第17卷　第5期　岩石力学与工程学报　17(5)：559～564
1998年10月　Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering　Oct，1998

软岩蠕变参数的曲线拟合计算方法

李青麒
(武汉水利电力大学水电工程系　武汉　430072)

摘要　介绍一种根据室内蠕变试验资料确定流变参数的曲线拟合方法。工程实例计算表明，该方法具有拟合精度高、便于模型辨识等优点。

关键词　流变特性，软岩，围岩稳定，曲线拟合
分类号　TV 223.1

1　前言

即使在常温下，软弱岩石及含有泥质充填物的结构面破碎带，其变形、应力、应变形态也具有明显的时间效应，因此在该类岩体地下工程围岩稳定分析中，必须考虑岩石所固有的流变特性[1～3]。通常流变数值计算分析时多采用组合模型的本构关系，其优点在于可以用理想化的基本元件的适当组合去模拟实际岩体复杂的流变特性，而且力学概念清晰，物理意义明确。

流变分析的前提是首先必须根据流变试验资料，选择适当的组合模型，并确定相应的流变参数，这也是流变研究的重要课题之一。因此采用好的拟合技术，提高拟合精度，使拟合曲线更好地与试验资料相吻合，对正确地选择流变模型及确定相应的参数是至关重要的。下面将介绍一种根据室内蠕变资料确定流变参数和选择流变模型的方法。

2　根据蠕变试验资料确定流变参数的方法

2.1　基本原理[4]

由蠕变试验资料确定流变参数，曲线拟合是普遍适用的方法，而其中最为科技工作者所熟知、应用最广的方法是最小二乘法。用曲线拟合按最小二乘意义求待定参数的原理是：

假定W 是自变量T 和待定参数B 的已知函数：$W = f(T, B)$，并已给出(W, T)的n对观测值(W_k, T_k) $(k = 1, 2, \cdots, n)$，要求待定参数B，使$Q = \sum_{k=1}^{n}[W_k - f(T_k, B)]^2$为

1997年4月21日收到初稿，1997年6月15日收到修改稿。
作者 李青麒 简介：男，55岁，硕士，1967年毕业于武汉水利电力学院水建系水工专业，现任副教授，主要从事水电站建筑方面的教学与科研工作。

最小。这里B可以是单个待定参数，也可以是g个待定参数，即$B=(b_1, b_2, \cdots, b_g)$，$T$可以是单个自变量$t$，也可以是$p$个自变量，即$T=(t_1, t_2, \cdots, t_p)$。为了使求得的待定参数$B=(b_1, b_2, \cdots, b_g)$满足$Q$最小，$b_i$应满足如下方程组:

$$\frac{\partial Q}{\partial b_i}=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, g) \tag{1}$$

对于非线性表达式$W=f(T, B)$，式(1)不可能直接求解，只能通过逐次线性化，使求得的$B^{(0)}$逐次逼近真值B。

首先假定一组初始近似值$B^{(0)}$，并记$B^{(0)}$与B之差为Δ，则$B=B^{(0)}+\Delta$，即$b_i=b_i^{(0)}+\Delta_i$，$(i=1, 2, \cdots, g)$。从而使确定b_i的问题转化成确定Δ_i的问题。为确定Δ_i，可在$b_i^{(0)}$附近对W作台劳展开，并略去Δ_i的二次及二次以上的项:

$$f(T_k, b_1, b_2, \cdots, b_g) \doteq f_{k0}+\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_1}\Delta_1+\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_2}\Delta_2+\cdots+\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_g}\Delta_g \tag{2}$$

其中:

$$\begin{cases} f_{k0}=f(T_k, b_1^{(0)}, , b_2^{(0)}, \cdots, b_g^{(0)}) \\ \dfrac{\partial f_{k0}}{\partial b_i}=\dfrac{\partial f(T, B)}{\partial b_i}\Bigg|_{(T=T_k,\ b_1=b_1^{(0)},\ b_2=b_2^{(0)},\ \cdots,\ b_g=b_g^{(0)})} \end{cases}$$

当$B^{(0)}$给定后，f_{k0}，$\dfrac{\partial f_{k0}}{\partial b_i}$只是自变量$T_k$的函数，故均可以求得。

因$Q=\sum\limits_{k=1}^{n}[W_k-f(T_k, b_1, b_2, \cdots, b_g)]^2 \doteq$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[W_k-\left(f_{k0}+\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_1}\Delta_1+\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_2}\Delta_2+\cdots+\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_g}\Delta_g\right)\right]^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_i}=2\sum_{k=1}^{n}\left[W_k-\left(f_{k0}+\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_1}\Delta_1+\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_2}\Delta_2+\cdots+\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_g}\Delta_g\right)\right]\left(-\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_i}\right)=$$

$$2\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_1}\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_i}\Delta_1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_2}\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_i}\Delta_2+\cdots+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_g}\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_i}\Delta_g-\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_{k0}}{\partial b_i}(W_k-f_{k0})\right]$$

记

$$\begin{cases} a_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial f_{k0}}{\partial b_i}\dfrac{\partial f_{k0}}{\partial b_j} \\ a_{iw}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial f_{k0}}{\partial b_i}(W_k-f_{k0}) \qquad (i, j=1, 2, \cdots, g) \end{cases} \tag{3}$$

则方程组(1)成为

$$\begin{cases} a_{11}\Delta_1+a_{12}\Delta_2+\cdots+a_{1g}\Delta_g=a_{1w} \\ a_{21}\Delta_1+a_{22}\Delta_2+\cdots+a_{2g}\Delta_g=a_{2w} \\ \vdots \\ a_{g1}\Delta_1+a_{g2}\Delta_2+\cdots+a_{gg}\Delta_g=a_{gw} \end{cases} \tag{4}$$

方程式(4)称法方程，求解法方程可得$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_g$，并进而求得: $b_i=b_i^{(0)}+\Delta_i(i=1, 2, \cdots, g)$，以此作为下一次迭代的初始参数值，重复以上步骤，直到求得的Δ_i小到合乎精

度为止。此时因 Δ_i 已足够小，故台劳展开式中略去 Δ_i 的二次及二次以上的项是可行的。

用台劳展开求待定参数，关键是迭代应按如上所述的原则进行，即每次迭代所求得的 Δ_i 要逐步缩小，使求得的 b_i 逐步逼近待定参数的真值。困难在于初值的选取，如初值选取不当，则迭代将出现发散现象。为了放宽对初值 $b_i^{(0)}$ 的要求，保证迭代收敛，麦夸脱(Marquardt)对此作了修改，即在台劳展开法方程组对角线系数上加一个"阻尼因子"d，方程组(4)成如下的形式:

$$\begin{cases} (a_{11}+d)\Delta_1+a_{12}\Delta_2+\cdots+a_{1g}\Delta_g=a_{1w} \\ a_{21}\Delta_1+(a_{22}+d)\Delta_2+\cdots+a_{2g}\Delta_g=a_{2w} \\ \vdots \\ a_{g1}\Delta_1+a_{g2}\Delta_2+\cdots+(a_{gg}+d)\Delta_g=a_{gw} \end{cases} \tag{5}$$

麦夸脱证明，只要 d 充分大，总能保证下一次迭代中的残差平方和 Q 值比上一次的 Q 值小，除非所求得的 $b_i^{(0)}$ 已是真值 b_i。

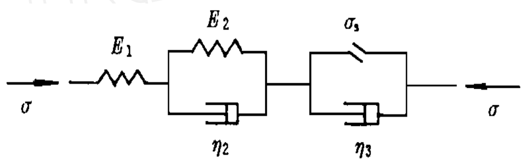

图1　西原流变模型

Fig. 1　Elastic-viscoelastic-viscoplastic model

2.2　常应力条件下岩石流变参数的拟合

利用以上方法，可以由蠕变试验资料求得各种流变模型的流变参数。以如图1所示西原模型为例，岩石在常应力下的压缩应变为

$$\begin{cases} \epsilon=\sigma\left[\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\left(1-e^{-\frac{E_2}{\eta_2}t}\right)\right]+\frac{\Delta\sigma}{\eta_3}t \\ \frac{\partial\epsilon}{\partial E_1}=-\frac{\sigma}{E_1^2} \\ \frac{\partial\epsilon}{\partial E_2}=-\frac{\sigma}{E_2^2}\left[1-\left(1+\frac{E_2t}{\eta_2}\right)e^{-\frac{E_2}{\eta_2}t}\right] \\ \frac{\partial\epsilon}{\partial\eta_2}=-\frac{\sigma}{\eta_2}te^{-\frac{E_2}{\eta_2}t} \\ \frac{\partial\epsilon}{\partial\eta_3}=-\frac{\Delta\sigma}{\eta_3}t \end{cases} \tag{6}$$

式中：岩石流变参数 E_1，E_2，η_2，η_3 为待定参数；$\Delta\sigma=0\quad(\sigma<\sigma_s)$ 或 $\Delta\sigma=\sigma-\sigma_s\quad(\sigma\geq\sigma_s)$；$\sigma$ 为蠕变试验常量应力；σ_s 为岩石产生塑性流动的临界应力，可采用岩石单轴压缩长期强度代替。

根据给定的 n 对试验数据(ϵ, T)，首先假定一组初始近似值$(E_1^{(0)}, E_2^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \eta_3^{(0)})$，代入式(6)，(3)，(5)，可求得一组 $\Delta_i(i=1, 2, 3, 4)$，从而求得一组新的$(E_1, E_2, \eta_2, \eta_3)$，以此为基础进行下一轮迭代计算，直到满足精度为止。

2.3　由多级荷载试验资料拟合流变参数

实际上岩石流变参数在不同应力条件下并非定值，确定流变参数时，理论上应将岩石应力作为参数变量进行类似计算，以确定流变参数与应力水平的函数关系。这在数学上并没有特别的困难，但目前我们对这种关系的研究工作还不多，同时考虑到工程实践中，岩

体条件的复杂性、岩石力学试验中尚存在不确定因素，因此强调不同应力水平下流变参数的差异并不一定能够提高计算精度，故在进行流变分析时，仍假定在各级荷载下岩石流变参数均保持为常数。流变参数的确定亦可按上述方法进行。在单调加载的条件下，根据迭加原理，式(6)可写作如下形式：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\epsilon = \sum_{j=1}^{m} \epsilon_j = \sum_{j=1}^{m} \left\{ (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2}{\eta_2}(t - t_{j-1})}\right) \right] + \frac{\Delta\sigma_j}{\eta_3}(t - t_{j-1}) \right\} \\
&\frac{\partial \epsilon}{\partial E_1} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial E_1} = \sum_{j=1}^{m} - \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{E_1^2} \\
&\frac{\partial \epsilon}{\partial E_2} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial E_2} = \sum_{j=1}^{m} - \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{E_2^2} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{E_2}{\eta_2}(t - t_{j-1}) \right] e^{-\frac{E_2}{\eta_2}(t - t_{j-1})} \right\} \\
&\frac{\partial \epsilon}{\partial \eta_2} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \eta_2} = \sum_{j=1}^{m} - \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\eta_2}(t - t_{j-1}) e^{-\frac{E_2}{\eta_2}(t - t_{j-1})} \\
&\frac{\partial \epsilon}{\partial \eta_3} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \eta_3} = \sum_{j=1}^{m} - \frac{\Delta\sigma_j}{\eta_3}(t - t_{j-1})
\end{aligned}
\right.
\tag{7}
$$

式中：σ_j，t_j 分别为第 j 级荷载下岩石应力和该级荷载结束时所对应的时间。

$$
\Delta\sigma_j = \begin{cases} 0 & \sigma_j < \sigma_s \quad \text{对应 } \sigma_j < \sigma_s \text{ 的各级荷载} \\ \sigma_j - \sigma_s & \sigma_j \geq \sigma_s \quad \text{对应开始满足 } \sigma_j \geq \sigma_s \text{ 的那一级荷载} \\ \sigma_j - \sigma_{j-1} & \sigma_j > \sigma_s \quad \text{对应以后各级荷载} \end{cases}
$$

2.4　模型辨识

上述方法，理论上适用于所有流变模型，只是不同模型的本构关系不同，式(6)，(7)有不同的形式而已。对于在工程中使用较多的广义开尔文模型(图2)和伯格斯模型(图3)，则仍可使用西原模型的表达式，只需对输入数据稍作修改即可。对于广义开尔文模型，可在式(6)中令 $\Delta\sigma = \sigma$，在式(7)中令 $\Delta\sigma_j = 0$；对于伯格斯模型，可在式(6)中令 $\Delta\sigma = 0$，在式(7)中令 $\Delta\sigma_j = \sigma_j - \sigma_{j-1}$。

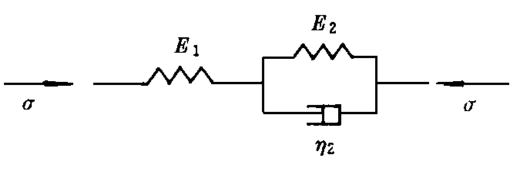

图2　广义开尔文模型

Fig. 2　Voigt model

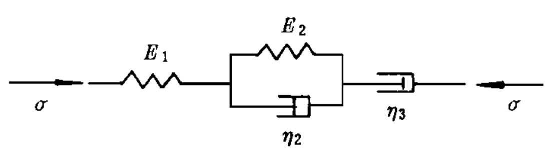

图3　伯格斯模型

Fig. 3　Burgers model

在进行模型辨识时，可以很方便地根据不同模型由残差平方和 Q 反映的拟合精度来确定适用于工程实际岩体的流变模型及其相应的流变参数。当两种模型的 Q 值相同时，则可根据不同流变模型反映实际岩体流变特性不同来确定。如广义开尔文模型适用于反映岩体的粘弹性蠕变，当岩体长期抗压强度相对围岩应力水平来说较大时，对于此种情况，伯格斯模型和西原模型适用于反映岩体的粘弹性-粘塑性蠕变，其中伯格斯模型特别适用于长期抗压强度特别低的岩体。

3　工程实例

某大型水电枢纽工程有4条大断面尾水隧洞(内径10m，开挖直径12m)平行通过志留系中统韩家店组灰绿色砂质粘土岩(S_{2h}^{1-2})，该岩层水平厚度约50m，属极软弱岩层。作者在对该隧洞群进行流变计算分析时，以室内蠕变试验资料为依据，采用上述方法，分别对广义开尔文模型(K-model)、伯格斯模型(B-model)、西原模型(X-model)拟合计算流变参数并最终确定流变模型。

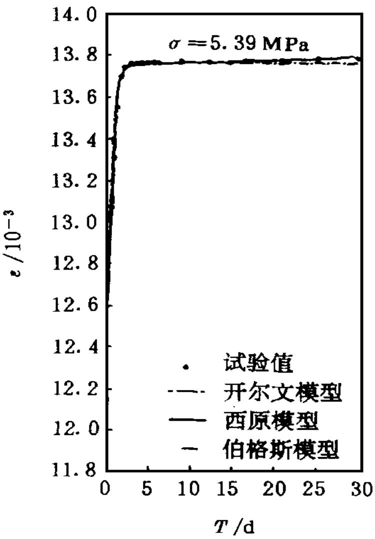

图4　试验数据与拟合曲线

Fig. 4　Experimental data and fitting curve

图4中绘出常应力($\sigma=5.39$MPa)时试验数据点和采用3种流变模型时的拟合曲线。图5中给出多级荷载下蠕变试验数据点和拟合曲线。两种条件下的拟合计算结果列于表1。

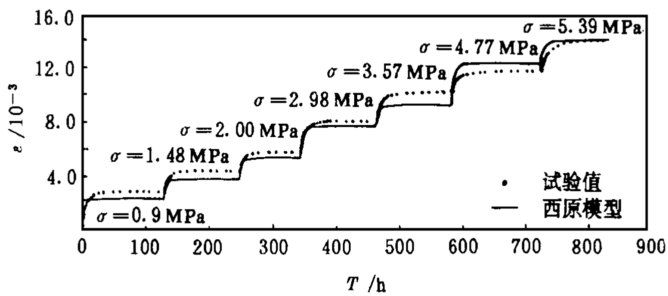

图5　试验数据与拟合曲线

Fig. 5　Experimental data and fitting curve

表1　两种条件下拟合计算结果

Table 1　Results of two kinds of curve fitting

流变模型	常应力条件					多级荷载条件				
	流变参数				残差平方和	流变参数				残差平方和
	E_1/MPa	E_2/MPa	η_2/MPa·d	η_3/MPa·d	Q	E_1/MPa	E_2/MPa	η_2/MPa·d	η_3/MPa·d	Q
广义开尔文	1721	358	212		0.891×10^{-7}	1010	641	139		0.333×10^{-4}
西原	1731	361	209	2.7×10^{5}	0.865×10^{-7}	1010	641	139	1.8×10^{11}	0.333×10^{-4}
柏格斯	1731	361	209	3.6×10^{6}	0.865×10^{-7}	1010	641	139	7.8×10^{18}	0.333×10^{-4}

4　结语

以上分析和工程实例计算结果表明，由常应力条件下试验数据拟合计算流变参数的精度高，模型辩识方便。根据多级荷载作用下流变试验资料拟合计算确定的参数，实际上是按最小二乘法意义所求出的该荷载序列作用下的综合参数，反映在一定的应力水平范围

内，不同应力水平时岩体流变特性的综合效应，其拟合精度相对按某级荷载单独进行拟合的精度虽然会差一些，但适用于沿空间和时间坐标围岩应力水平变化较大的情况。

根据该实际工程埋深大(约400m)，初始应力和开挖后二次应力较高，而且应力变化相对不大的实际情况，作者采用常应力($\sigma=5.39$MPa)情况下西原模型拟合计算结果进行的该工程平面有限元流变计算分析，能较好地反映围岩位移、应变、应力的时效特性，在该工程设计中得到具体应用。

参 考 文 献

1 陈宗基 根据流变学与地球动力学观点研究新奥法 岩石力学与工程学报，1988，7(2)：97～106

2 陈宗基，石泽全，于智海等 用8000kN 多功能三轴仪测量脆性岩石的扩容、蠕变及松驰 岩石力学与工程学报，1989，8(2)：97～118

3 陈宗基，康文法 岩石的封闭应力、蠕变和扩容及本构方程 岩石力学与工程学报，1991，10(4)：299～312

4 冯 康 数值计算方法 北京：国防工业出版社，1978，147～160

CURVE FITTING METHOD FOR CREEP PARAMETER OF SOFT ROCK

Li Qingqi

(*Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering*, *Wuhan* 430072)

Abstract The curve fitting method is described for creep parameters of rock based on the creep test in laboratory. The practical engineering example shows that the rheological model identification is easy to make and higher accuracy of fitting curve can be obtained with this method.

Key words rheological behavior, soft rock, stability of rock mass, curve fitting method