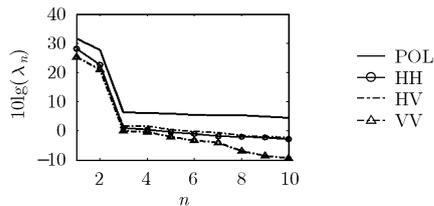


图1 测量信号协方差矩阵特征值分布图

图2给出了P-ESPRIT方法的暗室实测数据的全极化散射中心提取结果。目标是某弹头的缩比模型，起始频率为8.75GHz，频率步进为20MHz，频点数为101，俯仰角是15°，方位角是0°， $p=20$ 。提取后的前后散射中心之间的距离与实际模型的长度相符，该弹头目标一共存在5个散射中心，头部鼻锥处一个、中部两个、尾部两个，其中鼻锥处的归一化散射矩阵与理想导体球的归一化散射矩阵  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  相符，这些与实际目标模型的结构特性吻合得很好，这些结果也进一步印证了P-ESPRIT方法在雷达目标识别领域的重要应用价值<sup>[12-14]</sup>。

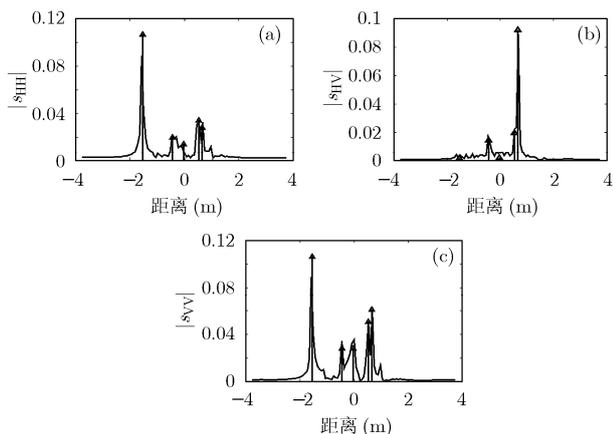


图2 某弹头模型的全极化散射中心提取结果图

## 5 结束语

本文提出了一种新的全极化散射中心提取和参数估计方法：P-ESPRIT方法。该方法首先建立了基于正交极化发射和正交极化接收的全极化信号模型，进而将ESPRIT拓展用于全极化条件下的散射特征提取，并结合双向空间平滑、盖氏圆法、最小二乘估计等方法实现了对不同极化通道的散射中心数目、位置、强度以及归一化极化散射矩阵的同时估计。实际上，本文所提出的P-ESPRIT方法同样适用于单极化测量雷达或双极化测量雷达，单极化情形即对应于 $L=1$ 的情况，双极化情形即对应于 $L=2$ 的情况，分别相当于本文方法的某种简化。P-ESPRIT方法的优点在于：

(1)各个通道的散射中心数目和位置是一致的，避免了后续散射中心属性判定以及目标识别应用中的关联和配对过

程。

(2)同时利用了所有极化通道的信息，提高了信噪比，使得散射中心数目、散射中心位置、强度以及归一化极化散射矩阵等参数的估计更为准确。

(3)只涉及估计一个全极化的协方差矩阵，只做一次矩阵分解，其特征提取的速度较各通道单独处理时要快，效率更高。与MUSIC, ML等超分辨方法相比，P-ESPRIT方法不需要进行搜索，进一步节省了处理时间，提高了散射中心提取和参数估计的实时性。

仿真数据和实测数据实验均证明该方法的估计精度优于各极化通道单独处理情形，极化信息的利用提高了散射中心提取和参数估计的精度，也印证了全极化散射中心提取本质上是一种极化和超分辨联合处理，而绝非二者简单的串联。该方法可用于极化高分辨雷达目标识别，适用于单极化测量、双极化测量以及全极化等多种极化测量情形，也适用于步进频、线性调频等不同发射信号情形，还可推广用于二维成像雷达中的方位超分辨处理。在进行了全极化一维散射中心特征提取之后，如何基于这些特征进行目标识别是下一步要研究的工作。

## 参考文献

- [1] 黄培康, 殷红成, 许小剑. 雷达目标特性[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005.3: 229-278.
- [2] Kim K T, Seo D K, and Kim H T. Efficient radar target recognition using the MUSIC algorithm and invariant features [J]. *IEEE Trans. on AP*, 2002, 50(3): 325-337.
- [3] Fuller D F, Terzuoli A J, and Collins P J, et al. Approach to object classification using dispersive scattering centres [J]. *IEE Proc.-Radar Sonar Navig.*, 2004, 151(2): 85-90.
- [4] Kim K T, Seo D K, and Kim H T. Radar target identification using one-dimensional scattering centres [J]. *IEE Proc.-Radar, Sonar Navig.*, 2001, 148(5): 285-296.
- [5] Boerner W M. Direct and Inverse Methods in Radar Polarimetry[M]. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992: 856-911.
- [6] Chamberlain N F, Walton E K, and Garber F D. Radar target identification of aircraft using polarization-diverse features[J]. *IEEE Trans. on AES*, 1991, 27(1): 58-67.
- [7] Steadly W M and Moses R L. High resolution exponential modeling of fully polarized radar returns [J]. *IEEE Trans. on AES*, 1991, 27(3): 459-468.
- [8] Sacchini J J, Steadly W M, and Moses R L. Full polarization two-dimensional Prony modeling with application to radar target identification [J]. *SPIE*, 1993, Vol. 1960: 125-139.
- [9] 庄钊文, 徐振海, 肖顺平, 等. 极化敏感阵列信号处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.3: 156-172.
- [10] 冯德军, 王雪松, 徐振海, 等. 基于ESPRIT的中段弹道目

- 标特征提取方法[J]. 国防科技大学学报, 2004, 26(2): 41-45.
- [11] Roy R and Kailath T. ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Trans. on ASSP*, 1989, 37(7): 984-995.
- [12] 王永良, 陈辉, 彭应宁, 等. 空间谱估计理论与方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.11: 46-49, 99-105.
- [13] Ertin E and Lee C P. Polarimetric classification of scattering centers using M-ary Bayesian decision rules[J]. *IEEE Trans. on AES*, 2000, 36(3): 738-749.
- [14] Karnychev V, Khlusor V A, and Ligthart L P, *et al.* Algorithms for estimating the complete group of polarization invariants of the scattering matrix (SM) based on measuring all SM elements. *IEEE Trans. on GRS*, 2004, 42(3): 529-539.
- [15] Stoica P and Soderstrom T. Statistical analysis of MUSIC and subspace rotation estimates of sinusoidal frequencies. *IEEE Trans. on SP*, 1991, 39(8): 1836-1847.
- 代大海: 男, 1980年生, 博士生. 研究方向为极化雷达成像、雷达信号处理与目标识别.
- 王雪松: 男, 1972年生, 教授, 博士生导师, 中国电子学会高级会员, IEEE 会员, “三遥”分会委员, 主要从事雷达极化信息处理、雷达电子战等领域的研究.