

## 双重不变 ESPRIT<sup>1</sup>

刘 全 雍 玲 张尔扬

(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

**摘 要** ESPRIT 利用了阵列在一个方向上的平移不变性, 从而可估计信号的一个方向. 该文利用 3 个相互位移的子阵列所具有的双重不变性质, 从而估计出了信号的两个方向, 并且计算量较小, 两个方向角自然配对, 对子阵列的内部结构也没有要求, 因此可以选择适当的子阵列结构以获得良好的估计效果.

**关键词** 波达方向估计, 平移不变性

**中图分类号** TN911.23

### 1 引 言

高分辨波达方向估计具有广阔的应用前景, 因此人们提出了各种各样的估计方法. 在一维估计方法中, ESPRIT 算法<sup>[1]</sup> 是一个具有良好估计性能的代表性方法, 但它不能直接推广到二维情形, 因此人们通过各种方法来推广. 现在已经提出了几种二维 ESPRIT 算法, 如波达方向矩阵法<sup>[2]</sup>、二维虚拟 ESPRIT 算法<sup>[3,4]</sup>、二维 Unitary-ESPRIT 算法<sup>[5]</sup>、UCA-ESPRIT 算法<sup>[6]</sup>, 这些方法各有特点. 其中, 二维虚拟 ESPRIT 算法中的阵列由三个相互位移的子阵列组成, 子阵列结构没有限制, 从而可以通过改变子阵列结构来提高估计精度. 但它只用到了一个平移不变性, 而实际阵列具有至少两个不变性, 因此对阵列的利用率还不充分. 本文基于同样的阵列结构, 利用实际阵列的两个不变性, 提出了一种全新的二维 ESPRIT 算法——双重不变 ESPRIT. 它保留了二维虚拟 ESPRIT 的所有优点, 并且在相同的情况下, 获得了更好的估计效果.

在本文中, 均假设信号为窄带远场平面波,  $P$  个信号和  $X, Y$  轴的夹角分别为  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, P$  (为了方便, 分别称为方位角和俯仰角), 每个阵元上的噪声为高斯白噪声, 阵元之间的噪声不相关, 噪声和信号也互不相关.

### 2 双重不变 ESPRIT

先考虑比较简单情况, 在图 1 所示的阵列中, 由三个子线性阵列组成, 每个子阵列有  $M$  个阵元, 其中子阵 1 由阵元  $x_k, k = 1, 2, \dots, M$  组成, 子阵 2 由阵元  $x_k, k = M + 1, M + 2, \dots, 2M$  组成, 子阵 3 由阵元  $x_k, k = 2M + 1, 2M + 2, \dots, 3M$  组成. 子阵列相互平行, 且完全相同, 子阵 2, 3 对称于  $X$  轴, 和  $X$  轴的距离为  $d_y$ , 其第一个阵元和  $Y$  轴的距离为  $d_x$ , 每个子阵列中的第  $i$  个阵元到其第一个阵元的距离为  $d_i$ . 显然, 这个阵列和二维虚拟 ESPRIT 所采用的阵列完全相同. 设信号源不相干,  $\mathbf{X}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_{3M}(t)]^T$  代表整个阵列上的接收信号, 则有下列关系:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$$
$$\mathbf{J}_2\mathbf{A} = \mathbf{J}_1\mathbf{A}\Phi_1 \tag{1}$$

$$\mathbf{J}_3\mathbf{A} = \mathbf{J}_1\mathbf{A}\Phi_2 \tag{2}$$

<sup>1</sup> 2001-03-30 收到, 2002-05-06 定稿

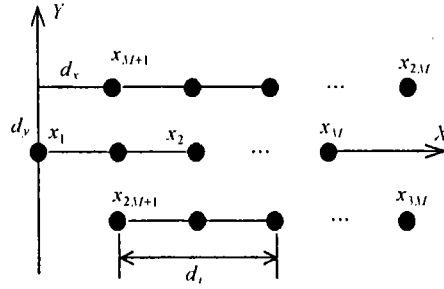


图 1 三线性平行子阵列

其中  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 \Phi_1 \\ \mathbf{A}_1 \Phi_2 \end{bmatrix}$  是整个阵列的流形;

$$\Phi_1 = \text{diag}[\exp(j(u_1 + v_1)) \quad \exp(j(u_2 + v_2)) \quad \cdots \quad \exp(j(u_P + v_P))];$$

$$\Phi_2 = \text{diag}[\exp(j(u_1 - v_1)) \quad \exp(j(u_2 - v_2)) \quad \cdots \quad \exp(j(u_P - v_P))];$$

$\mathbf{J}_1 = [\mathbf{I}_{M \times M} \quad \mathbf{0}_{M \times 2M}]$ ,  $\mathbf{J}_2 = [\mathbf{0}_{M \times M} \quad \mathbf{I}_{M \times M} \quad \mathbf{0}_{M \times M}]$ ,  $\mathbf{J}_3 = [\mathbf{0}_{M \times 2M} \quad \mathbf{I}_{M \times M}]$  分别是子阵 1, 2, 3 的选择矩阵;  $\mathbf{A}_1 = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_P]$  是子阵 1 的流形;  $\mathbf{a}_i = [\exp(ju_{1,i}) \quad \exp(ju_{2,i}) \quad \cdots \quad \exp(ju_{M,i})]^T$ ;  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \quad s_2(t) \quad \cdots \quad s_P(t)]^T$  是信号向量;  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \quad n_2(t) \quad \cdots \quad n_{3M}(t)]^T$  是噪声向量;  $u_k = 2\pi d_x \cos \alpha_k / \lambda$ ;  $v_k = 2\pi d_y \cos \beta_k / \lambda$ ;  $u_{i,k} = 2\pi d_i \cos \alpha_k / \lambda$ ,  $i = 1, 2, \cdots, M$ ,  $k = 1, 2, \cdots, P$ .

接收信号  $\mathbf{X}(t)$  的自相关矩阵为  $\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}$ , 其中  $\mathbf{R}_{ss} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$  为信号的自相关阵. 对此自相关阵进行特征分解, 设特征值为  $\lambda_i (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{3M})$ , 相应的特征向量为  $\mathbf{v}_i$ , 则  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, 2, \cdots, P$  所张成的子空间和  $\mathbf{A}$  的列向量张成的子空间相同, 即均为信号子空间的基, 因此存在满秩矩阵  $\mathbf{T}$ , 使得  $\mathbf{A} = \mathbf{U}_s\mathbf{T}$ , 其中  $\mathbf{U}_s = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_P]$ .

由 (1) 式有  $\mathbf{J}_2\mathbf{U}_s\mathbf{T} = \mathbf{J}_2\mathbf{A} = \mathbf{J}_1\mathbf{A}\Phi_1 = \mathbf{J}_1\mathbf{U}_s\mathbf{T}\Phi_1$ , 即  $\mathbf{J}_2\mathbf{U}_s = \mathbf{J}_1\mathbf{U}_s\mathbf{T}\Phi_1\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{J}_1\mathbf{U}_s\Phi_1$ .

同样, 由 (2) 式有  $\mathbf{J}_3\mathbf{U}_s = \mathbf{J}_1\mathbf{U}_s\mathbf{T}\Phi_2\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{J}_1\mathbf{U}_s\Phi_2$ .

显然,  $\Phi_1, \Phi_2$  可以分别求出来, 再进行特征分解即可求出  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$ . 由于变换矩阵  $\mathbf{T}$  是相同的, 因此  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  中的元素是配好对的.  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  中包含有信号的方位和俯仰信息, 可以求出信号的两个方向. 双重不变 ESPRIT 算法的具体计算步骤如下:

(1) 求出整个阵列的自相关阵  $\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)]$ ;

(2) 对自相关阵进行分解 ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{3M}$ ):

$$\mathbf{R}_{xx} = \sum_{k=1}^{3M} \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H$$

从而得到信号子空间  $\mathbf{U}_s = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_P]$ ;

(3) 基于 LS、TLS 准则由下述关系求出  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$ :

$$\mathbf{J}_2\mathbf{U}_s = \mathbf{J}_1\mathbf{U}_s\Phi_1, \quad \mathbf{J}_3\mathbf{U}_s = \mathbf{J}_1\mathbf{U}_s\Phi_2$$

(4) 对  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  进行特征分解得到  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$ :

$$\mathbf{T}\Phi_1\mathbf{T}^{-1} = \Phi_1, \quad \mathbf{T}\Phi_2\mathbf{T}^{-1} = \Phi_2$$

(5) 由  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  估计出信号的方向。

为了得到唯一解,  $d_x$  和  $d_y$  的选取有一定要求, 否则会有相位模糊现象, 与二维虚拟 ESPRIT 一样, 一般可选  $d_y = \lambda/4$ ,  $d_x = \lambda/2$ 。应该注意到, 在二维虚拟 ESPRIT 中, 即使满足这个条件, 为了得到唯一解, 还需要限制俯仰角的取值范围, 即只在第一象限内取值, 而在本方法中, 俯仰角的范围可以从  $0^\circ$  到  $180^\circ$ 。

比较二维虚拟 ESPRIT 与本文方法, 可以知道, 这两种方法有许多相似之处。本文方法具有二维虚拟 ESPRIT 的所有优点, 如子阵列结构任意。对许多问题的解决方法也是一样的, 如

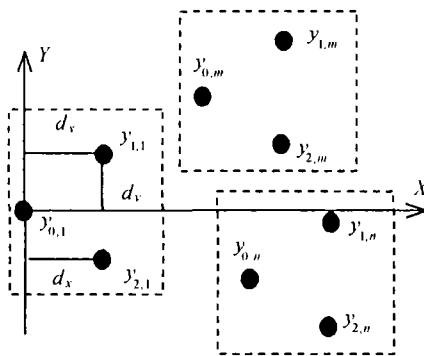


图 2 三阵元组成的阵列

图 1 中的子阵列是线性的, 因此不能适用于方位角兼并的情况, 这时可以采用图 2 所示的阵列, 或者令每个子阵为一个矩形阵列。另外, 对相干源, 可以采用空域平滑技术<sup>[7]</sup>, 只是此时子阵必须是均匀阵列。尽管这两种方法有许多相似之处, 但在相同的条件下, 本文方法能够得到更好的估计结果, 因为本文方法能够更好地利用阵列孔径, 这一点可以从计算过程看出。在二维虚拟 ESPRIT 中, 采用两个子阵才合成了一个虚拟子阵, 因此损失了一个子阵。而在本文中, 是直接对整个阵列进行处理, 因此没有损失。

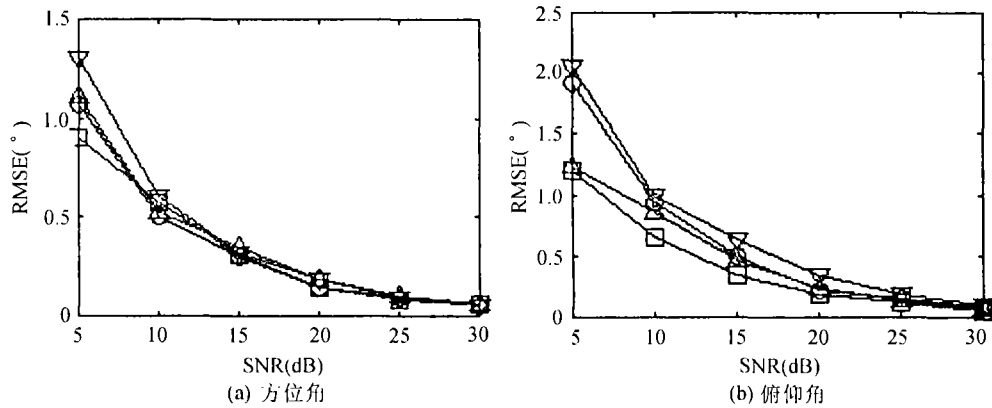
### 3 仿真实验

本节给出双重不变 ESPRIT 的计算机仿真结果。每个实验都由 100 次独立试验组成, 每次试验的快拍数为 100。噪声为高斯白噪声, 噪声和信号不相关。

**例 1** 本实验采用图 1 所示的阵列结构。阵列由 3 个线性平行子阵列组成, 每个子阵列有 4 个阵元, 子阵列在  $X, Y$  方向上的平移量  $d_x, d_y$  分别为半波长和四分之一波长, 子阵列内第  $i$  个阵元到其第一个阵元的距离  $d_i (i = 2, 3, 4)$  分别为 3, 6, 9 倍半波长。信号源有两个, 功率相同, 入射角分别为  $(45^\circ, 40^\circ), (50^\circ, 50^\circ)$ , 两信号互相独立。实验中用了两种方法, 方法 1 为本文方法, 方法 2 为二维 Unitary-ESPRIT。因为二维 Unitary-ESPRIT 不能利用本文的阵列结构, 因此仿真时用的是一个  $4 \times 3$  的均匀矩形阵列,  $X, Y$  方向上的阵元间距均为半波长。除了阵列结构之外, 两种方法所用的其余条件完全一样, 实验结果见图 3。从图中可以看出, 在实验条件下, 本文方法具有更好的估计精度。如果和二维虚拟 ESPRIT 算法中的结果进行比较, 就会发现, 为了获得比 Unitary-ESPRIT 更好的估计精度, 二维虚拟 ESPRIT 算法中子阵列的孔径要比本文方法的孔径大很多, 这也说明了本文方法能够更好地利用阵列的孔径。

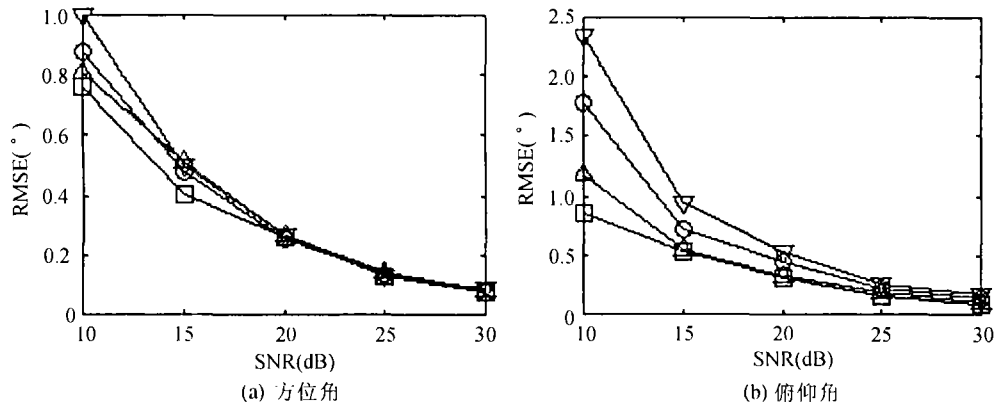
**例 2** 本实验和实验 1 基本相同, 只是信号源是两个相干源, 子阵列内第  $i$  个阵元到其第一个阵元的距离  $d_i (i = 2, 3, 4)$  分别为 5, 10, 15 倍半波长, 实验结果见图 4。同样, 从实验结果可以看出, 本文方法获得了很好的估计结果。

**例 3** 本实验采用图 2 所示的阵列结构。每个子阵列有 4 个阵元, 子阵列在  $X, Y$  方向上的平移量  $d_x, d_y$  仍然为半波长和四分之一波长, 子阵列 1 的各个阵元的坐标分别为  $(0, 0), (4.4, 4.4), (8.8, 8.8), (13, 13)$ , 单位为半波长。信号源有 3 个, 功率相同, 入射角分别为  $(45^\circ, 40^\circ), (45^\circ, 50^\circ), (50^\circ, 50^\circ)$ , 3 个信号互相独立。实验中只用了本文方法, 结果见图 5。从图中可以看出, 虽然



△: 方法 1 对信号 1    ▽: 方法 2 对信号 1  
 □: 方法 1 对信号 2    ○: 方法 2 对信号 2

图 3 对不相干源的估计结果



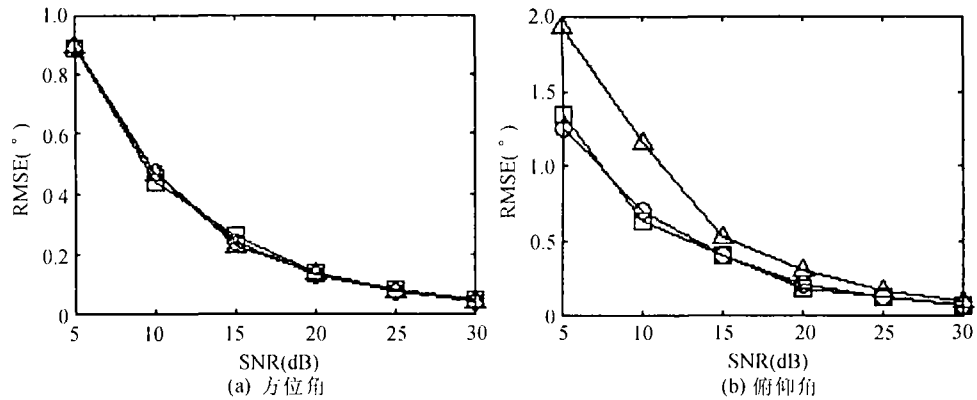
△: 方法 1 对信号 1    ▽: 方法 2 对信号 1  
 □: 方法 1 对信号 2    ○: 方法 2 对信号 2

图 4 对相干源的估计结果

这 3 个信号在方位、俯仰方向都有兼并现象, 但本文方法仍然可以精确地估计出各个信号源的方向。

## 4 结 论

从前面的理论分析和仿真实验结果可以看出, 本文提出的双重不变 ESPRIT 是一种具有较好性能的二维波达方向估计方法, 它具有二维虚拟 ESPRIT 的所有优点, 如计算量较小、子阵列的结构任意, 因此阵列校准比较容易, 配置灵活, 可以通过改变子阵列结构获得良好的估计结果等。同时, 由于本文方法充分利用了阵列的两个平移不变性, 因此性能有很大提高, 这一点和 MI-ESPRIT<sup>[8]</sup> 有相似之处。但 MI-ESPRIT 利用的是同一方向上的多个不变性, 只是一个一维方法, 而本文方法利用的两个不变性是不同方向上的, 因此可以估计两个方向。本文方法的主要缺点和二维虚拟 ESPRIT 是一样的, 即可以估计的信号数较少, 最多为  $M$  个。如何克服该缺点, 并对算法进行改进将是今后的一个主要研究方向。



△: 信号 1   □: 信号 2   ○: 信号 3  
图 5 对有方位、俯仰兼并现象的信号的估计结果

### 参 考 文 献

- [1] R. Roy, T. Kailath, ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques, *IEEE Trans. on ASSP*, 1989, ASSP-37(7), 984-995.
- [2] 殷勤业, 高分辨率波达方向估计, [博士论文], 西安, 西安交通大学, 1989.
- [3] 刘全等, 二维虚拟 ESPRIT 算法, *信号处理*, 2001, 17(3), 247-251.
- [4] Q. Liu, 2-D virtual ESPRIT algorithm, *Electronics Letters*, 2001, 37(16), 1052-1053.
- [5] M. Haardt, Efficient One-, Two-, and Multidimensional High-Resolution Array Signal Processing, [Ph. D Thesis], Technical University of Munich, Germany, 1996.
- [6] C. P. Mathews, M. D. Zoltowski, Eigenstructure techniques for 2-D angle estimation with uniform circular arrays, *IEEE Trans. on SP*, 1994, SP-42(9), 2395-2406.
- [7] T. J. Shan, M. Wax, T. Kailath, On spatial smoothing for directions-of-arrival estimation of coherent signals, *IEEE Trans. on ASSP*, 1985, ASSP-33(8), 806-811.
- [8] A. L. Swindlehurst, B. Ottersten, R. Roy, T. Kailath, Multiple invariance ESPRIT, *IEEE Trans. on SP*, 1992, SP-40(4), 867-881.

## DUAL INVARIANCE ESPRIT

Liu Quan   Yong Ling   Zhang Eryang

(School of Electron. Sci. and Eng., Nat. Univ. of Defence Tech., Changsha 410073, China)

**Abstract** ESPRIT can estimate one direction of signals utilizing a single shift-invariance property of the sensor array. A novel method, i.e. dual-invariance ESPRIT, is proposed in the paper which can estimate two directions of incident signals utilizing two shift-invariance properties of a special sensor array which consists of three shifted subarrays. The new method is very fast and can get naturally paired direction estimates. What is more, the subarray geometry is arbitrary so that accurate estimates can be obtained by using an appropriate subarray geometry.

**Key words** Direction of arrival estimation, Shift-invariance property

刘 全: 男, 1971 年生, 讲师, 研究方向为移动通信和阵列信号处理技术.

雍 玲: 女, 1973 年生, 讲师, 研究方向为通信信号处理和通信网络.

张尔扬: 男, 1941 年生, 教授, 研究方向为自适应信号处理, 通信抗干扰及 CDMA 技术的研究.