

# 高孔岩石中局部变形带的理论和形成条件研究进展

席道瑛, 杜 赟, 李 廷, 徐松林  
(中国科学技术大学, 安徽 合肥 230026)

**摘要:** 近几年在野外和实验室都发现高孔隙岩石中局部化变形的压缩带、剪切带和膨胀带, 是目前岩石力学、岩石物理和本构模型研究的热点之一。基于局部变形带在水利、石油、核废料处置、垃圾处理、环境污染的治理和地质构造、工程地质和岩土工程中的实际意义, 介绍以局部化分岔理论为基础的多孔岩石的压缩带、剪切带的理论、形成条件和判别条件, 以及与压缩带、剪切带和膨胀带相应的临界硬化模量。基于帽子模型, 介绍椭圆形屈服帽上的压缩和剪切带, 以及它们与  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线之间的密切关系。在低围压下的  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线上的第一个零模量点也就是应力平台对应于压缩带, 即为帽子模型的体积屈服面; 继续加载使  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线继续上升到标本产生硬化, 直到  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线上出现第二个零模量点, 也就是  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线的峰值对应于剪切破坏, 此时应力状态处于帽子模型的剪切屈服面上。同时还给出大量不同颗粒尺寸、不同孔隙度砂岩轴对称压缩试验结果, 它们也可用 1/4 椭圆帽子模型来描述。

**关键词:** 岩石力学; 压缩带; 剪切带; 膨胀带; 帽子模型; 分岔理论

**中图分类号:** TU 45

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2008)增 2 - 3888 - 11

## RESEARCH PROGRESS IN THEORY AND FORMING CONDITION OF LOCALIZED DEFORMATION BANDS IN HIGH-POROSITY ROCK

XI Daoying, DU Yun, LI Ting, XU Songlin

(University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China)

**Abstract:** Recently, localized planar zones of deformation have been discovered in high-porosity rock, which are called compaction bands, shear bands and dilation bands. It is one of the most concerned issues in the research of rock physical and constitutive relations. The research of localized deformations has practical significance in the storage of water, oil, nuclear wastes, the disposal of garbage and environmental pollution. It is also helpful for the research of geological structure, engineering geology, and engineering of soils and rocks. The compaction band and shear band theories, based on localized bifurcation, are introduced. The conditions for band formation and discrimination in porous rocks and the critical hardening modulus for compaction bands, shear bands and dilation bands are also introduced. The compaction bands and shear bands on an elliptic yield cap are introduced based on the cap model. They are close related to the  $\sigma$ - $\varepsilon$  curves. Under low confining pressure, the first zero modulus point, i.e. the shelf, corresponds to the compaction band, or the volumetric yield surface of cap model. When loading continues, the  $\sigma$ - $\varepsilon$  curve keeps ascending until the sample hardens. The second zero modulus point in the  $\sigma$ - $\varepsilon$  curve, i.e. the peak of the  $\sigma$ - $\varepsilon$  curve, corresponds to the shear failure, or the shear yield surface of the cap model. Mass experimental results obtained from axisymmetric compression tests on sandstones with different grain scales and porosities can be described by the same cap model.

**Key words:** rock mechanics; compaction band; shear band; dilation band; cap model; bifurcation theory

**收稿日期:** 2007 - 09 - 15; **修回日期:** 2008 - 07 - 30

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(40474065, 40874093)

**作者简介:** 席道瑛(1940 -), 女, 1962 年毕业于成都地质学院地球物理勘探专业, 现任教授、博士生导师, 主要从事岩石物理及本构模型方面的教学与研究工作。E-mail: xdy@ustc.edu.cn

### 1 引言

地壳中普遍存在着不同尺度、不同性质、不同地质部位的局部变形带, 了解这些局部化变形带的发生、发展和演化机制, 对大地构造学以及地壳中发生的各种地质作用过程是最基本的, 也是十分重要的。最早发现的地壳变形带是剪切带。剪切带与地震和一些突发性地质灾害有密切关系, 早已受到广泛关注。近年在野外和实验室的多孔岩石中又发现了压缩带和膨胀带。压缩带源于裂纹、切口和密集的缺陷<sup>[1]</sup>。地壳中存在着大量的多孔岩石, 它们是各种地壳运动的主体, 同时也是流体和矿物的载体。它们的局部化变形带与石油、地下水的储藏、输运以及核废料的长期储藏和天然地震有着密切的关系。所以, 从分叉理论研究高孔隙岩石的局部化变形, 对于理解和认识地壳的变形规律以及地壳中发生的各种地质作用过程、整个岩石圈构造及全球构造动力学方面具有重要的理论与实际意义, 同时, 它使岩石物理学家深刻地体验和认识到地质作用和地壳变形过程与岩石本构模型的密切关系, 启示人们如何将岩石本构运用于实际的地质作用和地壳变形过程。近来, 这种多孔岩石的局部化变形理论已成为岩石物理和岩石动力学的研究热点之一。本文就多孔岩石典型 $\sigma$ - $\varepsilon$ 曲线, 压缩带、剪切带与帽盖模型的关系, 压缩带、剪切带、膨胀带形成和判别条件等方面的研究进展作一介绍。

### 2 多孔岩石的典型 $\sigma$ - $\varepsilon$ 曲线

利用一个简单的一维模型来理解压缩带的形成。在通常的轴对称压缩试验恒定围压下, 多孔 Berea 砂岩的差应力和轴向应变关系见图 1。由图 1 可见, 当曲线从差应力最低处到最高的过程中, 存在一个应力平台(shelf), 平台宽度和岩石被压缩后的孔隙度有关, 并存在孔隙度和有效应力的关系<sup>[2]</sup>。岩石变形试验研究主要集中在两个极端, 脆性剪切局部化和延性变形, 而岩石特别是多孔岩石在脆延转换阶段表现出极复杂的现象。在一系列静水压加载试验中, 得出高孔隙岩石的延性变形源于其颗粒的破碎和孔隙的塌陷, 由于颗粒中固有的微缺陷, 当颗粒受力达到某极限值时, 在受力点附近产生的局部张应力引起颗粒中微裂纹的扩展而导致颗粒破碎, 所以 J. Zhang 等<sup>[3]</sup>认为平台为颗粒压缩和孔隙

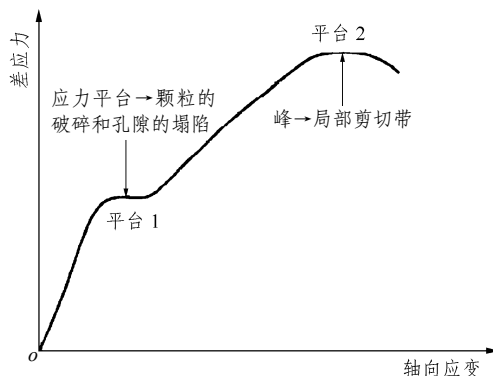


图 1 多孔 Berea 砂岩差应力与轴向应变关系  
Fig.1 Relation between stress difference and axial strain of porous Berea sandstone

崩塌的结果。其压力与体应变曲线示于图 2。在增加静水压力条件下的孔隙砂岩的特征由初始较小的非线性部分压力与体应变曲线反映, 随后线性地倾向拐点。在硬化发生前与材料颗粒压碎和孔隙崩塌发生的期间, 又线性前进至另一拐点。所有样品特性由天然发生的空间变化引起, 可能导致样品的一部分形成压缩带, 而另一部分形成剪切带。可见, 最大差应力和剪切断裂密切相关。J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>提出三轴压缩中的应变局部化发生在最大差应力之后。

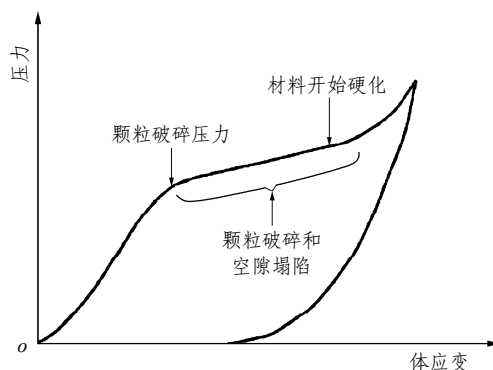


图 2 多孔岩石压力 - 体应变曲线略图  
Fig.2 Sketch of pressure vs. volumetric strain of porous rock

尽管孔隙率减少对轴向位移有明显影响, 但以前的分析仅局限于应力 - 应变关系, 并不考虑微观机制上的变形,  $\sigma$ - $\varepsilon$ 曲线可以表示为差应力  $\sigma_d$  和轴向应变  $\varepsilon_1$  的关系:

$$\sigma_d = \sigma_3 - \sigma_1 = f(\varepsilon_1) \tag{1a}$$

其应力率  $\dot{\sigma}_d$  与应变率  $\dot{\varepsilon}$  关系为

$$\dot{\sigma}_d = E_{\tan}(\varepsilon)\dot{\varepsilon} \tag{1b}$$

式中： $E_{tan}(\varepsilon)$ 为 $\sigma$ - $\varepsilon$ 曲线的正切模量。假设存在一个与内部有关的区域，使下式成立：

$$\dot{\sigma}_d = E_{tan}(\varepsilon^0)(\dot{\varepsilon}^0 + \Delta\dot{\varepsilon}) \quad (2)$$

式中： $\Delta\dot{\varepsilon}$ 为新区域中的应变率增量； $\varepsilon^0$ ， $\dot{\varepsilon}^0$ 分别为初始均匀区的应变和应变率。

假定  $E_{tan}$  在内(新变形区)外(初始均匀区)都是一致的，应变率在内外区域的差为  $\dot{\sigma}_d - \dot{\sigma}_d^0 = E_{tan}(\varepsilon^0)\Delta\dot{\varepsilon}$ ，应力平衡要求  $\dot{\sigma}_d$  (内) =  $\dot{\sigma}_d^0$  (外)，同时对连续均匀变形要求  $\Delta\varepsilon = 0$ ，或对可能的非均匀变形要求  $E_{tan}(\varepsilon^0) = 0$ 。可见，只有当  $E_{tan} = 0$  时，非均匀应变区才会形成，即是说，当模量为 0 时，对应于非均匀应变。有趣的是，零模量出现 2 次，在图 1 中，第一个零模量出现在平台 1 上，一个压缩带发生的地方。显然，压缩是以一种非均匀方式进行的。另一次在与剪切局部区相关的最大差应力平台 2 之处<sup>[3]</sup>。作者巧妙地将局部变形带与零模量联系在一起。

### 3 压缩带和剪切带与帽子模型的关系

一个多孔介质在非流体静压力作用下，导致形变区上显示出带状非均匀性。它在速度场上形成一个平坦的面，这个面上速度连续，速度梯度不连续。两个这样的面之间将压缩为一个形变带<sup>[5]</sup>。

膨胀因子  $\beta = d\varepsilon_v^p/d\gamma^p$ ，其中  $d\varepsilon_v^p$  为非弹性体积应变增量， $d\gamma^p$  为非弹性剪切应变增量。对于  $\beta$ ，膨胀为正，压缩为负<sup>[5]</sup>。A. Aydin 和 A. M. Johnson<sup>[6]</sup> 提出多孔砂岩自然变形理论并扩展了本构方程，其中包括由平均应力引起的弹性体积改变，加上一个非弹性体积模量，并研究了负  $\beta$  (压缩) 的影响，以此预测了非弹性硬化模量，减小  $\beta$  即膨胀降低，会增加硬化模量。J. M. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup> 预测了硬化模量与初始应力轴有关的条带方向，这些预测是介质、硬化模量及应力状态的函数。预测条带的法线与最大压应力之间的夹角为

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \alpha \quad (3)$$

其中，

$$\alpha = \frac{(2/3)(1+\nu)(\beta + \mu) - N(1-2\nu)}{\sqrt{4-3N^2}} \quad (4)$$

$$N = S_2 / \bar{\tau} \quad (5a)$$

$$N_{ij} = S_{ij} / \bar{\tau} \quad (5b)$$

$$\bar{\tau} = \sqrt{(1/2)S_{ij}S_{ij}} = J_2^{1/2} \quad (5c)$$

式中： $S_2$  为中间主偏应力； $\bar{\tau}$  为 Mises 等效应力； $J_2$  为第二偏应力不变量； $\mu$  为屈服面上的局部斜率，可称为内摩擦因数， $\mu = (\partial\bar{\tau}/\partial\sigma)_{min}$ ， $\sigma = P = -\sigma_{kk}/3$ ，以拉伸为正； $S_{ij}$  为偏应力， $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$ ， $\delta_{ij}$  为 Kronecker 符号； $\nu$  为泊松比，随变形增加， $\nu$ ， $\beta$  发生变化； $-1 \leq \alpha \leq 1$ ； $N$  为表示三轴应力状态的参数，其取值范围为  $-1/\sqrt{3} \sim 1/\sqrt{3}$  (由轴对称拉伸变到轴对称压缩)。

G. Perrin 和 J. B. Leblond<sup>[7]</sup> 对 J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup> 的结果进行了修正，利用膨胀因子和内摩擦因数之和，得到的保守边界为  $-\sqrt{3} \leq \beta + \mu \leq \sqrt{3}$ ，要好于 J. W. Rudnicki 和 I. R. Rice<sup>[4]</sup> 给出的  $\beta + \mu = \sqrt{3}/2$  值。为了确定本构参数  $\nu$ ， $\mu$ ， $\beta$ ，以便确定哪个能形成垂直最大应力的条带，式令(3)中  $\theta = 0$ ，则  $\alpha = -1$ ，因为要与普通三轴压缩试验结果相比较，此时  $N = 1/\sqrt{3}$ ，使压缩带条件具有一简单的表达式：

$$\beta + \mu = -\sqrt{3} \quad (6)$$

如果用有效平均应力和有效差应力来表示，低围压与低孔隙率岩石一样，剪切增强压缩初始应力随围压的增加沿 1/4 椭圆帽子屈服面减小。脆-延性转换应力与颗粒破碎应力一样随孔隙度和颗粒尺寸增加而呈指数下降，表明高孔隙度和大颗粒的岩石发生延性变形所需要的应力更小。从式(6)可看出，因常认为  $\mu$  为正，故  $\beta$  为非常大的负值，图 3 即为其关系。通常对低孔隙率岩石  $\mu$  的测量，是为了说明微裂纹及摩擦面与高平均应力下的屈服及正膨胀因子  $\beta$  有关。当材料变形时表现出典型的压缩屈服，存在一个帽子来解释非弹性体积应变屈服。帽子是一个将弹性卸载从连续非弹性体积压缩分开的 一个面<sup>[8]</sup>，笔者认为对高孔隙率砂岩运用带屈服条件的帽子模型来描述是比较合适的<sup>[2]</sup>。图 3 中路径 ABC 显示，三轴应力路径在  $\bar{\tau}$ - $\sigma$  空间中有不变的斜率，在比剪切屈服线较低的有效剪切应力(点 B)上遇到帽子；符合图 1 的  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线中的平台，所以平台处于较低的剪应力处。如果一直加载到点 C，很可能出现剪切破坏<sup>[2]</sup>。注意  $\mu$  作为当前屈服条件下的局部斜率定义的局部理论<sup>[4]</sup>。当应力状态在屈服帽子上时， $\mu$  也可能为负，比如点 B， $\partial\bar{\tau}/\partial\sigma = \mu \leq 0$ 。若应力点沿路由点 B 到 C 时，随应力增大，剪切破裂将很可能开始，认为帽子将发生硬化，引出后继帽子屈服面(见图 4)。以致  $\mu$  从一个低  $\mu_{cap}$  到一个极大的  $\mu_{shear}$ ，有  $\mu_{cap} \leq \mu \leq \mu_{shear}$  (见图 3)。通过点 B，C 之

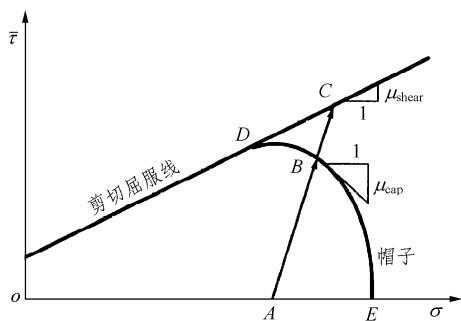


图 3 多孔砂岩的剪切和压缩屈服线

Fig.3 Shear and compressive yield lines of porous sandstone

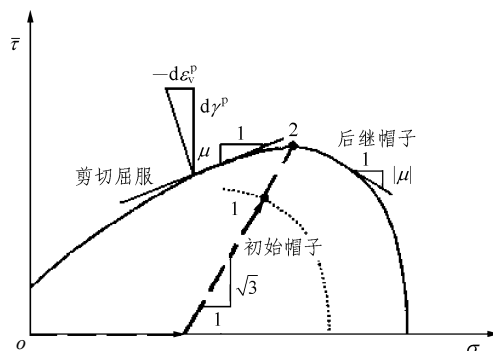


图 4 剪切屈服和体积屈服曲线

Fig.4 Shear and compactive yield surfaces

间的三轴应力路径横穿  $\bar{\tau}$ - $\sigma$  空间, 表示从开始的平台对应第一个压缩屈服到剪切屈服的  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线。剪切屈服的开始通常被定义为一个特殊的塑性剪切应变。因此, 笔者认为这样一个多孔介质的三轴  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线上的零模量点 1 (见图 1) 可以用来定义一个帽子, 即为压缩带, 而第二个零模量点 2 可以定义为剪切带。如图 3 的点 D 是应力状态位于帽子和剪切破坏线的交点处, 该点帽子的斜率近似为 0, 更高的平均应力下,  $\beta$  和  $\mu$  都为增长的负数。 $\mu$  值在屈服帽子面上是负值 (见图 4)。若塑性势有相似形状的帽子,  $\beta$  也可能是负值, 所以  $\beta$ ,  $\mu$  有负值是很可能的。由于差应力的增加,  $\mu$  和  $\beta$  值变成少许负值, 推测剪切屈服面可以向正值方向发展。 $\beta$  和  $\mu$  的负值使  $E_{tan}$  减小, 由于  $\mu$  和  $\beta$  的值适合压缩带, 所以这个应力平台与压缩带的形成在框架上是一致的。压缩带易发生在颗粒尺寸比较均匀的岩石中, 一旦压缩带形成, 岩样将不再均匀。然而压缩意味着密度的增加, 或颗粒尺寸的减小, 压缩带形成可与硬化相关, 剪切带形成与典型的软化相关。一个压缩带的形成导致材料硬化, 并不妨碍随后的剪切局部化。后面将给出压缩和剪切带的临界硬化模量的表达式。这里应力路径相交于剪切包络线 2 (见图 4) 作为剪切局部化的发展; 可见, 这里实际上是通过三轴压缩应力路径横穿  $\bar{\tau}$ - $\sigma$  空间来描述从应力平台即压缩带到应变硬化、剪切带发展到应变软化的过程。这里对应应变硬化到剪切破坏再由剪切带到应变软化发展过程的描述只是一带而过, 如果能结合微观机制进行描述就更具说服力。

#### 4 多孔岩石中压缩带、剪切带和膨胀带的形成条件

(1) 局部化理论的本构关系

分岔现象的研究源于一些力学失稳现象。J. W. Rudnicki 等<sup>[4, 9-12]</sup>先后开始这方面的早期工作, 尝试建立从均匀变形中分化的非单一或分叉的局部变形模型。为了解释脆性岩石剪切带的形成, J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>发展了基于塑性力学的局部化分叉理论。该理论认为在均匀介质中的局部化变形源于其本构关系的不稳定性。假设变形带的法向为  $n$ , 则在变形带产生时, 场外有

$$\Delta v_{ij} = n_j g_i (n \cdot x) \tag{7}$$

式中:  $g_i$  为穿过带域内沿变形带法向的距离函数, 仅在带内为非零数。

速度梯度在带内的局域场与带外均匀场之差:  $v_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$ ,  $v_i$  为速度, 岩石变形带的构成也必须满足连续平衡条件, 这需要拉伸速率在穿过边界带时是连续的:

$$n_i \Delta \dot{\sigma}_{ij} = 0 \tag{8}$$

式中:  $\dot{\sigma}_{ij}$  为柯西应力率, 根据线性增量本构方程, 它是一速率的基本方程:

$$\dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \tag{9}$$

式中:  $\dot{\varepsilon}_{kl}$  为变形速率,  $\dot{\varepsilon}_{kl} = (1/2)(v_{k,j} + v_{j,k})$ ;  $L_{ijkl}$  为对称的模量张量。

最简单的情况下, 带内外的材料行为在带的变形瞬间是恒定的, 变形带外的弹性卸载滞后于非弹性岩层带内外的加载, 由式(7)~(9)可得

$$(n_i L_{ijkl} n_l) g_k = 0 \tag{10}$$

进一步的均匀变形相当  $g_k = 0$  是一种可能的结果, 但作为一替换结果与岩层带内均匀的需要  $g_k$  至少有一个非零也是可能的, 这就需要式(10)中的限定系数为 0, 即要式(9)有非零解, 需系数行列式为

$$\det |n_i L_{ijkl} n_l| = 0 \tag{11}$$

可见式(9)是保证局部化变形带的速度场连续及多种变形带共存并平衡的条件。这种平衡条件要求应力率在通过岩石变形带边缘时保持连续。而速度场的连续则要求变形带内外的应变率差异的张量组分  $n_i g_i$  有对称形式。这个条件约束了带内方位和基本参数, 当它在变形过程中首先出现时, 就可预测会出现带内岩层。

最近 P. Bésuelle<sup>[13]</sup>研究发现, 当矢量  $g$  平行于变形带平面时, 对应于剪切带的情况, 膨胀带和压缩带的出现取决于  $ng$  是正或负。对于压缩带  $g$  与  $n$  同向, 而当  $g$  与  $n$  反向时对应于膨胀带。所以式(11)描述了变形带的构成性质和变形带方位的相互关系。

J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>用包含主剪切力  $\bar{\tau}$  和静水压力  $P$  的基本方程描述了脆性岩石变形特征:

$$d\gamma = \frac{d\bar{\tau}}{G} + \frac{1}{h}(d\bar{\tau} - \mu dP) \quad (12)$$

$$d\varepsilon_v = -\frac{dP}{K} + \frac{1}{h}(d\bar{\tau} - \mu dP) \quad (13)$$

式中:  $d\gamma$  和  $d\varepsilon_v$  分别为剪应变和体应变增量;  $G, K$  分别为弹性的剪切和体积模量。式(12), (13)中等号右边第一项对应弹性状态; 第二项对应非弹性状态, 弹性卸载被忽略, 这里非弹性剪切应变由静水压力  $P$  来抑制它的剪胀量。应力空间屈服面的局部斜率为  $\mu = d\bar{\tau}/dP$ , 可进一步由非弹性响应区分出弹性卸载区。

$\bar{\tau}$  与  $\gamma$  曲线的斜率在恒平均应力  $\sigma$  时, 由  $h_{tan} = h / \left(1 + \frac{h}{G}\right)$  给出, 这里硬化模量  $h$  是在恒定平均应力时  $\bar{\tau}$  与  $\gamma^p$  曲线的斜率, 用来描写硬化行为。则本构关系即可变为

$$d\varepsilon_{ij} = \left[ C_{ijkl} + \frac{1}{h} \left( \frac{S_{ij}}{2\tau} + \frac{1}{3} \beta \delta_{ij} \right) \left( \frac{S_{kl}}{2\tau} + \frac{1}{3} \mu \delta_{kl} \right) \right] d\sigma_{kl} \quad (14)$$

各向同性弹性模量张量为

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2G} \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (15)$$

多孔岩石的试验结果显示, 加载过程中存在一系列弹塑性应力状态。而对弹、塑性区边界上、屈服面上的应力状态, 其变形是非弹性的, 同时弹性区域的尺度和形状是随着非弹性变形而变化的。为了简化, 本文假设屈服面仅仅依赖于应力第一不变量  $I_1$  和偏应力第二不变量  $J_2$ 。

J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>通过假设各向同性

弹性介质对任意应力状态归纳出式(12)和(13), 这样式(9)中的模量张量由下式给出:

$$L_{ijkl} = G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \left( K - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{(GN_{ij} + \beta K \delta_{ij})(GN_{kl} + \mu K \delta_{kl})}{h + G + \mu \beta K} \quad (16)$$

J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>研究的重点在非弹性响应为膨胀的低孔隙度岩石, 非弹性剪应变引起非弹性体应变增加, 但是依据应力状态最早的典型高孔隙岩石压缩试验结果显示出既膨胀又进一步压缩的现象。

对于 Castegate 砂岩, W. A. Olsson<sup>[14]</sup>曾对膨胀系数  $\beta$  得到过负值, 内摩擦因数  $\mu$  有适当的正值、少许的负值。在  $\bar{\tau}$  与  $\sigma$  平面如果有一个“帽子”屈服面, 屈服面的斜率将需要的是负值(见图4)。一个剪切屈服面(相当于  $\mu > 0$ )及一个帽子( $\mu < 0$ )与流体静压力相关<sup>[4]</sup>。这样  $\mu$  为负值是压缩岩石。标准轴对称压缩试验开始受约束力处作一直线与静水压力轴相交成斜率为  $\sqrt{3}$  的直线, 并交于接近主应力轴的帽子上, 推测随围压增高,  $\mu$  值更负, 这一推测被 W. A. Olsson<sup>[14]</sup>在围压达到 250 MPa 的试验所证实。说明根据应力状态对高孔隙岩石的  $\beta$  和  $\mu$  可以从一正值变到负值。而 A. Aydin 和 A. M. Johnson<sup>[6]</sup>所得  $-dP/k$  中的  $k$  为非弹性体积模量(常剪应力下, 平均应力 - 非弹性体应变曲线的斜率), 是用来描述体积硬化效应的。可见, 本文可用有效值  $K^* = Kk/(K+k)$  取代式(13)中弹性体积模量  $K$ ,  $K^*$  为平均应力 - 体积应变曲线的斜率。一般情况下  $-dP/k$  和  $\beta d\gamma^p$  这两项主要都不取决于屈服面上的应力和应力增量方向, 在图4中, 当应力状态位于剪切屈服面上时有  $d\varepsilon_v^p = \beta d\gamma^p$ , 当应力状态位于帽子上和  $dP > 0$  时,  $d\varepsilon_v^p = -dP/k$ 。在局部条件下式(16)中的  $K$  也可用  $K^*$  取代。

若假设非弹性变形仅与应力  $\sigma$  和  $\bar{\tau}$  有关, 则剪切屈服函数<sup>[15]</sup>可写为

$$F(\sigma, \bar{\tau}, \alpha_k) = 0 \quad (17)$$

式中:  $\alpha_k$  为一系列非弹性变形的历史轨迹。简单情况下它可表示为非弹性应变或由一些标量组成的表达式。在一般情况下可以说  $\alpha_k$  是一些内变量, 如微裂纹密度、位错密度或非弹性孔隙度等。如果固定  $\alpha_k$ , 则屈服条件描述为  $\sigma$  和  $\bar{\tau}$  平面内一条屈服线(见图5), 其斜率  $\mu$  为

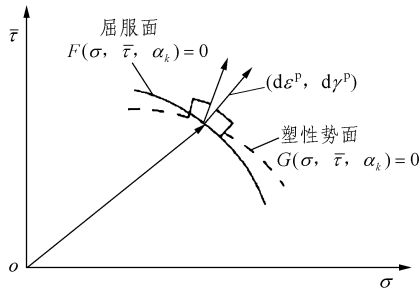


图 5 屈服曲面与塑性势面

Fig.5 Yield surface and plastic potential surface

$$\mu = -\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right) / \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\tau}}\right) \quad (18)$$

当应力状态在剪切屈服面上时, 非弹性变形增量假定用塑性式  $\Gamma(\bar{\tau}, \sigma, \alpha_k)$  来表示(见图 5):

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \left( \frac{s_{ij}}{2\bar{\tau}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\tau}} - \frac{1}{3} \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma} \delta_{ij} \right) \quad (19)$$

式中:  $d\lambda$  为一个非负的标量因子。

式(19)意味着非弹性体积应变增量可以与非弹性有效剪切应变增量联系:

$$d\gamma^p = (2de_{ij}^p de_{ij}^p)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

式中:  $de_{ij}^p$  为  $d\epsilon_{ij}^p$  的偏分量。这里的膨胀因子  $\beta$  为

$$\beta = -(\partial \Gamma / \partial \sigma) / (\partial \Gamma / \partial \bar{\tau}) \quad (21)$$

为了保证应力状态始终在屈服面上,  $\alpha_k$  必须与非弹性应变一起不断的改变, 因此必须满足:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \bar{\tau}} d\bar{\tau} + \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} d\alpha_k = 0 \quad (22)$$

对于一个与率无关的本构关系来说,  $\alpha_k$  的变化与塑性应变增量  $d\epsilon_{ij}^p$  成线性关系:

$$d\alpha_k = \Phi_{ij}^k(\bar{\tau}, \sigma, \alpha_\xi) d\epsilon_{ij}^p \quad (23)$$

将式(19)代入式(23), 再将结果代入式(22), 解得  $d\lambda$  后, 再将结果代入式(19)取得服从塑性应变增量的表达式:

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{H} \left( \frac{s_{ij}}{2\bar{\tau}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\tau}} - \frac{1}{3} \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma} \delta_{ij} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{\tau}} d\bar{\tau} + \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma \right) \quad (24)$$

式中:  $H$  为塑性硬化模量, 其表达式为

$$H = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \Phi_{kl}^k(\bar{\tau}, \sigma, \alpha_\xi) \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{ij}} \quad (25)$$

J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>在研究剪切局部化

变形发生条件时, 用了  $\partial F / \partial \bar{\tau} = \partial \Gamma / \partial \bar{\tau} = 1$  的框架。与 D. J. Holcomb 和 J. W. Rudnicki<sup>[16]</sup>在对 Tennessee 大理岩进行的围压从 0~100 MPa 的轴对称压缩试验中所用框架相同, 仅将非弹性剪应变增量  $d\gamma^p$  作为  $\alpha_k$  的唯一参量来表征大理岩的塑性历史。

由于 J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>的关注点在低孔隙膨胀性岩石的剪切局部化变形特性上, 因此要求屈服面的局部斜率  $\mu$  和膨胀系数  $\beta$  的值均为正。这时屈服面在静水压力轴  $\sigma$  上是不闭合的, 而且不会出现因静水压力引起的非弹性变形。这显然不太符合高孔隙岩石  $\mu, \beta$  存在负值的情况, 所以 J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>的理论对高孔隙岩石来讲存在一定的局限性。当考虑到  $\mu$  和  $\beta$  的值可能为负时, 方程可以应用于屈服面在  $\sigma$  轴上闭合, 且非弹性体积应变是压缩状态(如同高孔隙压缩岩石)。本文认为, 对于这些岩石仅用塑性剪应变  $\gamma^p$  作为应变历史  $\alpha_k$  的唯一参数来表征非弹性应变是不太合适的, 因为屈服面有可能演化出非弹性体积应变或孔隙度的非弹性部分。

J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>采用的框架在研究纯静水压力时也遇到了困难。在  $\bar{\tau} = 0$ (屈服线斜率是铅锤的)时, 对称的  $\partial F / \partial \bar{\tau}$  (类似的  $\partial \Gamma / \partial \bar{\tau}$ ) 也必须为 0。此外微观结构观察结果<sup>[17]</sup>显示, 低孔隙度膨胀性岩石(微裂纹的产生和生长)和高孔隙度压缩性岩石的(孔隙塌陷、颗粒裂开并压碎的非弹性变形)有着不同的力学机制, 而这两种不同的破坏机制有可能观察到存在两个互相独立的屈服面形式。作者对这一观察结果是通过在屈服面上引入一个“帽子”来实现的, 称为“帽子模型”。该模型是用一个与平均应力轴垂直相交的 1/4 椭圆来近似的。现被广泛用于描述高孔隙度岩石的压缩行为<sup>[2, 14, 18]</sup>。K. A. Issen 等<sup>[19, 20]</sup>用了一种特殊的本构框架来表示帽子屈服面:  $\partial F / \partial \bar{\tau} = \partial \Gamma / \partial \bar{\tau} = 1$ , 用塑性应变  $\epsilon^p$  作为唯一的参数来表征塑性应变的历史。该方程提供了静水压力下的非弹性体积应变的计算方法。这里虽然也仅用一个参数表征塑性应变历史, 但  $\epsilon^p$  应包括  $\epsilon_v^p$  和孔隙度的非弹性应变, 比 J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>所取参数  $\alpha_k$  更合适。

(2) 剪切和压缩带形成条件<sup>[19-22]</sup>

将式(16)中模量张量代入式(11), 解出随应力状态变化的剪切局部化发生的临界硬化模量为

$$h = \frac{(Gn_i N_{ij} n_j + \beta K)(Gn_k N_{kl} n_l + \mu K)}{\frac{4}{3} G + K} +$$

$$G[(n_i N_{ij} n_k N_{kj}) - (n_i N_{ij} n_j)^2] - (G + \mu\beta K) \quad (26)$$

由于  $h$  随着潜在局部变形平面的方位而变化, 随非弹性连续变形而减少, J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup> 提出局部判据首先满足的方位是  $h$  最大值的屈服面。

如果  $n_k$  ( $k = I, II, III$ ) 中有一个为 0, 最大硬化模量由  $n_{II} = 0$  给出, 则带的平面包含中间主应力的方向, 临界硬化模量也是轴对称加载时剪切带发生的临界硬化模量  $h_{cr}$ , 其表达式<sup>[4]</sup>为

$$\frac{h_{cr}}{G} = \frac{1+\nu}{9(1-\nu)}(\beta - \mu)^2 - \frac{1+\nu}{2} \left[ N + \frac{1}{3}(\beta + \mu) \right]^2 \quad (27)$$

其中,

$$N = N_{II} = S_{II} / \bar{\tau}$$

J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup> 曾预测过垂直带和最小主应力间的夹角  $\theta$  (见式(3), (4)), 由于  $h$  是随正在发生的非弹性变形单调减小的, 因此式(27)给出了满足剪切带发生条件下的第一个  $h$  值, 即满足下式<sup>[7]</sup>时剪切带有可能发生:

$$(1-2\nu)N - \sqrt{4-3N^2} \leq \frac{2}{3}(1+\nu)(\beta + \mu) \leq \frac{1}{3}(\beta + \mu) - \frac{(1-2\nu)N + \sqrt{4-3N^2}}{2(1+\nu)} \quad (28)$$

G. Perrin 和 J. B. Leblond<sup>[7]</sup> 作出  $n_I^2 \geq 0$  与  $n_{III}^2 \geq 0$  条件下的结果,  $n_k$  也能通过式(3)中的带角  $\theta$  的要求或  $\alpha$  满足于  $-1 \leq \alpha \leq 1$  获得。式(27)仅有  $n_k = 0$  时是合理的, 且在式(27)和(28)中给出了最大硬化模量, 在  $n_I^2 \geq 0$  与  $n_{III}^2 \geq 0$  的范围之外是不合适的。如果  $n_k$  中有两个为 0, 第三个不变, 带是垂直于主轴的。G. Perrin 和 J. B. Leblond<sup>[7]</sup> 给出的临界硬化模量值可通过引入  $n_k$  值进入式(26)得到, 对带垂直于最大(最大拉力)或最小(最大压力)主应力而获得  $h$  的最大值, 最大主应力可依靠  $N$  是大于或小于  $(K/G) \cdot (\beta + \mu)$  而获得。这里重叠部分的范围与  $\beta + \mu$  的值, 满足式(28),  $h$  的值比式(27)给出的值小。当式(28)左边不成立时, 带垂直最大压应力主轴, 压缩带可能产生, 这样临界硬化模量由下式<sup>[20]</sup>给出:

$$\frac{h_{cr}^{III}}{G} = \frac{1+\nu}{9(1-\nu)}(\beta - \mu)^2 - \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ \frac{1}{2}N_{III} - \frac{1}{3}(\beta + \mu) \right]^2 - \left( 1 - \frac{3}{4}N_{III}^2 \right) \quad (29)$$

后者通过相同的表达式由  $N_I$  取代  $N_{III}$ 。正如 G.

Perrin 和 J. B. Leblond<sup>[7]</sup> 所述, 式(27)和(29)以及由  $N_I$  取代  $N_{III}$  的相应式是连续的, 那时, 式(28)左边接近为等式, 剪切带的角度接近  $0$  ( $\theta \approx 0^\circ$ ), 对  $h_{cr}^k$ , 式(27)和(29)是相等的, 这样剪切带和压缩带凝结在一起。若式(28)右边不满足时, 带垂直于最大拉应力, 主轴方向上的膨胀带就可能产生, 其临界模量由  $N_I = S_I / \bar{\tau}$  取代式(29)中的  $N_{III}$ , 膨胀带的角度是  $90^\circ$ 。

图 6 概括了不同情况下  $\mu + \beta$  值的范围, 不等式(28)的左右端被作为偏应力状态参数  $\sqrt{3}N$  的函数表示在图上(实际曲线  $\nu = 0.2$ )。在不等式(28)成立的中间区域, 剪切带的最大临界硬化模量  $h$  由式(27)给出; 在其下面的区域,  $\mu + \beta$  的值小于式(28)中的下限值; 其局部化相当于压缩带由式(29)给出临界  $h$  值; 上面的区域  $\mu + \beta$  的值超出式(28)中的上限值, 可预测膨胀带, 膨胀带垂直最大拉应力。

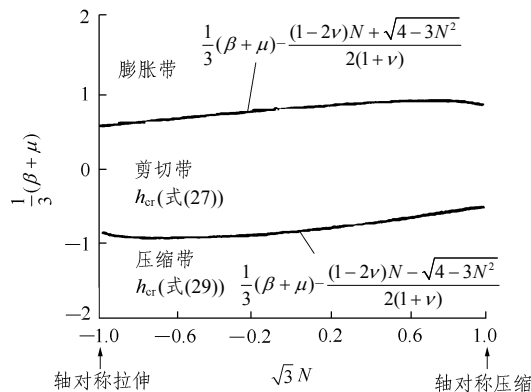
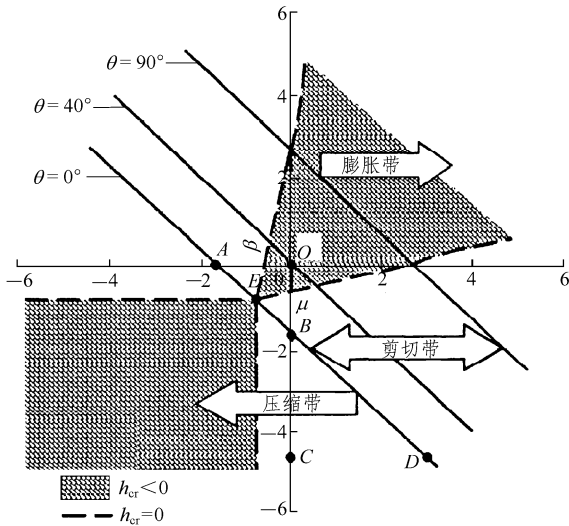


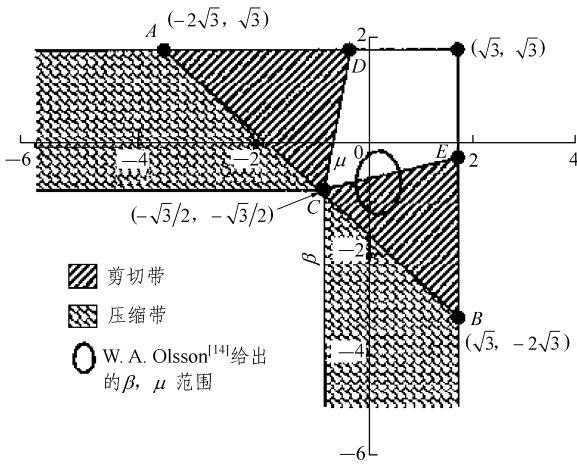
图 6 用  $\beta$ ,  $\mu$  和  $N$  预测局部变形带  
Fig.6 Prediction of localized deformation

图 7(a)为轴对称压缩结果的描述, 图中显示  $h_{cr}$  为正值, 3 个带的每一个带的方位,  $\beta$  和  $\mu$  被预测产生的值和区域, 由图可见,  $40^\circ$  的剪切带  $\mu + \beta$  与压缩带的  $\mu + \beta$  值有显著的不同。剪切带的  $\mu$ ,  $\beta$  正负交替出现; 压缩带的  $\mu$ ,  $\beta$  均为负。图 7(a)的三角形  $AOB$  中, 当应力状态位于帽子上  $\mu$  和  $\beta$  小于 0 时, 剪切带是可能的。在三角形  $CBD$  中, 当  $\mu > 0$ ,  $\beta < 0$ , 对应的剪切包络线与帽子相交时, 压缩带是可能的。然而, 在较高围压时, 加载路径应该与帽子相交, 推测结果  $\mu$  的值更负,  $\beta + \mu \leq -\sqrt{3}$  满足压缩带条件, 轴对称压缩是最有利于压缩带形成的应力状态。此外, J. W. Rudnicki 等<sup>[4, 15]</sup> 详细介绍了田纳西大理岩本构框架方面的应用, 对于低孔隙度岩石  $\mu$  和  $\beta$  随变形均匀的程度可能有相当大的变化。  $h_{cr}^{III}$  最大值出现在轴对称压缩, 如果

$$\mu + \beta \leq 2\sqrt{3}(1-2\nu)/(1+\nu) \quad (30)$$



(a) 用轴对称压缩的  $\beta$  和  $\mu$  预测带的方位



(b)  $\beta$ - $\mu$  平面内压缩带和剪切带的分布(含 W. A. Olsson<sup>[14]</sup> 的试验结果,  $\nu = 0.2$ )

图 7 变形带方位预测及压缩带、剪切带分布

Fig.7 Prediction of deformation bands direction and distribution of compaction band and shear band

则有

$$N = N_I = 1/\sqrt{3}, \quad N_{III} = -2/\sqrt{3}$$

可见式(29)可简化为

$$\frac{h_{cr}^{III}}{G} = -\frac{(1+\nu)}{3(1-\nu)} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\mu \right) \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\beta \right) \quad (31)$$

显然式(31)表明, 当  $\mu < -\sqrt{3}/2$  或  $\beta < -\sqrt{3}/2$ , 压缩带被预测出现在点 E(见图 7(a)). 对于轴对称压缩利用 Mohr 圆的方法证明式(28)在

$$-\sqrt{3} \leq \beta + \mu \leq \sqrt{3} \frac{2-\nu}{1+\nu} \quad (32)$$

时成立. 这样当  $\beta + \mu \leq \sqrt{3}$  可预测压缩带出现, 而且相应的临界硬化模量由式(31)给出. 对于轴对称

压缩  $\beta$  的值域说明侧向变形非弹性增量是负的即压缩状态. 虽然硬化模量  $h$  不能直接观察到, 但是差应力 - 非弹性轴向应变曲线的斜率  $E_p$  仍可给出其表达式<sup>[23]</sup>:

$$E_p = 9h/[(\sqrt{3} - \beta)(\sqrt{3} - \mu)] \quad (33)$$

当  $\mu > \sqrt{3}$  时,  $\bar{\tau}$ - $\sigma$  平面内屈服平面的斜率超过了轴对称压缩应力路径的斜率, 因此非弹性形变将不可能出现, 当  $\beta > \sqrt{3}$  时, 轴向应变的非弹性增量将是可增长的, 这与轴对称压缩的假设又将产生矛盾. 因此,  $E_p$  和  $h$  在物理意义上具有相同的有效  $\beta$  和  $\mu$  的值域.

W. A. Olsson<sup>[14]</sup>对 Castlegate 砂岩的观察结果表明  $E_p$  是正的, 因此  $h$  也是正的. 图 7(b)给出了  $\beta$ - $\mu$  平面内压缩带(鱼鳞区域)和剪切带(斜线区域)发生的分布情况( $h_{cr}$  为正)以及  $\beta$  和  $\mu$  都必须小于  $\sqrt{3}$  的条件. 线段 AB 对应于不等式(28)左边的部分以及图 6 中剪切带的下边界:

$$\beta + \mu = -\sqrt{3} \quad (34)$$

W. A. Olsson<sup>[14]</sup>给出的  $\beta$  和  $\mu$  的值(图 7(b)中小椭圆)满足不等式(28)中剪切带出现的情况. 因此, 他预测仅仅应该出现剪切带, 但是观察结果显示同时发现了剪切带和压缩带的存在, 可见与理论预测存在矛盾.

一开始 J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>就将适用低孔隙膨胀岩石的分岔理论引入高孔隙岩石局部化变形带的讨论中, 并忽略了当模型参数  $\beta$  或  $\mu$  为负值的情况, W. A. Olsson<sup>[14]</sup>注意到这种情况的重要性, 但是他也没有给出局部化变形带形成的确切条件. 后来 W. A. Olsson 将这一研究工作延伸并重新检查了 J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>的理论框架, 在 K. A. Issen 等<sup>[19, 22, 24]</sup>的一系列工作中才给出了完整的局部化变形带的形成条件和判别条件, 分别对应于 3 种变形带: 剪切带、压缩带、膨胀带. K. A. Issen 和 J. W. Rudnicki<sup>[20]</sup>的局部化变形理论中的判别条件只讨论了  $\mu + \beta$  的值域以及  $\mu$  和  $\beta$  各自的取值范围, 而不能体现  $\mu$  和  $\beta$  之间的关系, 仅用  $\beta + \mu = -\sqrt{3}$  给出边界条件, 而忽略了加载过程中  $\mu$  和  $\beta$  的相互影响; 同时, 根据试验数据用给出的模型计算  $\mu$  和  $\beta$  的计算方法很复杂. 当不等式(32)左边不满足时, 压缩带便产生, 很显然, 若屈服面有一帽子,  $\beta$  和  $\mu$  有足够的负值, 压缩带就可能出现. 因为 W. A. Olsson 用式(27)和(29)估算局部化的可能性, 发现关于轴对称压缩仅在式(32)的下限才可能出



现, 一般情况为式(28)。这里已经论证了对有代表性的压缩岩石及  $\beta$ ,  $\mu$  为负值范围的压缩带是能够出现的。如果不等式(32)的右边不满足时, 膨胀带成为可能。

以上理论与试验结果比较发现也存在一些明显的矛盾之处, 当然这也是由于上述的讨论中仅考虑了岩石的剪切屈服条件。剪切屈服是低孔隙岩石中普遍的屈服条件, 而高孔隙岩石中出现的剪切增强压缩是属于压缩屈服的范畴<sup>[26]</sup>。针对上述现有模型的不足, 本文暂不考虑塑性历史  $\alpha_k$ , 而认为屈服函数  $F$  仅仅是  $\sigma$  和  $\tau$  的函数, 并以一个椭圆帽子与用圆来简化的塑性势能函数相切, 以此对 J. W. Rudnicki 和 J. R. Rice<sup>[4]</sup>模型进行分析, 得到局部化变形带的简化判别条件, 通过数值计算结果预测了产生压缩带、剪切带的  $\beta$ ,  $\mu$  值域范围, 其结果与 K. A. Issen 和 J. W. Rudnicki<sup>[20]</sup>关于压缩带和剪切带发生的条件及产生的顺序的判定是一致的, 证明了本文的简化模型的正确性和合理性。本文在改进和放宽限定条件后, 得到了关于剪切带、压缩带和膨胀带的发生条件的判定关系及临界模量, 并对 2 种模型进行了比较, 简化模型较直观, 在实际应用中较方便<sup>[27]</sup>。看来要彻底解决这些矛盾可能需在理论方面引进高孔隙岩石的主要变形机制, 来缓解或改善适用于低孔隙岩石的分岔理论给现有模型带来的不足。K. A. Issen<sup>[19]</sup>还进一步考虑了剪切和压缩 2 个屈服面同时活动时的局部化变形条件。2 个屈服面同时活动时的本构关系依然用式(14)表示, 压缩屈服用帽子模型时, 其中的  $\beta$ ,  $\mu$  均可为负, 两个屈服面同时活动时可以通过将 2 个本构关系的应变增量简单相加得到。这时情况变得很复杂, 很难获得变形带发生条件的解析解。不过要获得极限情况下的解相对要简单得多, 此时理论预测值与试验结果也较为吻合<sup>[26]</sup>。为了深入了解不同边界条件下压缩带的形成机制, R. Katsman 等<sup>[28]</sup>进行了高孔隙度沉积岩中压缩带的数值模拟, 材料的无序性和弹性不匹配都会改变压缩带的形成位置。在没有材料无序性的情况下, 压缩带主要由弹性不匹配主导, 并促使形成的压缩带由样品边界开始向标本内部的传播离散模式, 并产生硬化。当材料的无序性比较大时, 压缩带形成的位置转移到了样品内部, 压缩带形成均一的前缘推进模式。当材料无序性更大时, 样品内部会产生扩散压缩带。

若将材料的脆性或延性破坏的起始点统称为屈服点, 而与此点对应的应力状态称为屈服条件, 则脆性变形中最大差应力点、延性变形中剪切增强

压缩的起点和静水压条件下颗粒破碎起点就是在不同条件下材料的屈服点。这些屈服点在应力空间中构成的包络线称为剪切屈服面<sup>[27]</sup>。结合应力 - 应变曲线、声发射曲线和体应变曲线, 可以获得每个试验中样品的屈服点。T. F. Wong 等<sup>[29, 30]</sup>对大量不同颗粒尺寸、不同孔隙度的砂岩进行的试验表明, 低围压下岩石处于脆性破坏阶段, 在  $q$ - $P$  空间的屈服条件满足 Mohr-Coulomb 剪破裂准则(见图 8, 其中实心符号表示处于弹性阶段, 空心符号表示处于塑性阶段), 其中  $q = \sigma_1 - \sigma_3$ ,  $q$  和  $P$  表现为正线性相关; 而当岩石处于延性变形时, 屈服应力  $q$  与  $P$  呈负相关。图 8 为静水压  $P_c$  归一化之后的结果, 也同样可用 1/4 椭圆帽子模型来拟合。显然 2 种不同破坏机制的公切点附近就是岩石脆 - 延性转换的阶段。脆 - 延性转换点通常在  $q = P_c/2$  附近。K. A. Issen 和 J. W. Rudnicki<sup>[20]</sup>认为在此处 2 种屈服面的包络线相切而形成局部极值, 其公切点的斜率  $dq/d\sigma = 0$ 。

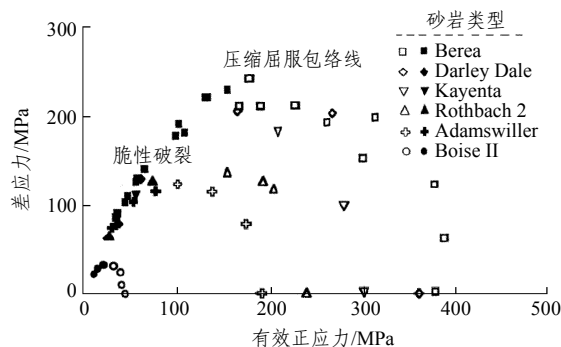


图 8 砂岩样品屈服点试验  
Fig.8 Yield experiments of different sandstones

J. W. Rudnicki<sup>[31]</sup>用分叉理论还分析了轴对称各向异性岩石中剪切带和压缩带的形成条件。直到最近分岔理论所预测的膨胀带, 才在野外被观测到<sup>[32]</sup>。膨胀带与压缩带相反, 发生在垂直于最小主应力方向, 且孔隙度明显大于周围岩石。

### 5 讨论

多孔岩石轴对称压缩的差应力与轴向应变曲线的斜率  $E_{tan}$  可由有关本构参数<sup>[33]</sup>给出:

$$E_{tan} = \left[ \frac{1}{2G(1+\nu)} + \frac{1}{3h} \left( 1 - \frac{\beta}{\sqrt{3}} \right) \left( 1 - \frac{\mu}{\sqrt{3}} \right) \right]^{-1} \quad (35)$$

A. Agdin 和 A. M. Johnson<sup>[6]</sup>通过引进一个与平均应力轴垂直相交的帽子来改进的本构模型, 适用于流体静压力引起的非弹性压缩。它用有效弹性模

量值  $K^*$  取代弹性体积模量  $K$ , 这样在局部变形条件式(27)~(32)中的泊松比  $\nu$  可用有效泊松比  $\nu^*$  来代替, 其定义为

$$\nu^* = \frac{3K^* - 2G}{2(3K^* + G)} \quad (36)$$

由于非弹性体积模量  $k$  很可能小于弹性体积模量  $K$ ,  $K^* = k$ ,  $K^* \ll G$ , 则  $\nu^* \rightarrow -1.0$ , 剪切带硬化模量的临界值式(27)将趋近于 0。轴对称压缩就对应于  $h_{cr}^m/G \rightarrow 0$ , 变形带带角  $\theta \rightarrow 0$ ; 轴对称拉伸对应于  $h_{cr}^l/G \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow 90^\circ$ 。这样, 由平均应力引起的非弹性压缩趋向于降低临界硬化模量  $h_{cr}^m$ , 这就将促进压缩局部化的出现。此外, 因  $\nu^* \rightarrow -1.0$ , 剪切带的临界硬化模量  $h_{cr}^m \rightarrow 0$ , 带角退化: 对于轴对称压缩, 纯剪切及轴对称拉伸要求带角分别是  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  和  $90^\circ$ 。在许多多孔砂岩中, 无论是颗粒压碎段或非弹性体应变导致负的  $\nu^*$  值均小于典型的观测值  $\nu$ 。这就导致用  $\nu^*$  计算  $h_{cr}^m$  比用  $\nu$  更接近于 0, 更便于压缩带的形成。

下一步的理论和试验两方面的工作都需要着重了解和预测压缩带和剪切带的形成条件以及它们之间的关系, 更进一步从微细观机制方面研究压缩带和剪切带的转换关系, 由于岩石特征的多样化, 其中矿物组成、颗粒排列方式、自身缺陷等等许多因素将对岩石产生局部化变形带有重大影响, 由于受试验条件和手段的限制, 目前对这些影响因素的权重和影响方式还不得而知。这些有关机制方面的研究应该结合塑性力学、材料力学、微观固体力学进行分析, 是后续研究工作的重点。由于压缩带相对于周围岩石具有较低的孔隙度, 同时由于压缩带的发生方向垂直最大主应力并可能与剪切带伴生, 这对确定地应力方向和地震发生过程的研究可能具有指导意义。

## 6 结 论

压缩带是很重要的结构, 由于它能减小孔隙度和降低渗透率并阻止液体流进其他孔隙岩石, 因而能储藏液体。对石油工业、水利和核废料储藏、垃圾处理、环境污染的治理等有实际应用价值。尤其岩石的局部化变形带在地球科学、大地构造、全球动力学、岩土工程、资源环境等方面占据着至关重要的位置。压缩带的发现又彻底改变了局部化变形带产生方向的传统观念, 它是岩石在脆-延转换阶段出现的局部化变形现象。它作为世界性的难题引起了地球动力学、岩石物理学、岩石力学学者的极

大兴趣。

本文着重介绍了 J. W. Rudnicki 等的研究工作。J. W. Rudnicki 等为研究剪切带发生条件将分岔理论引入高孔隙岩石的局部化变形, W. A. Olsson 等通过对 J. W. Rudnicki 等建立的帽子本构模型加以改进, 重点介绍了椭圆形屈服帽子上的压缩带和剪切带, 以及以局部化分岔理论为基础的高孔隙岩石的压缩带、剪切带, 得到它们的本构关系和临界硬化模量。并用膨胀系数  $\beta$ 、屈服面斜率即内摩擦因数  $\mu$  和应力状态指数  $N$  以及仅用  $\beta$ ,  $\mu$  预测了压缩带、剪切带和膨胀带的方位以及相应的临界硬化模量表达式。当  $\beta + \mu \leq -\sqrt{3}$  时, 为产生压缩带区域, 压缩带方位  $\theta = 0^\circ$ ; 当  $-\sqrt{3} \leq \beta + \mu \leq \sqrt{3} \frac{2-\nu}{1+\nu}$  时, 为产生剪切带区域, 剪切带方位为  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ; 当  $\beta + \mu > \sqrt{3}(2-\nu)/(1+\nu)$  时, 为产生膨胀带区域, 膨胀带方位为  $90^\circ$ 。

高孔隙砂岩非弹性体应变的压缩和非弹性变形与屈服帽子模型应力状态相关, 在  $\bar{\tau}-\sigma$  空间横穿屈服面帽子的轴对称压缩应力路径和帽子的交点 1, 是在比剪切屈服应力低的有效剪切应力处与帽子相交的, 与在高孔隙砂岩轴对称压缩加载下的应力-应变曲线观测到的应力平台相符, 它是  $\sigma-\varepsilon$  曲线上出现的第一个零模量点, 为压缩带发生的区域, 与岩石的颗粒破碎和孔隙崩塌相关, 所以应力路径横穿帽子,  $\mu < 0$  时, 可形成压缩带; 继续加载使这个路径脱离帽子至剪切屈服面, 甚至达到峰值应力点 2, 它是  $\sigma-\varepsilon$  曲线上出现的第二个零模量点, 为剪切带发生的区域, 说明  $\sigma-\varepsilon$  曲线的峰值与剪切破裂有关, 当应力路径, 与剪切包络线相交时,  $\mu > 0$ , 可以形成剪切带, 并发生硬化, 引出后继屈服帽子。可见, 用帽子模型能巧妙地描述剪切带、压缩带及其与  $\sigma-\varepsilon$  之间的关系。这将促进本构模型, 尤其是椭圆帽子模型在试验研究和地壳变形过程中的实际应用。显然本文对这方面研究工作的介绍将推动岩石本构模型的发展和应用。

## 参考文献(References):

- [1] KATSMAN R, AHARONOV E. A study of compaction bands originating from cracks, notches, and compacted defects[J]. Journal of Structural Geology, 2006, 28(3): 508 - 518.
- [2] WONG T F, SZETO H, ZHANG J. Effect of loading path and porosity on the failure mode of porous rocks[J]. Applied Mechanics Reviews, 1992, 45(8): 281 - 293.
- [3] ZHANG J, WONG T F, DAVIS D M. Micromechanics of pressure-

- induced grain crushing in porous rocks[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1990, 95(B1): 341 - 352.
- [4] RUDNICKI J W, RICE J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1975, 23: 371 - 394.
- [5] HILL R. Discontinuity relations in mechanics of solids[C]// *Progress Solid Mechanics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1961: 245 - 276.
- [6] AYDIN A, JOHNSON A M. Analysis of faulting in porous sandstones[J]. *Journal of Structural Geology*, 1983, 5(1): 19 - 31.
- [7] PERRIN G, LEBLOND J B. Rudnicki and Rice's analysis of strain localization revisited[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, 60(4): 842 - 846.
- [8] SANDIER I. The cap model for static and dynamic problems, in *Site Characterization*[C]// BROWN W S, GREEN S J, HUSTRULID W A ed. *Proceedings of the 17th United States Symposium on Rock Mechanics*. [S.l.]: [s.n.], 1976: 1 - 11.
- [9] RAPPAZ J. Numerical analysis of bifurcation problems for partial differential equation[C]// BRUTER C P, ARAGNOL A, LICHNOROWICZ A ed. *Bifurcation Theory, Mechanics and Physics*. Netherlands: D. Reidel Publishing Company, 1983: 209 - 224.
- [10] THOMAS T Y. *Plastic flow and fracture in solids*[M]. New York: Academic Press, 1961.
- [11] HILL R. Acceleration waves in solids[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1962, 10: 1 - 16.
- [12] MANDEL J. Conditions de stabilité et postulat de Drucker[C]// KRAVTCHEKOV J, SIRIEYS P M ed. *Rheology and Soil Mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1966: 58 - 68.
- [13] BÉSUELLE P. Compacting and dilating shear bands in porous rock: theoretical and experimental conditions[J]. *Journal of Geophysical Research*, 2001, 106(B7): 13 435 - 13 442.
- [14] OLSSON W A. Theoretical and experimental investigation of compaction bands[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1999, 104(B4): 7 219 - 7 228.
- [15] RUDNICKI J W. Shear and compaction band formation on an elliptic yield cap[J]. *Journal of Geophysical Research*, 2004, 109(B3): B03402.1 - B03402.10.
- [16] HOLCOMB D J, RUDNICKI J W. Inelastic constitutive properties and shear localization in Tennessee marble[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2001, 25(2): 109 - 129.
- [17] MENENDEZ B, ZHU W, WONG T T. Micromechanics of brittle faulting and cataclastic flow in Berea sandstone[J]. *Journal of Structural Geology*, 1996, 18(1): 1 - 16.
- [18] FOSSUM A F, FREDRICH J T. Cap plasticity models and compactive and dilatant pre-failure deformation[C]// *Pacific Rocks 2000*, *Proceedings of the 4th North American Rock Mechanics Symposium*. Rotterdam: A. A. Balkema, 2000: 1 169 - 1 176.
- [19] ISSEN K A. Conditions for localized deformation in compacting porous rock[Ph. D. Thesis][D]. Evanston: Northwestern University, 2000.
- [20] ISSEN K A, RUDNICKI J W. Conditions for compaction bands in porous rock[J]. *Journal of Geophysical Research*, 2000, 105(B9): 21 529 - 21 536.
- [21] ISSEN K A, RUDNICKI J W. Theory of compaction bands in porous rock[J]. *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*, 2001, 26(1/2): 95 - 100.
- [22] ISSEN K A. The influence of constitutive models on localization conditions for porous rock[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, 69(17): 1 891 - 1 906.
- [23] CLEARY M P, RUDNICKI J W. The initiation and propagation of dilatant rupture zones in geological materials[C]// COWIN S C ed. *The Effects of Voids on Material Deformation*, ASME Applied Mechanics Division. [S.l.]: [s.n.], 1976: 13 - 30.
- [24] CHALLA V, ISSEN K A. Conditions for localized compaction of porous granular materials[C]// *Proceedings of the 15th ASCE Engineering Mechanics Conference*. New York: Columbia University, 2002.
- [25] RUDNICKI J W, OLSSON W A. Reexamination of fault angles predicted by shear localization theory[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 1998, 35(4/5): 512 - 513.
- [26] 王宝善, 李 鹏, 陈 颢. 高孔隙岩石局部化变形研究新进展[J]. *地球物理学进展*, 2004, 19(2): 222 - 229. (WANG Baoshan, LI Juan, CHEN Yong. Advances of research on localized deformation in porous rocks[J]. *Progress in Geophysics*, 2004, 19(2): 222 - 229. (in Chinese))
- [27] 王 鑫. 利用分岔分析理论研究高孔隙度岩石的局部化变形[硕士学位论文][D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2006. (WANG Xin. Study on local deformation of high-porosity rock using bifurcation theory[M. S. Thesis][D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2006. (in Chinese))
- [28] KATSMAN R, AHARONOV E, SCHER H. Numerical simulation of compaction bands in high-porosity sedimentary rock[J]. *Mechanics of Materials*, 2005, 37(1): 143 - 162.
- [29] WONG T F, DAVID C, ZHU W. The transition from brittle faulting to cataclastic flow in porous sandstones: mechanical deformation[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1997, 102(B2): 3 009 - 3 025.
- [30] KLEIN E, BAUD P, REUSCHLÉ T, et al. Mechanical behavior and failure mode of Bentheim sandstone under triaxial compression[J]. *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*, 2001, 26(1/2): 21 - 25.
- [31] RUDNICKI J W. Conditions for compaction and shear bands in a transversely isotropic material[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39(13/14): 3 741 - 3 756.
- [32] BERNARD X D, EICHHUBL P, AYDIN A. Dilation bands: a new form of localized failure in granular media[J]. *Geophysical Research Letters*, 2002, 29(24): 21 - 29.
- [33] RUDNICKI J W. A class of elastic-plastic constitutive laws for brittle rocks[J]. *Journal of Rheology*, 1984, 28(6): 759 - 778.