

无完全重构约束的两通道自适应 FIR 滤波器组设计

王兰美 水鹏朗 廖桂生 王桂宝
(西安电子科技大学电子工程学院 西安 710071)

摘要: 该文研究了在无完全重构约束情况下两通道自适应 FIR 无混叠滤波器组的时域设计方法。由于放松了对完全重构的约束, 子带编码器的失真由系统失真和量化失真两部分构成。在整体比特数和输入过程给定的情况下, 本文通过优化滤波器系数, 使得子带编码器的整体失真达到最小, 实现提高其编码增益的目的。后面的设计实例验证了该方法的有效性。

关键词: 靠近无完全重构约束, 滤波器组, 子带编码增益

中图分类号: TN957.5, TN713 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)04-0570-04

Design of Two-Channel Signal-Adapted FIR Filterbanks without Perfect Reconstruction Constraints

Wang Lan-mei Shui Peng-lang Liao Gui-sheng Wang Gui-bao
(Electronic Engineering School, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract This paper investigates the time-domain design method of two-channel signal-adapted FIR alias-free filterbanks without Perfect Reconstruction (PR) constraints. For subband coders based on filterbanks without PR constraints, the total distortion is composed of two parts: the systemic distortion and quantization distortion. For a given total bit budget, the minimization of the total distortion is an unconstrained nonlinear programming. Due to its high nonlinearity, the design results greatly depend on selection of initial filterbanks. Two approaches to select the initial filterbanks, the associated algorithm and designs of several examples are given in this paper. The obtained signal-adapted filterbanks achieve larger subband coding gains than the existing methods, which verifies our method is effective.

Key words Without perfect reconstruction constraints, Filterbanks, Subband coding gain

1 引言

近年来, 自适应子带滤波器组的设计已经成为滤波器组应用研究的热点之一。由于滤波器组的频率特性与输入信号的统计特性相匹配, 自适应滤波器组的性能超过了标准滤波器组。自适应滤波器组设计中, 子带编码增益常常用来衡量滤波器组的性能。具有最大编码增益的 IIR 正交滤波器组是主分量滤波器组^[1] (PCFB's)。后来, Moulin 和 Kirac 分别研究了 FIR 自适应正交滤波器组的设计问题, 提出了线性半无穷规划(Linear Semi-Infinite Programming, LSIP)方法、窗法等多种设计方法^[2,3]。到 2000 年, Vaidyanathan^[4]和 Moulin^[5]解决了 IIR 自适应双正交滤波器组的设计问题。利用提升结构, 水鹏朗^[6,7]等设计了自适应 FIR 双正交内插滤波器组, 相应的优化问题是一个无约束非线性规划。与正交情况相比, 编码增益得到了较明显的提高, 然而滤波器组的特殊结构也

限制了编码增益的进一步改善。2001 年, Lu Wu-sheng^[8]等人研究了 M 带自适应 FIR 双正交滤波器组的设计问题, 设计通过一个非常复杂的非线性规划实现, 部分解决了这类滤波器的设计问题。无完全重构约束的自适应滤波器组可以进一步提高编码增益, 其相应的子带编码器的失真是由量化噪声和系统误差两部分组成。放松 PR 约束(Perfect Reconstruction constraints), 通过系统误差和量化误差之间的折衷可以进一步减少整体误差, 提高编码增益。早在 1988 年, Dembo 和 Malah^[9]用余弦调制滤波器组作为分析滤波器组, 优化综合滤波器来设计子带编码器。2001 年, 文献[10]用频域方法设计了无完全重构约束条件的自适应 IIR 滤波器组并对 FIR 的情况做了一些讨论。

本文研究无完全重构约束条件下两通道自适应 FIR 滤波器组的时域设计方法。为简化设计问题, 我们主要考虑通道间无混叠的滤波器组的设计问题。在本文的第 2 节导出了

两通道自适应 FIR 滤波器组设计的时域优化问题;第3节给出

出了两种确定初始滤波器组的方法和求解方法以求解优化问题;第4节给出了几个设计实例并验证了方法的有效性。

2 设计问题的描述

子带编码是滤波器组设计的重要应用之一,子带编码器由一个多速率滤波器组和量化器两部分构成,图1描述了两通道子带编码器的结构。

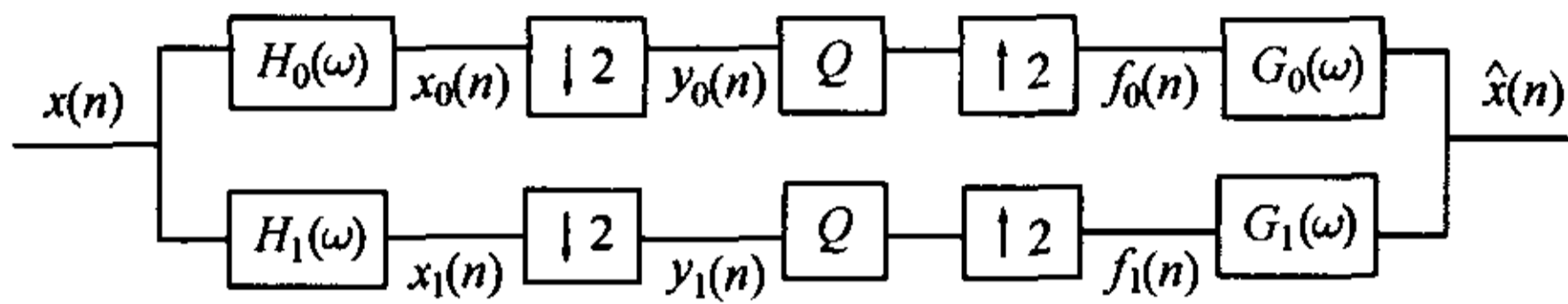


图1 两通道子带编码器

$x(n)$ 一般假定为零均值广义平稳的高斯随机序列, $x_0(n), x_1(n), y_0(n), y_1(n)$ 分别是子带输出信号和下采样后的子带输出信号, $f_0(n), f_1(n)$ 是上采样后的输出信号, Q 表示均匀的标量量化器, $\downarrow 2$ 表示下2采样, $\uparrow 2$ 表示上2采样。

对于图1所示的子带编码器,当滤波器不是完全可重构的时候,整体失真 ε 由两部分构成:系统失真 ε_s 和量化失真 ε_q 。系统失真是指不考虑量化器时由系统的不完全重构引起的输入和输出信号的误差,依赖于滤波器系数和输入过程的二阶统计量。这种情况下衡量子带编码性能的子带编码增益为

$$G_{\text{SBC}} = \varepsilon_{\text{PCM}} / (\varepsilon_s + \varepsilon_q) \quad (1)$$

其中, ε_{PCM} 为直接 PCM 量化的误差。对于完全重构的滤波器组,如正交滤波器组和双正交滤波器组等,其子带编码失真完全由量化引起。本文考虑放松对完全重构的要求,设计无完全重构性质的自适应滤波器组。在这种情况下,子带编码的整体失真由系统失真和量化失真两部分构成,前者仅依赖于滤波器系数和输入过程的统计特性,后者依赖于滤波器系数、输入过程统计量、整体比特数和比特分配方案。自适应设计的目的在于对于给定的整体比特数和输入过程,优化滤波器系数使得整体失真最小。

首先考虑系统误差项的情况。在图1中,不考虑量化器时,系统的输入和输出 $x(n), \hat{x}(n)$ 对应的 Z 变换为 $X(z), \hat{X}(z)$ 满足^[11]

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \frac{1}{2} [H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)]X(z) \\ &+ \frac{1}{2} [H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)]X(-z) \end{aligned} \quad (2)$$

第二项是频谱混叠项为了得到无频谱混叠的滤波器组,滤波

器设计常采用下面的充分条件:

$$\begin{cases} G_0(z) = H_1(-z) \\ G_1(z) = -H_0(-z) \end{cases} \quad (3)$$

大多数双正交滤波器组满足这一条件。采用无混叠条件式(3)可以带来两个好处:滤波器设计时只需要设计分析滤波器组,相应设计问题的规模降低;子带滤波器组的输入输出关系可以看成是一个线性时不变系统,即

$$\begin{cases} \hat{X}(z) = T(z)X(z) \\ T(z) = \frac{1}{2}(H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z)) \end{cases} \quad (4)$$

设输入信号是一个零均值的 Gauss 广义平稳序列,具有方差 σ_x^2 和自相关序列 $r_x(n)$,不失一般性,考虑分析滤波器组的长度为 N ,支撑集为 $\{0, 1, \dots, N-1\}$,则 $T(z)$ 是 h_0, h_1 的二次函数,相应的滤波器长度为 $2N-1$ 。

$$T(z) = \sum_{n=1-N}^{N-1} t(n)z^{-n}$$

在该情况下,输入输出关系的时域描述为

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=1-N}^{N-1} t(k)x(n-k)$$

系统误差信号的方差为

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= E\{(\hat{x}(n) - x(n))^2\} \\ &= \sum_{k=1-N}^{N-1} \sum_{l=1-N}^{N-1} (t(k) - \delta(k))r_x(k-l)(t(l) - \delta(l)) \end{aligned} \quad (5)$$

为了表示上简洁,取列向量 s 满足 $s(n) = t(n) - \delta(n)$, $\mathbf{R}_{x,2N-1}$ 表示第一列为 $[r_x(0) \ r_x(1) \ \dots \ r_x(2N-2)]$ 的 $2N-1$ 阶对称 Toeplitz 矩阵,则 $\varepsilon_s = \mathbf{s}^T \mathbf{R}_{x,2N-1} \mathbf{s}$ 。

其次考虑量化误差项的情况,像很多文献中一样,我们采用标准的指数量化模型,即 $D(b) = 2.71\sigma_x^2 2^{-2b}$, $D(b)$ 是量化失真误差的方差, σ_x^2 是输入量化器的零均值高斯随机序列的方差, b 是量化器的比特率(每个样本 b 个比特)。这样在通道间最优比特分配条件下,量化失真可表示为^[4-12]

$$\varepsilon_q = \gamma 2^{-2b} \sigma_{x_0} \sigma_{x_1} \|h_0\|_2 \|h_1\|_2 \quad (6)$$

在上面公式中, b 是整体比特预算(Total bit budget), $\sigma_{x_0}, \sigma_{x_1}$ 是子带信号的标准差,可以用向量和矩阵的形式表示如下:

$$\sigma_{x_0}^2 = \mathbf{h}_0^T \mathbf{R}_{x,N} \mathbf{h}_0, \quad \sigma_{x_1}^2 = \mathbf{h}_1^T \mathbf{R}_{x,N} \mathbf{h}_1$$

$\mathbf{R}_{x,N}$ 表示以 $[r_x(0) \ r_x(1) \ \dots \ r_x(N-1)]$ 为第一列的对称 Toeplitz 矩阵。

这样整体误差的最小化可以描述为下面的优化问题

$$\min_{\{h_0, h_1\}} \{\mathbf{s}^T \mathbf{R}_{x,2N-1} \mathbf{s} + 2.71 \times 2^{-2b} \sigma_{x_0} \sigma_{x_1} \|h_0\|_2 \|h_1\|_2\} \quad (7)$$

无完全重构的滤波器组的编码增益依赖于整体比特预

$\epsilon_{PCM} = 2.71 \times \sigma_x^2 2^{-2b}$, 对于比特预算 b , 子带编码器的编码增益是

$$G_{sbc} = \frac{2.71 \times 2^{-2b} \sigma_x^2}{s^T R_{x,2N-1} s + 2.71 \times 2^{-2b} \sigma_{x_0} \sigma_{x_1} \|h_0\|_2 \|h_1\|_2} \quad (8)$$

因此, 式(7)中目标函数的最小化等价于式(8)中子带编码增益的最大化。

3 优化问题的求解

优化问题式(7)是一个非线性优化问题, 目标函数是一个关于滤波器系数的四次多元多项式。用梯度下降法进行求解时容易陷入局部极值点, 得到不好的设计结果。因此寻找一个好的初始滤波器组是非常关键的。下面我们给出两种确定初始滤波器组的方法。

不失一般性, 考虑滤波器长度相同的情况, 不妨设长度为 N 。对于式(7)初始点的选取可有以下途径:

方法 1 当长度 N 为偶数时, 可以先设计自适应 FIR 正交滤波器组^[2,3], 然后, 把所得到的正交滤波器组系数作为式(7)的初始滤波器组。对于自适应 FIR 正交滤波器组的设计, 文献[2, 3]中有详细的论述。主要结果如下:

假设输入的信号 $x(n)$ 的相关系数是 $r_x(n)$, 由于 FIR 正交滤波器由一个低通滤波器唯一确定, 因此只须设计低通滤波器。设计问题可描述为下面带二次约束的优化问题

$$\min_{\{h\}} \left\{ \frac{1}{2} h^T R_{x,N} h \right\} \quad \text{s. t.} \quad \sum_{n=0}^{2N-1-2l} h_n h_{n+2l} = \delta_{l0} \quad (9)$$

其中, $R_{x,N}$ 表示第一列为 $[r_x(0) \ r_x(1) \ \dots \ r_x(N-1)]$ 的 N 阶对称 Toeplitz 矩阵, h 是分析低通滤波器系数构成的向量, δ_{mn} 是 Kronecker 函数。优化问题式(9)可以转化成下面的 LSIP, 这一规划是可以得到最优解的^[2,3]。

$$\min_{\{a\}} \left\{ \frac{r_0}{2} + \sum_{n=0}^{N-1} a_n r_{2n+1} \right\} \quad (10)$$

$$\text{s. t.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2 \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cos[2\pi f(2n+1)] \geq 0 \\ 0 \leq f \leq 0.5 \end{array} \right.$$

其中, $a_n = \sum_{l=0}^{2N-2n-2} h_l h_{l+2n+1}$ 是正交滤波器 h 的乘积滤波器。

方法 2 在双正交滤波器组中选择一个具有最大编码增益的滤波器组作为式(7)的初始滤波器组。常用的双正交滤波器组, 如 bior1.5, bior4.4, bior2.4 等都满足式(3)的无混叠条件, 因此, 可从中选择一个具有最大编码增益的滤波器组作为优化的初始点。

用上边介绍的方法选取初始点后, 用梯度下降法求解优化问题式(7)得到自适应滤波器组。从式(8)可以求得相应的子带编码增益。本文的设计例子利用方法 2 选取初始滤波器组。

4 设计例子

下面采用两个常用的随机序列 AR(1)和 AR(2)作为输入信号, 它们的相关系数如下: (1) AR(1)过程, 相关系数 $r_n = \rho^n, \rho = 0.95$ 。这是一个简单的图像信号模型, (2) AR(2)过程, 极点 $z_{\pm} = \rho e^{\pm i\theta}, \rho = 0.975, \theta = \pi/3$ 。相关系数为 $r_0 = 1, r_1 = (2\rho \cos\theta)/(1 + \rho^2)$, 这一模型常用于描述图像信号的纹理特征。

对于 AR(1)过程, PCFB 的编码增益是 3.9855, 而自适应 IIR 滤波器组的子带编码增益是 6.5001。我们考虑长度为 12 的滤波器组, 在不同比特率下的编码增益如图 2 所示。当 $b=6$ 时, 两个滤波器的幅频响应如图 3 所示。图 3 (a), (b)分别表示低通分析和高通分析滤波器。与文献[6]的结果比较, 当滤波器长度为 12 时, 文献[6]的结果为 4.7237, 而相同长度下, 本文新方法的编码增益都在 4.9591 以上。如果放弃频谱无混叠条件, 那么随着设计自由度的增加, 编码增益还会有一个显著的提高。同已有的具有完全重构约束的自适应滤波器组相比, 放松完全重构条件并允许适当的系统误差, 对于固定的比特率可以减小整体失真, 提高编码增益。

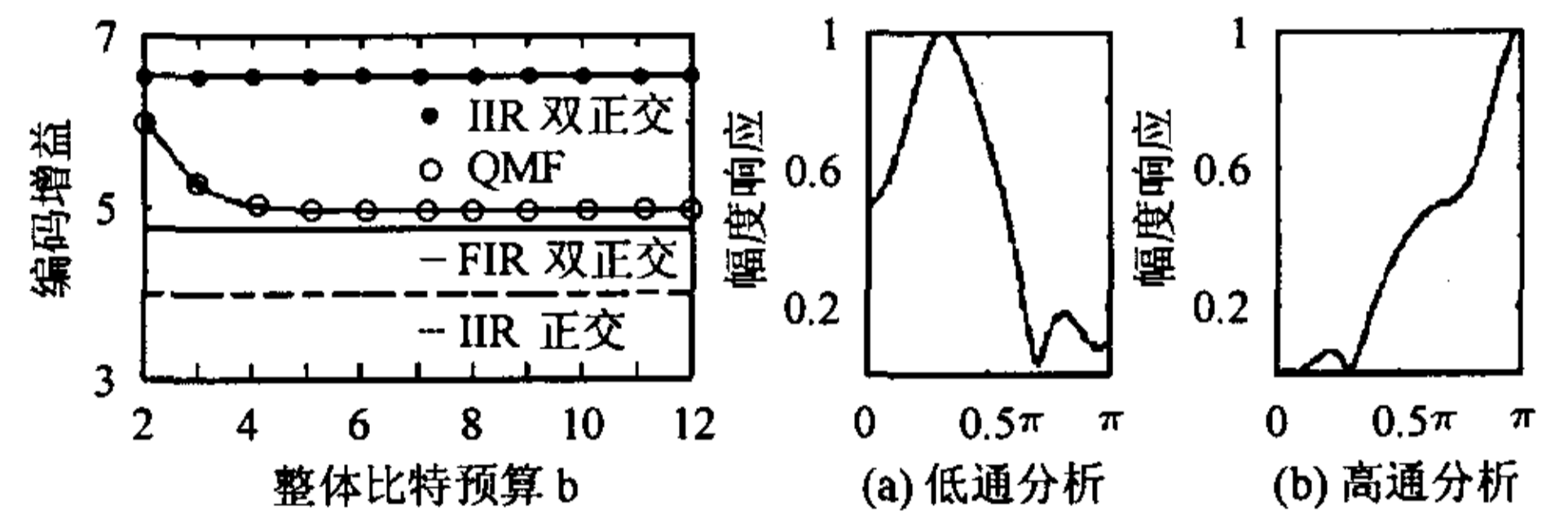


图 2 AR(1)过程各编码增益比较

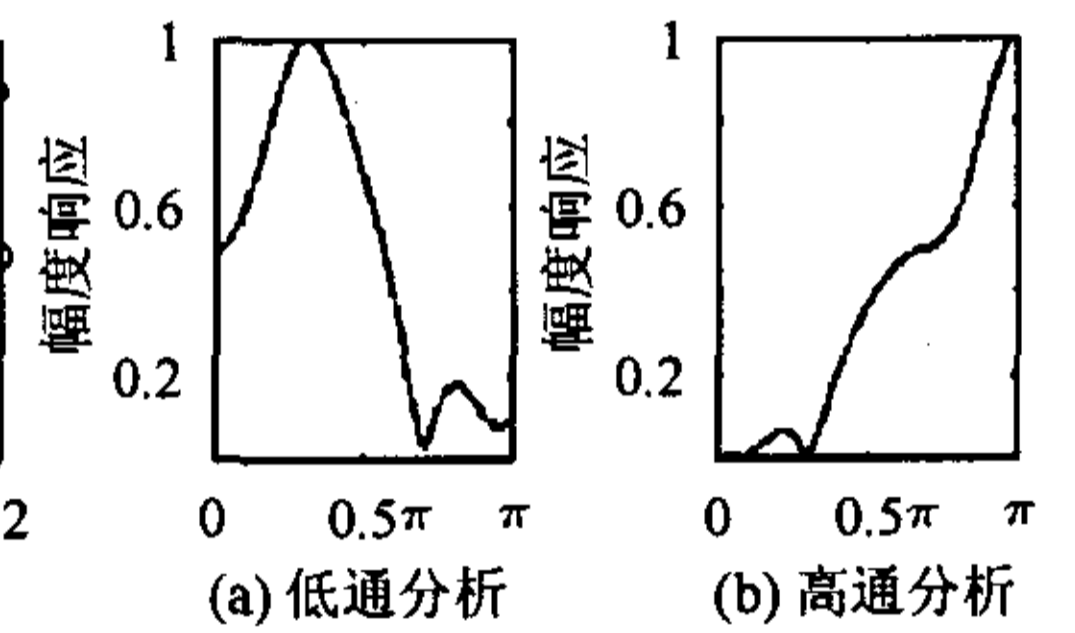


图 3 AR(1)过程的 FIR 滤波器组的幅频响应

对于 AR(2)过程, PCFB 和自适应 IIR 双正交滤波器组的编码增益分别是 5.038 和 8.6913。我们同样考虑长度为 12 的滤波器组, 在不同比特率下的编码增益如图 4 所示。当 $b=6$ 时, 滤波器组的幅频响应如图 5 所示, 图 5 (a), (b)分别表示低通分析和高通分析滤波器的幅频响应。为便于性能比较, 我们考虑 $\theta = \pi/1.25$ 的 AR(2)过程和长度为 8 的滤波器组, 文献[8]的编码增益为 4.3267, 而在量化器的比特率不是太高(每个样本 2-6 bit), 通道间最优比特分配的情况下, 新方法的

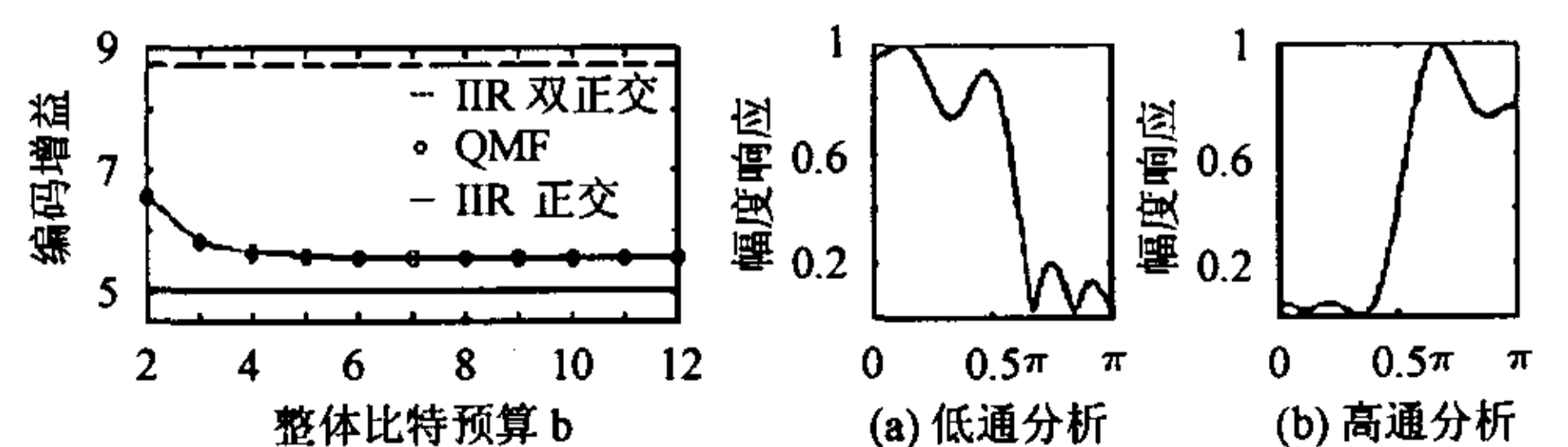


图 4 AR(2)过程各编码增益比较

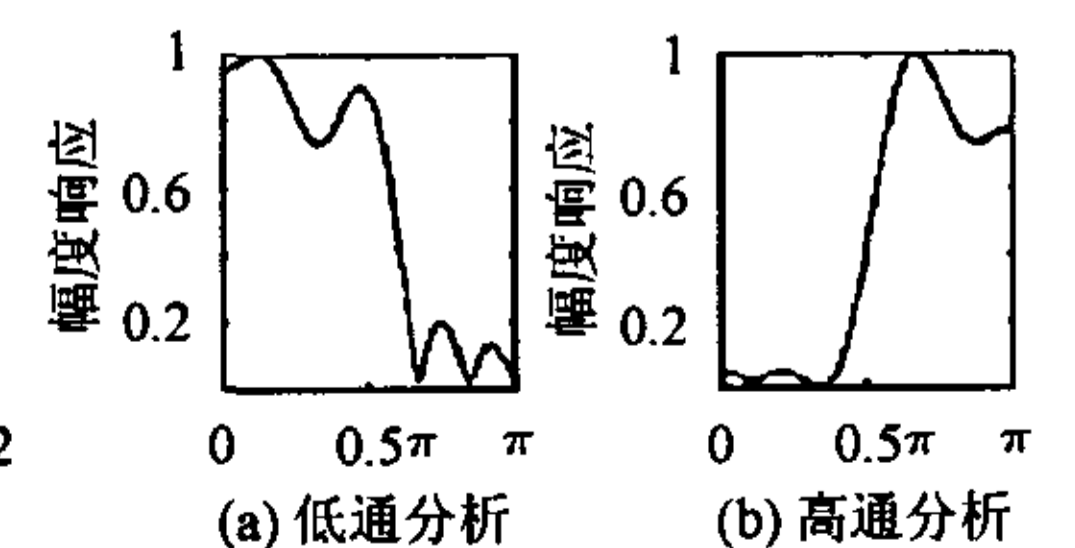


图 5 AR(2)过程的 FIR 滤波器组的幅频响应

子带编码增益有显著的提高。在不同比特率下的编码增益如图6所示。当比特率很高的时候,系统误差与量化误差比较占优势,因而编码性能下降很快;因而,在高比特率(每个样本6-12bit)的情况下,我们可以采用完全重构的方法来设计滤波器组。

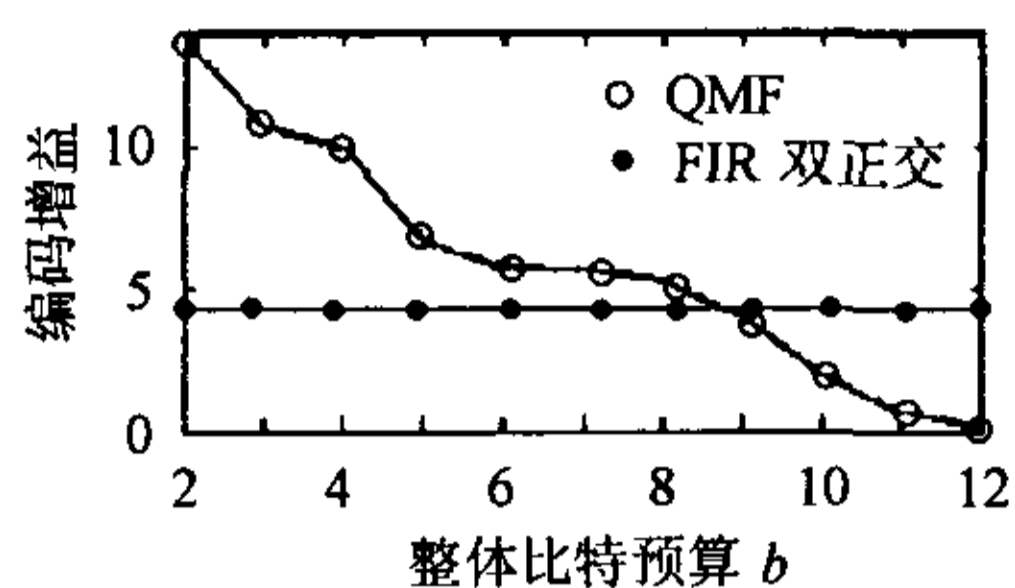


图6 AR(2)过程编码增益比较

5 结果与讨论

本文研究了在无完全重构约束情况下两通道自适应FIR无混叠滤波器组的时域设计方法,并给出了两种初始滤波器组的确定方法。试验结果表明,在比特率不是太高的情况下,较之传统的基于完全重构约束的设计方法,编码增益有显著的提高;而在高比特率条件下,完全重构也不失为一种好的选择。事实上,由于取消频谱混叠,本文中的优化自由度只是文献[8]的一半,即只有分析滤波器组系数作为优化参数。不强制无混叠条件(3),虽然可以有两倍的自由度用于优化设计,可以进一步改善编码性能,但对应的优化问题规模变大,数值计算的难度增加。文中介绍的方法可以推广到多带情况,但优化问题的求解难度较大。

参考文献

[1] Tsatsanis M K, Giannakis G B. Principal component filter banks for optimal multiresolution analysis. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, 43(8): 1766 - 1777.

[2] Moulin P, Anitescu M, Kortanek K O, et al.. The role of linear semi-infinite programming in signal-adapted QMF bank design. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1997, 45(9): 2160 - 2174.

[3] Kirac A, Vaidyanathan P P. Theory and design of optimum FIR compaction filter. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 46(4): 903 - 919.

[4] Vaidyanathan P P, Kirac A. Result on optimal biorthogonal filter banks. *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, 1998, 45(8): 932 - 947.

[5] Moulin P, Anitescu M, Ramchandran K. Theory of rate-distortion optimal, constrained filterbanks-application to IIR and FIR biorthogonal designs. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2000, 48(4): 1120 - 1132.

[6] Shui P, Bao Z. Recursive biorthogonal interpolating wavelets and signal-adapted interpolating filter banks. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2000, 48(9): 2585 - 2594.

[7] Shui P, Bao Z. Signal-adapted recursive interpolating wavelets packets. *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, 1999, 46(12): 1525 - 1528.

[8] Lu W, Antoniou A. Design of signal-adapted biorthogonal filterbanks. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, 2001, 48(1): 90 - 102.

[9] Dembo A, Malah D. Statistical design of analysis/synthesis systems with quantization. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, 1988, 36(3): 328 - 34.

[10] Gosse K, Duhamel P. Perfect reconstruction versus MMSE filter banks in source coding. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1997, 45(9): 2188 - 2202.

[11] Vaidyanathan P P. *Multirate Systems and Filterbanks*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993: 191 - 196.

[12] Mihcaak M K, Moulin P, Anitescu M, Ramchandran K. Rate-distortion optimal subband coding without perfect-reconstruction constraints. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2001, 49(3): 542 - 557.

王兰美: 女, 1975年生, 讲师, 主要从事信号处理和滤波器组的设计问题。

水鹏朗: 男, 1967年生, 教授, 目前主要研究兴趣为: 子波理论及其应用、图像处理和超宽带雷达信号处理。

廖桂生: 男, 1963年生, 教授, 主要从事雷达信号处理方面的研究工作。