

# 计算机模拟

## Computer Simulation

主讲人：薛毅教授

北京工业大学应用数理学院

运筹学学科部主任

[xueyi@bjut.edu.cn](mailto:xueyi@bjut.edu.cn)



Monte Carlo方法  
随机数的产生  
概率分析与计算机模拟

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 1 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



Monte Carlo方法  
随机数的产生  
概率分析与计算机模拟

# 第八章 计算机模拟

- 第一节 Monte Carlo 方法
- 第二节 随机数的产生
- 第三节 概率分析与计算机模拟

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第2页共60页

返回

全屏显示

关闭

退出



# 1 Monte Carlo方法

在用传统的方法难以解决的问题中，有很大一部分可以用概率统计模型进行描述。由于这类模型难以作定量分析，得不到解析结果，或者有解析结果但工作量太大以至无法实现。另外，即便是确定性模型，也有可能得不到解析的结果。在这种情况下，可以采用计算机模拟的方法来分析 and 解决问题。

访问主页

标题页



第 3 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



## 1.1. Monte Carlo方法

Monte Carlo 方法，又称为Monte Carlo模拟，或统计试验方法或随机模拟等。Monte Carlo方法的基本思想是将各种随机事件的概率特征（概率分布、数学期望）与数学分析的解联系起来，用试验的方法确定事件的相应概率与数学期望。因而，Monte Carlo方法的突出特点是概率模型的解是由试验得到的，而不是计算出来的。

[访问主页](#)

[标题页](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

第 4 页 共 60 页

[返回](#)

[全屏显示](#)

[关闭](#)

[退出](#)



## 例8.1.2 (圆周率 $\pi$ 的估计)

考虑服从 $(0, 1)$ 区间上均匀分布的独立的随机变量 $X$ 与 $Y$ ，因此，二维随机变量 $(X, Y)$ 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{则 } P \{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \frac{\pi}{4}.$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第5页共60页

返回

全屏显示

关闭

退出



考虑边长为1的正方形，以一个角（点 $O$ ）为圆心，1为半径的1/4圆弧。然后，在正方形内等概率地产生 $n$ 个随机点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ ，即 $x_i$ 和 $y_i$ 是 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机数，如图8.1.1所示。设 $n$ 个点中有 $k$ 个点落在1/4圆内，即有 $k$ 个点 $(x_i, y_i)$ 满足 $x_i^2 + y_i^2 \leq 1$ 。则当 $n \rightarrow \infty$ ，有如下关系，

$$\left(\frac{k}{n}\right)_{n \rightarrow \infty} \longrightarrow \frac{1/4 \text{圆面积}}{\text{正方形面积}}, \quad \left(\frac{k}{n}\right)_{n \rightarrow \infty} \longrightarrow \frac{\pi}{4}.$$

因此， $\pi$ 的估计值为因此， $\pi$ 的估计值为

$$\hat{\pi} = \frac{4k}{n}.$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第6页共60页

返回

全屏显示

关闭

退出

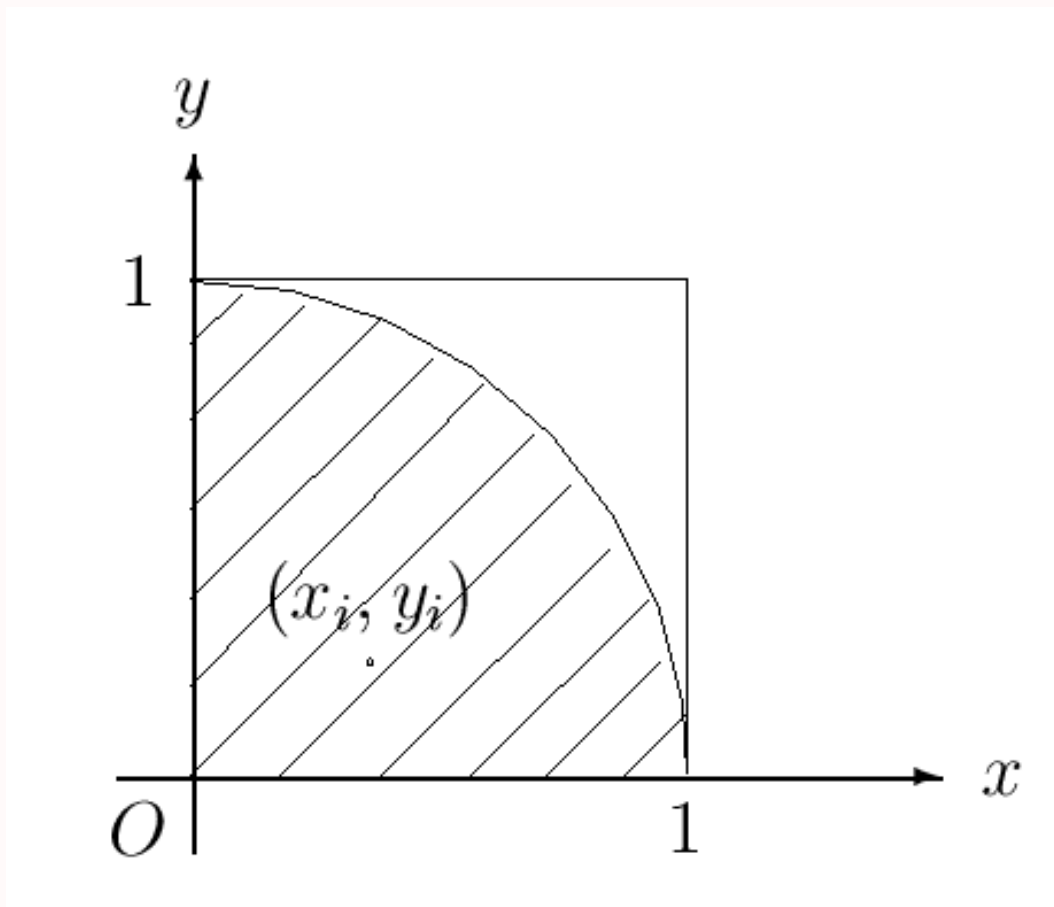


图8.1.1 用Monte Carlo方法求 $\pi$ 的估计值

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第7页共60页

返回

全屏显示

关闭

退出



下面的程序是用R语言编写的

```
MC1<-function(n) {  
  k<-0; x<-runif(n); y<-runif(n)  
  for (i in 1:n){  
    if (x[i]^2+y[i]^2<1)  
      k<-k+1  
  }  
  pi<-4*k/n  
}
```

其中`runif()`是产生均匀分布的随机数，其使用方法为`runif(n, a, b)`产生区间 $n$ 个 $(a, b)$ 区间上均匀分布的随机数，若 $a, b$ 值省缺，则产生 $n$ 个 $(0, 1)$ 区间上均匀分布的随机数。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 8 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出





调用MC1函数，取 $n = 10000$ ，得到

```
> pi<-MC1(10000); pi  
[1] 3.1496
```

上面讨论的用Monte Carlo 方法求 $\pi$ 的方法，本质上就是用Monte Carlo 方法求定积分  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ 。下面给出求定积分的一般方法。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第9页共60页

返回

全屏显示

关闭

退出



### 例8.1.3 用Monte Carlo 方法求定积分

$$I = \int_a^b g(x)dx. \quad (1.1)$$

图8.1.2(a)的阴影面积表示是定积分(1.1)的值。为简化问题，将函数限制在单位正方形( $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ )内，如图8.1.2(b)所示。只要函数 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内有界，则可以适当选择坐标轴的比例尺度，总可以得到图8.1.2(b)的形式。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 10 页 共 60 页

返回

全屏显示

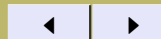
关闭

退出



访问主页

标题页



第 11 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

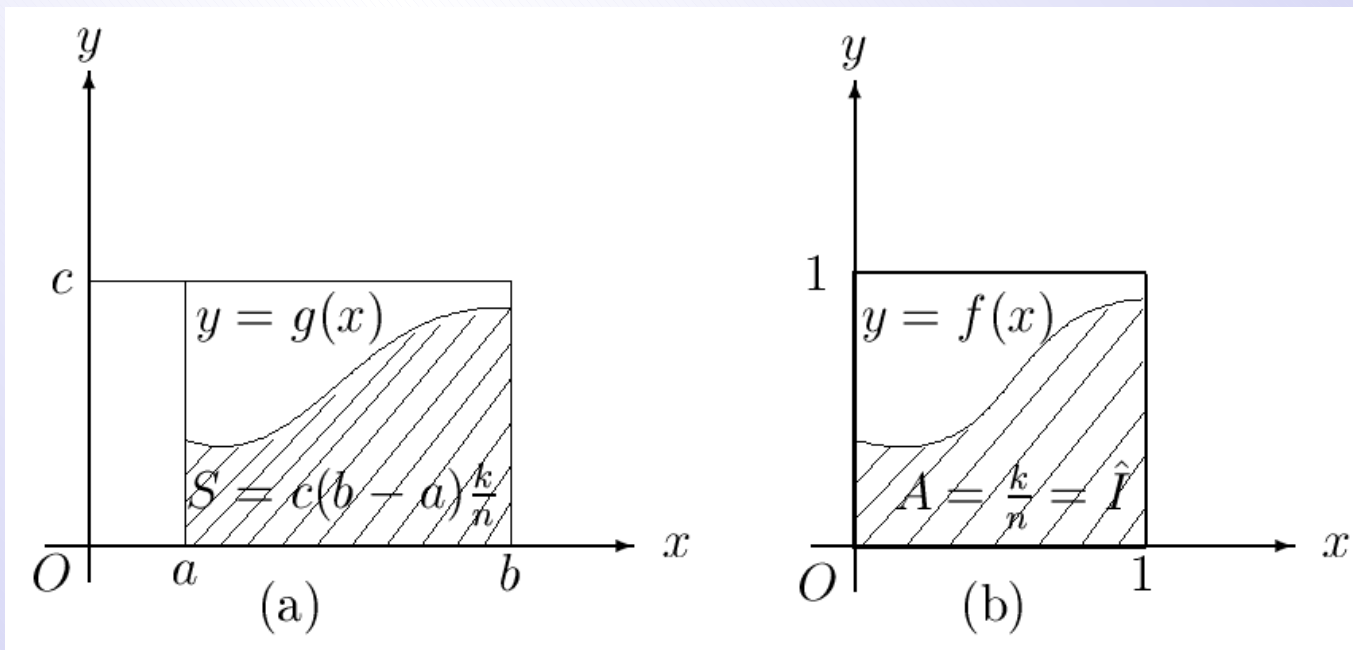


图8.1.2 用Monte Carlo方法求定积分的示意图



现在只考虑图8.1.2(b)的情况，计算定积分

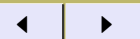
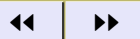
$$I = \int_0^1 f(x)dx. \tag{1.2}$$

令 $x, y$ 为相互独立的 $(0, 1)$ 区间上均匀随机数，在单位正方形内随机的投掷 $n$ 个点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ . 若第 $j$ 个随机点 $(x_j, y_j)$ 落于曲线 $f(x)$ 下的区域内(图8.1.2(b)内有阴影的区域)，表明第 $j$ 次试验成功，这相应于满足概率模型

$$y_j \leq f(x_j). \tag{1.3}$$

访问主页

标题页



第 12 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



设成功的总点数有 $k$ 个，总的试验次数为 $n$ ，则由强大数定律，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = p,$$

从而有

$$\hat{I} = \frac{k}{n} \approx p. \quad (1.4)$$

显然，概率 $p$ 即为图8.1.2(b)的面积 $I$ 。从而，随机点落在区域 $A$ 的概率 $p$ 恰是所求积分的估值 $\hat{I}$ 。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 13 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



综上所述，可以把Monte Carlo方法解题的一般过程归纳为以下三点。

### (1) 构造问题的概率模型

对随机性质的问题，如中子碰撞、粒子扩散运动等，主要是描述和模拟运动的概率过程。建立概率模型或判别式。这一问题，在后面的应用中还将进一步讨论。

对确定性问题，如确定 $\pi$ 值，计算定积分，则需将问题转化为随机性问题，例如图8.1.2(a)计算连续函数 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的定积分，则是在 $c(b - a)$ 的有界区域内产生若干随机点，并计数满足不等式 $y_j \leq g(x_j)$ 的点数，从而构成了问题的概率模型。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 14 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



## (2) 从已知概率分布抽样

从已知概率分布抽样，实际上是产生已知分布的随机数序列，从而实现对随机事件的模拟。例如，要得到估值 $\hat{I}$ ，关键在于产生 $f(x)$ 的抽样序列 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ ，即产生具有密度函数为 $f(x)$ 的随机序列。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 15 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



### (3) 建立所需的统计量

对求解的问题，用试验的随机变量 $k/n$ 作为问题解的估值，若 $k/n$ 的期望值恰好是所求问题的解，则所得结果为无偏估计，这种情况在Monte Carlo方法中用得最多。除无偏估计外，有时也用极大似然估计、渐近估计等。

[访问主页](#)

[标题页](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

第 16 页 共 60 页

[返回](#)

[全屏显示](#)

[关闭](#)

[退出](#)





## 1.2. Monte Carlo方法的精度分析

Monte Carlo方法是以随机变量抽样的统计估值去推断概率分布的，抽样不是总体，这里就有一个误差估计的重要问题。Monte Carlo方法所能达到的精度与其应用范围的大小紧密相关。我们希望能以较少的试验次数（即较低的费用）得到较高的精度，下面讨论这一问题。

设有随机变量 $X$ ，其抽样值为 $x_1, x_2, \dots$ ，现欲求其期望值 $E(X)$ ，可以有两种方法。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 17 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



## 1. 随机投点方法

随机投点方法（见例8.1.2和例8.1.3），是进行 $n$ 次试验，当 $n$ 充分大时，以随机变量 $k/n$ 作为期望值 $E(X)$ 的近似估值，即

$$E(X) \approx \bar{p} = k/n.$$

其中 $k$ 是 $n$ 次试验中成功的次数。

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 18 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



若一次投点试验的成功概率为 $p$ , 并以

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{表明试验成功,} \\ 0, & \text{表明试验失败,} \end{cases}$$

则一次试验成功的均值与方差为

$$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p,$$

$$\text{Var}(X_i) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) - p^2 = p(1 - p).$$

若进行 $n$ 次试验, 其中 $k$ 次试验成功, 则 $k$ 为具有参数为 $(n, p)$ 的二项分布。此时, 随机变量 $k$ 的估值为

$$\bar{p} = k/n.$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 19 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



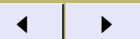
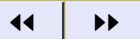
显然，随机变量 $\bar{p}$ 的均值和方差满足

$$E(\bar{p}) = E\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}E(k) = p, \quad \text{Var}(\bar{p}) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

因而标准差 $S = \sqrt{p(1-p)/n}$ . 当 $p = 0.5$ 时，标准差达到最大。

访问主页

标题页



第20页共60页

返回

全屏显示

关闭

退出



现在讨论，当试验次数 $n$ 取多大时，不等式 $|\bar{p} - p| < \varepsilon$ 的概率不小于 $1 - \alpha$ ，即

$$P\{|\bar{p} - p| < \varepsilon\} = 1 - \alpha. \quad (1.5)$$

这就是说，等式(1.5)的置信度为 $\alpha$ ，其精度为 $\varepsilon$ 。例如，若取 $\alpha = 0.05$ ， $\varepsilon = 0.01$ ，则在100次试验中，估值 $\bar{p}$ 与真值 $p$ 之差，大约有95次不超过1%的误差。

由中心极限定理可知，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\bar{p}$ 渐近于标准正态分布，即 $\bar{p} \rightarrow N(0, 1)$ ，因此有

$$P\left\{\frac{|\bar{p} - p|}{S} < Z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha, \quad (1.6)$$

其中 $Z_{\alpha/2}$ 正态分布的上 $\alpha/2$ 分位点。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第21页共60页

返回

全屏显示

关闭

退出



比较式(1.5)和式(1.6), 得到

$$\varepsilon = Z_{\alpha/2}S \quad \text{或} \quad \varepsilon = Z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n},$$

从则有

$$n \geq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} Z_{\alpha/2}^2. \quad (1.7)$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 22 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



## 2. 平均值方法

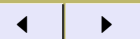
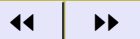
平均值方法是用 $n$ 次试验的平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

作为 $X$ 的期望值 $E(X)$ 的近似估值。

访问主页

标题页



第 23 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



设有 $n$ 个独立同分布的随机变量序列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  
每个随机变量的均值为 $\mu$ , 方差为 $\sigma^2$ , 则

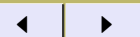
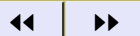
$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

渐近地服从标准正态分布, 也就是说, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$P \left\{ \left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right| \leq Z_{\alpha/2} \right\}$$
$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Z_{\alpha/2}}^{Z_{\alpha/2}} \exp(-x^2/2) dx$$
$$= 1 - \alpha,$$

访问主页

标题页



第24页共60页

返回

全屏显示

关闭

退出





或者

$$P \left\{ |\bar{x} - \mu| \leq Z_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2/n} \right\} = 1 - \alpha.$$

同样，若要求  $|\bar{x} - \mu| \leq \varepsilon$ ，则

$$\varepsilon = Z_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2/n},$$

从而有

$$n \geq Z_{\alpha/2}^2 \sigma^2 / \varepsilon^2. \quad (1.8)$$

式(1.8)即为平均值方法在给定 $\alpha$ 和 $\varepsilon$ 下所需的试验次数。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 25 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



进行计算时，事先不知道方差 $\sigma^2$ ，一般用其估计值代替。即先作 $n_0$ 次试验，得到方差 $\sigma^2$ 的估计值

$$S^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^{n_0} (x_i - \bar{x})^2.$$

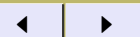
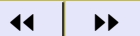
在得到 $S^2$ 后，用 $S^2$ 近似式(1.8)中的 $\sigma^2$ ，则平均值方法的试验次数为

$$n \geq Z_{\alpha/2}^2 S^2 / \varepsilon^2. \quad (1.9)$$

若 $n > n_0$ ，需要作补充试验.

访问主页

标题页



第26页共60页

返回

全屏显示

关闭

退出



综上所述，可归纳如下。

(1) Monte Carlo方法的估值精度 $\varepsilon$ 与试验次数 $n$ 的平方根成反比，即 $\varepsilon \propto 1/\sqrt{n}$ 。若精度 $\varepsilon$ 提高10倍，则试验次数 $n$ 需要增加100倍，这意味着解题的时间要慢100倍。故，收敛速度慢是Monte Carlo方法的主要缺点。

(2) 式(1.7)和式(1.9)表明：当 $\varepsilon$ 一定时，试验次数 $n$ 取决于方差的数值，即 $n \propto S^2$ 。因而降低方差是加速Monte Carlo方法收敛的主要途径。

(3) Monte Carlo方法的精度估计具有概率性质。它并不能断言精度一定小于 $\varepsilon$ ，而只是表明，计算精度以接近于1的概率不超过 $\varepsilon$ 。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 27 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



**例8.1.4** 求用投点方法估计圆周率 $\pi$ 的试验次数，这里取 $\alpha = 0.05, \varepsilon = 0.001$ .

解：  $p = \pi/4 = 0.785, Z_{\alpha/2} = 1.96$ , 则

$$n = \left\lceil \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} Z_{\alpha/2}^2 \right\rceil = \left\lceil \frac{1.96^2 \times 0.875 \times 0.125}{0.001^2} \right\rceil = 6.475 \times 10^6.$$

其中 $\lceil \cdot \rceil$ 表示上取整。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第28页共60页

返回

全屏显示

关闭

退出



下面列出不同精度 $\varepsilon$ 及不同概率 $p$ 下投点算法的试验次数。

表 8.1.5 投点算法的试验次数 ( $\alpha = 0.05$ )

$p$	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.005$	$\varepsilon = 0.001$
0.1(0.9)	140	3500	14000	350000
0.2(0.8)	240	6200	24000	620000
0.3(0.7)	320	8100	32000	810000
0.4(0.6)	370	9200	27000	920000
0.5(0.5)	380	9600	38000	960000

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 29 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



## 2 | 随机数的产生

随机数产生的方法大致可分为三类。第一类是利用专门的随机数表。有一些已制备好的随机数表可供使用,原则上可以把随机数表输入到计算机中储存起来以备使用,但由于计算时常常需要大量的随机数而计算机的储存量有限,因此这种方法一般不采用。第二类是用物理装置即随机数发生器产生随机数,但其成本太高。

访问主页

标题页



第 30 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

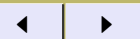
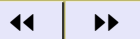
退出



第三类是用专门的数学方法用计算机计算出来的。这些数一般是按一定规律递推计算出来的, 因此它们不是真正的随机数 (称为伪随机数), 所得的数列经过一定时间会出现周期性的重复。但是, 如果计算方法选得恰当, 它们是可以同真正的随机数有近似的随机特征。它的最大优点是计算速度快, 占用内存小, 并可用计算机来产生和检验。

访问主页

标题页



第 31 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



## 2.1. 用R软件生成随机数

实际上，有很多软件可以自动生成各种分布的随机数。现以R软件为例，介绍用计算机软件生成随机数的方法。

在R软件中列出了各种分布（见第10章的表10.4.1），在这些分布的函数前加r，则表示是生成该分布的随机数。如

[访问主页](#)

[标题页](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

第 32 页 共 60 页

[返回](#)

[全屏显示](#)

[关闭](#)

[退出](#)





(1) `runif` — 产生均匀分布的随机数，参数为 $n, a, b$ ，其中 $n$ 为随机数的个数， $a, b$ 为区间 $(a, b)$ 端点值，当 $a, b$ 省缺时，为 $(0,1)$ 区间上的随机数。

(2) `rnorm` — 产生正态分布的随机数，参数为 $n, \mu, \sigma$ ，其中 $n$ 为随机数的个数， $\mu$ 为均值， $\sigma$ 为标准差，当 $\mu, \sigma$ 省缺时，为标准正态分布 $N(0, 1)$ 的随机数。

(3) `rpois` — 产生Poisson分布的随机数，参数为 $n, \lambda$ ，其中 $n$ 为随机数的个数， $\lambda$ 为Poisson分布的参数。

R软件还可以产生其他分布的随机数，这里就不一一列举了。

访问主页

标题页



第 33 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



# 3 概率分析与计算机模拟

## 3.1. 概率分析

概率分析是指用概率的方法来分析 and 讨论随机模型。下面请看一个例子。

**例8.1.1 (赶火车问题)** 一列火车从A站开往B站，某人每天赶往B站上火车。他已了解到火车从A站到B站的运行时间是服从均值为30分钟，标准差为2分钟的正态随机变量。火车大约下午13点离开A站，此人大约13:30达到B站。火车离开A站的时刻及概率如表8.1.1所示。此人到达B站的时刻及概率如表8.1.2所示。问他能赶上火车的概率是多少？

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 34 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



表 8.1.1 火车离开 A 站的时刻及概率

火车离站时刻	13:00	13:05	13:10
概率	0.7	0.2	0.1

[访问主页](#)

[标题页](#)



第 35 页 共 60 页

[返回](#)

[全屏显示](#)

[关闭](#)

[退出](#)

表 8.1.2 某人到达 B 站的时刻及概率

人到站时刻	13:28	13:30	13:32	13:34
概率	0.3	0.4	0.2	0.1



解：记 $T_1$ 为火车从A站出发的时刻， $T_2$ 为火车从A站到达B站运行的时间， $T_3$ 为此人到达B站的时刻。因此， $T_1, T_2, T_3$ 均是随机变量，且 $T_2 \sim N(30, 2^2)$ ， $T_1, T_3$ 的分布律由表8.1.3和表8.1.4所示。

访问主页

标题页



第 36 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



表 8.1.3  $T_1$  的分布律

$T_1$ (分)	0	5	10
概率	0.7	0.2	0.1

表 8.1.4  $T_3$  的分布律

$T_3$ (分)	28	30	32	34
概率	0.3	0.4	0.2	0.1

其中记13时为时刻 $t = 0$ .

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 37 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



通过分析可知，此人能及时赶上火车的充分必要条件是： $T_1 + T_2 > T_3$ . 由此得到，此人赶上火车的概率为 $P\{T_1 + T_2 > T_3\}$ . 上述分析方法称为概率分析。

设

- $T_1$  — 火车从A站出发的时刻；
- $T_2$  — 火车从A站到B站的运行时间；
- $T_3$  — 某人到达B站的时刻。

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 38 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



假设 $T_1, T_2, T_3$ 均是随机变量，且 $T_2 \sim N(30, 2^2)$ ， $T_1, T_3$ 的分布律如表8.1.3和表8.1.4所示。

设 $r_1, r_2$ 是(0,1)区间上均匀分布的随机数，则 $T_1$ 和 $T_3$ 的分布律的模拟公式为

$$t_1 = \begin{cases} 0, & 0 < r_1 \leq 0.7, \\ 5, & 0.7 < r_1 \leq 0.9, \\ 10, & 0.9 < r_1 \leq 1. \end{cases} \quad t_3 = \begin{cases} 28, & 0 < r_2 \leq 0.3, \\ 30, & 0.3 < r_2 \leq 0.7, \\ 32, & 0.7 < r_2 \leq 0.9, \\ 34, & 0.9 < r_2 \leq 1. \end{cases}$$

则 $t_1$ 和 $t_3$ 可以看成 $T_1, T_3$ 的一个观察值。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 39 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



令 $t_2$ 是服从正态分布 $N(30, 2^2)$ 的随机数，则将 $t_2$ 看成火车运行时间 $T_2$ 的一个观察值。

在每次试验中，产生两个 $(0,1)$ 区间均匀分布的随机数 $t_1, t_3$ ，一个服从 $N(30, 2^2)$ 的随机数 $t_2$ ，当 $t_1 + t_2 > t_3$ ，认为试验成功（能够赶上火车）。若在 $n$ 次试验中，有 $k$ 次成功，则用频率 $k/n$ 作为此人赶上火车的概率。当 $n$ 很大时，频率值与概率值近似相等。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 40 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



以下是求解过程的R程序。

```
MC2<-function(n) {  
  r1<-runif(n); r2<-runif(n); t2<-rnorm(n,30,2)  
  t1<-array(0,dim=c(1,n)); t3<-t1;  
  for(i in 1:n){  
    if (r1[i]<=0.7)  
      t1[i]<-0  
    else{  
      if (r1[i]<=0.9)  
        t1[i]<-5  
      else  
        t1[i]<-10  
    }  
  }  
}
```



Monte Carlo方法  
随机数的产生  
概率分析与计算机模拟

访问主页

标题页



第 41 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

```
for(i in 1:n){  
  if (r2[i]<=0.3)  
    t3[i]<-28  
  else{  
    if (r2[i]<=0.7)  
      t3[i]<-30  
    else{  
      if (r2[i]<=0.9)  
        t3[i]<-32  
      else  
        t3[i]<-34  
    }  
  }  
}
```



Monte Carlo方法  
随机数的产生  
概率分析与计算机模拟

访问主页

标题页



第 42 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



```
k<-0
for(i in 1:n){
  if (t1[i]+t2[i]>t3[i])
    k<-k+1
}
p<-k/n
}
```

访问主页

标题页



第 43 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



作一万次试验，得到

```
> p<-MC2(10000);p  
[1] 0.6306
```

此人赶上火车的概率大约是0.63.

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 44 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

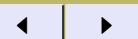
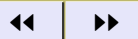


### 例8.3.2 核反应堆屏蔽层设计问题。

核反应堆屏蔽层是用一定厚度的铅(Pb)，把反应堆四周包围起来，用以阻挡或减弱反应堆发出的各种射线。在各种射线中，中子对人体伤害极大，因此，屏蔽设计，主要是了解中子穿透屏蔽的百分比(或概率)，这对反应堆的安全运行是至关重要的。首先考虑一个中子进入屏蔽层后运动的物理过程：假定屏蔽层是理想的均匀平板，中子以初速 $v_0$ 和方向角 $\alpha$ 射入屏蔽层内(见图8.3.2)，运动一段距离后，在 $x_0$ 处与铅核碰撞之后，中子获得新的速度及方向 $(v_1, \theta_1)$ ，再运动一段距离后，与铅核第二次碰撞，并获得新的状态 $(v_2, \theta_2)$ 等等。

访问主页

标题页



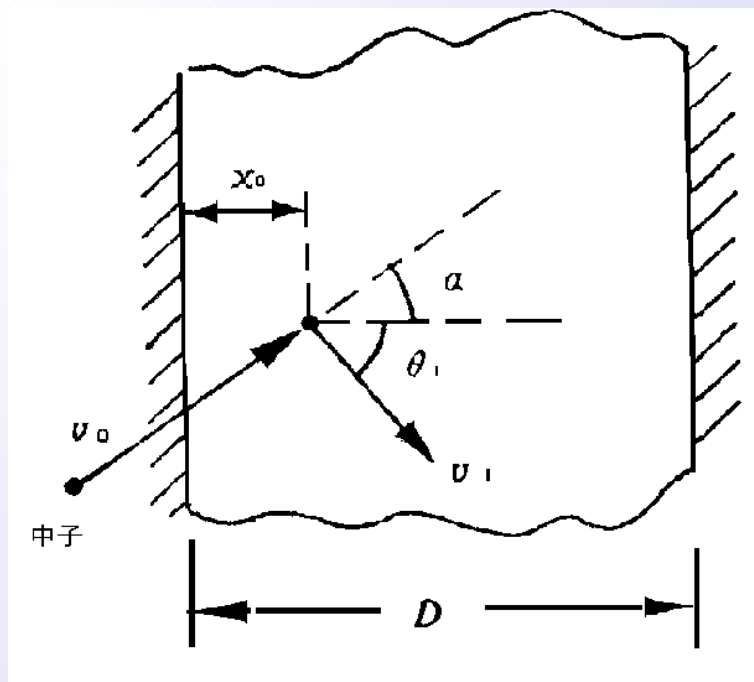
第 45 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



$\alpha$  — 中子入射角,  $\theta_1$  — 中子第一次碰撞弹射角,  $D$  — 屏蔽层厚度.

图8.3.2 中了穿入屏蔽层的运动

访问主页

标题页



第 46 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



经若干次碰撞后，发生以下情况之一而终止运动过程：

- (1) 弹回反应堆；
- (2) 穿透屏蔽层；
- (3) 第 $i$ 次碰撞后，中子被屏蔽层吸收。

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 47 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



下面对问题做若干简化与假设：

(1) 假定屏蔽层平行板的厚度为  $D = 3d$ ，其中  $d$  为两次碰撞之间中子的平均游动距离；每次碰撞后中子因损失一部分能量而速度下降，假设在第10次碰撞后，中子速度下降到某一很小的数值而终止运动（被吸收）。由于对穿透屏蔽层的中子感兴趣，故用  $(x_i, \theta_i)$  描述第  $i$  次碰撞后中子的运动状态，其中  $x_i$  为中子在  $x$  轴上的位置， $\theta_i$  中子运动的方向与  $x$  轴的夹角。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 48 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出





(2) 假定中子在屏蔽层内相继两次碰撞之间游动的距离服从指数分布，中子经碰撞后的弹射角服从 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布。从而得到第 $i$ 次碰撞后中子在屏蔽层的位置

$$x_i = x_{i-1} + R_i \cos \theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \quad (3.1)$$

其中 $\theta_i$ 是中子第 $i$ 次碰撞后的弹射角度， $R_i$ 是中子从第 $i-1$ 次碰撞到第 $i$ 次碰撞时所游动的距离。由假设可能得到，

$$R_i = d \cdot (-\ln r_i), \quad \theta_i = 2\pi u_i, \quad i = 1, 2, \dots, 10.$$

其中 $d$ 为两次碰撞之间中子的平均游动距离； $r_i, u_i$ 是 $(0,1)$ 区间上均匀分布的随机数。式(3.1)表明了中子在屏蔽层内运动的概率模型，可见中子运动的位置和方向都是随机的。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 49 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



(3) 在第 $i$ 次碰撞后，中子的位置 $x_i$ 有三种情况发生：

i)  $x_i < 0$ , 中子返回反应堆；

ii)  $x_i > D$ , 中子穿出屏蔽层；

iii)  $0 < x_i < D$ , 若 $i < 10$ , 则中子在屏蔽层内继续运动；  
若 $i = 10$ , 则中子被屏蔽层吸收。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 50 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



中子运动的三种模式如图8.3.3所示。为简化问题，假定中子入射角 $\alpha = 0$ (即中子以垂直方向穿入屏蔽层)，屏蔽层的厚度为 $D = 3d$ 。

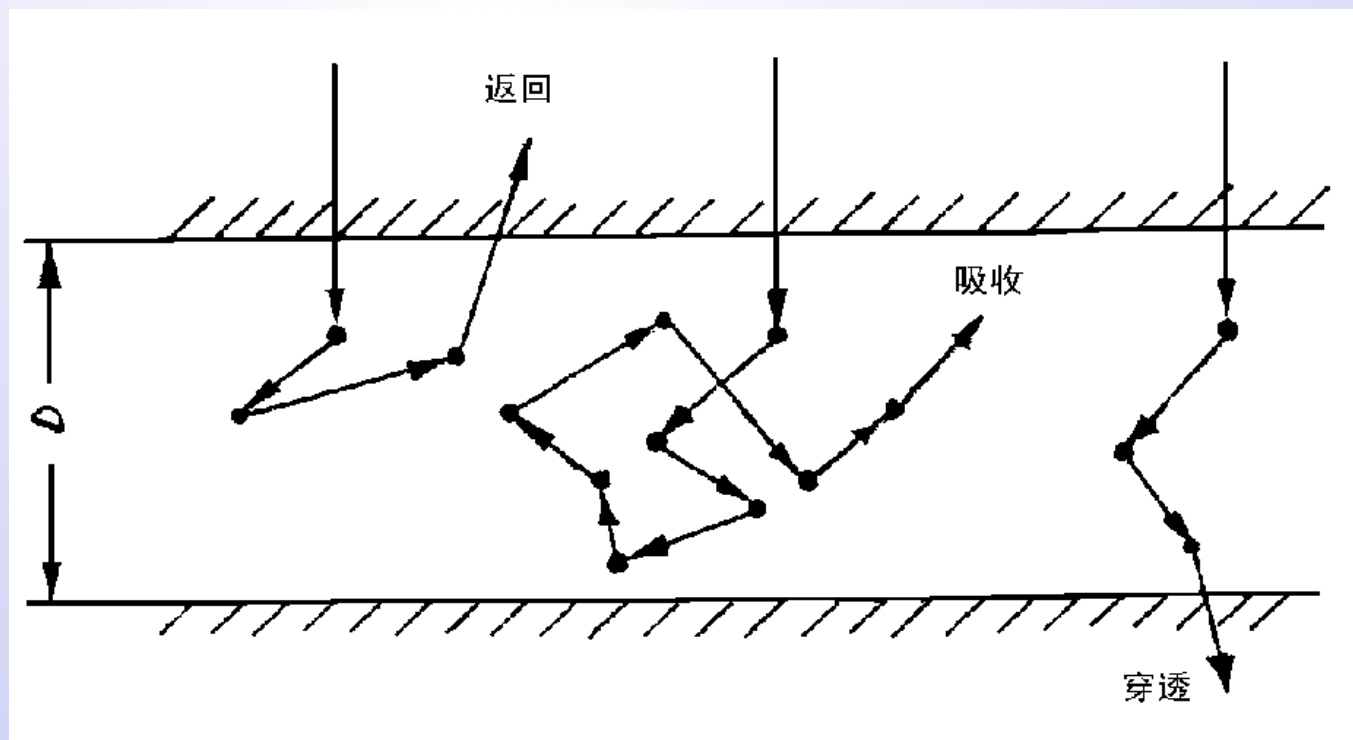


图8.3.3 中子在屏蔽层内运动的三种模式

Monte Carlo方法  
随机数的产生  
概率分析与计算机模拟

访问主页

标题页



第51页共60页

返回

全屏显示

关闭

退出



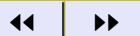
下面是用R软件编写的模拟程序。

```
MC3<-function(n){  
  D<-3; pi<-3.1416; Kfan<-0; Kxi<-0; Kchuan<-0  
  for (k in 1:n){  
    x<- -log(runif(1))  
    for (i in 1:10){  
      Ixi<- 1; r<- runif(2); R<- -log(r[1])  
      t<-2*pi*r[2]; x<-x+R*cos(t)  
      if (x<0){  
        Kfan<-Kfan+1; Ixi<-0; break  
      }  
    }  
  }  
}
```

Monte Carlo方法  
随机数的产生  
概率分析与计算机模拟

访问主页

标题页



第 52 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



```
    if (x>D){  
        Kchuan<-Kchuan+1; Ixi<-0; break  
    }  
}  
if (Ixi==1)  
    Kxi<-Kxi+1  
}  
s<-c(Kchuan/n, Kxi/n, Kfan/n)*100  
}
```

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 53 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



表 8.3.1 不同中子数的模拟结果

中子数 (个)	穿透 (%)	吸收 (%)	返回 (%)
100	35.0	11.0	54.0
1000	34.0	10.6	55.4
3000	33.1	10.5	56.4
5000	32.1	10.9	57.0

表8.3.1表明，取屏蔽层厚度 $D = 3d$ 是不合适的，因为此时中子穿透屏蔽层的百分比在1/3左右。而在实际应用中，要求中子穿透屏蔽层的概率极小，一般数量级为 $10^{-6} \sim 10^{-10}$ ，即穿入屏蔽层的中子若为几百万个，也只能有几个中子穿过屏蔽层。问题是多厚的屏蔽层才能使它被穿透的概率 $W_D < 10^{-6}$ ?

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 54 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

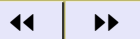
退出



值得注意的是，仅模拟5000个中子的运动，就用其穿透屏蔽层的频率来估计穿透屏蔽层的概率总在“勉强”之嫌，因为这时的模拟精度只有1%，欲提高模拟精度，应适当增加模拟次数。第二个问题是，需要模拟多少个中子的运动，才能用频率估计其概率？

访问主页

标题页



第 55 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



先回答第二个问题。由8.1节关于模拟精度与模拟次数的讨论，由式(1.7)可以得到，若使模拟精度达到千分之一，则模拟次数要在 $10^6$ 次以上。由于中子穿透概率在 $10^{-6}$ 以下，所以其精度至少应达到这个数量级，那么模拟次数就应在 $10^{12}$ 次以上，这一要求在通常的情况下，显然是行不通的。

访问主页

标题页



第 56 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

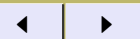
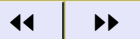




我们采用如下的解决办法。将均匀平行板分为厚度相同的 $m$ 层，只取一层作模拟。设中子在这一层中吸收和弹回的概率之和为 $W$ ，则穿过一层的概率是 $(1 - W)$ ，因而穿透 $m$ 层的概率是 $(1 - W)^m$ 。由于中子穿过一层的平均速度有所下降，因而总穿透概率比 $(1 - W)^m$ 要小。

访问主页

标题页



第 57 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



用Monte Carlo方法，先模拟10000个中子的运动时，可以保证 $(1 - W)$ 的精度要好于1%。经 $m$ 层后，有 $(1 - W)^m < (0.01)^m$ ，若取 $m = 3$ ，就可获得穿透概率 $(1 - W)^3 < (0.01)^3 = 10^{-6}$ 。这样处理后，不必作高达 $10^{12}$ 的实验，只需作 $10^4$ 次试验就可达到 $10^{-6}$ 的精度，这一改进比直接方法大大加快了收敛速度，减少了模拟时间。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 58 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



利用R程序MC3, 作10000次模拟, 得到: 当 $D = 3d$ 时, 穿透概率为 $W_{3d} \leq 1/3$ , 问题是多厚的屏蔽层才能使 $W_D < 0.01$ ?

设需要的屏蔽厚度为 $x$ , 则 $(W_{3d})^x < 0.01$ , 或 $3^x > 100$ , 即

$$x > \frac{\lg 100}{\lg 3} = \frac{2}{0.47712} = 4.1918.$$

即屏蔽层的厚度在达到 $4.1918D \approx 13d$ , 才能使中子穿透概率不大于0.01.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 59 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



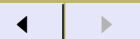
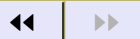
这时可以回答第一个问题了，若使 $W_D < 10^{-6}$ ，则总厚度为

$$TD = 3x = 39d.$$

也就是说，屏蔽层总厚度为 $39d$ 时，可使中子穿透屏蔽层的概率 $W_D < 10^{-6}$ 。

访问主页

标题页



第 60 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出