数学建模入门

Introduction to Mathematical Modeling

主讲人：　薛 毅 教授

北京工业大学应用数理学院

运筹学学科部主任

xueyi@bjut.edu.cn

第一章

数学建模入门

1 从现实对象到数学模型

为解决各种复杂的实际问题，建立数学模型是一种十分有效并被广泛使用的工具或手段。数学建模是一种包含数学模型的建立、求解和验证的复杂过程，其关键是如何运用数学语言和方法来刻画实际问题，未来具有竞争力的优秀人才应具备较高的数学素质，能够利用数学手段创造性地解决实际问题。数学建模教育的核心是引导学生从“学”数学向“用”数学方面转变。强调数学学习的目的在于应用，完全符合理论必须联系实际的客观真理和国民经济现代化的需要。

1.1. 原型和模型

事物的原型系指人们所研究的实际对象、系统或过程，而模型则是为了某种特定的目的、加工提炼出的一种替代物，它集中反映了事物的本质。

1.2. 数学模型

数学模型是用数学来描述实际问题的产物，一般可表述为：对于现实对象，为了某种目的，根据有关的信息和规律，通过抽象简化所得到的一个数学结构。它可以是反映该事物的性态和数量规律的数学公式，图形或算法。

数学模型是对现实世界部分信息加以分析提炼加工的结果，其数学解答最终需翻译为实际解答，并应符合实际及人们的要求，从而得出对现实对象的分析、预测、决策或对结果进行控制。

1.3. 数学模型的分类方法

根据数学模型的数学特征和应用范畴，我们可将其进行分类，一般常见的有以下几种。

(1) 根据其应用领域，大体可分为生物数学、医学数学、经济数学模型等，再有如人口模型、生态模型、交通模型等。

(2) 根据其数学方法，可将其分为初等模型，微分方程模型，图论模型，规划模型、统计模型等。

(3) 根据模型的数学特性，可分为离散和连续模型，确定性和随机性模型，线性和非线性模型，静态和动态模型等。

(4) 根据建模目的，我们可将其分为分析、预测、决策、控制、优化模型等。

1.4. 数学建模的过程

数学建模的建立过程可简略表示为如图1.1.1所示。

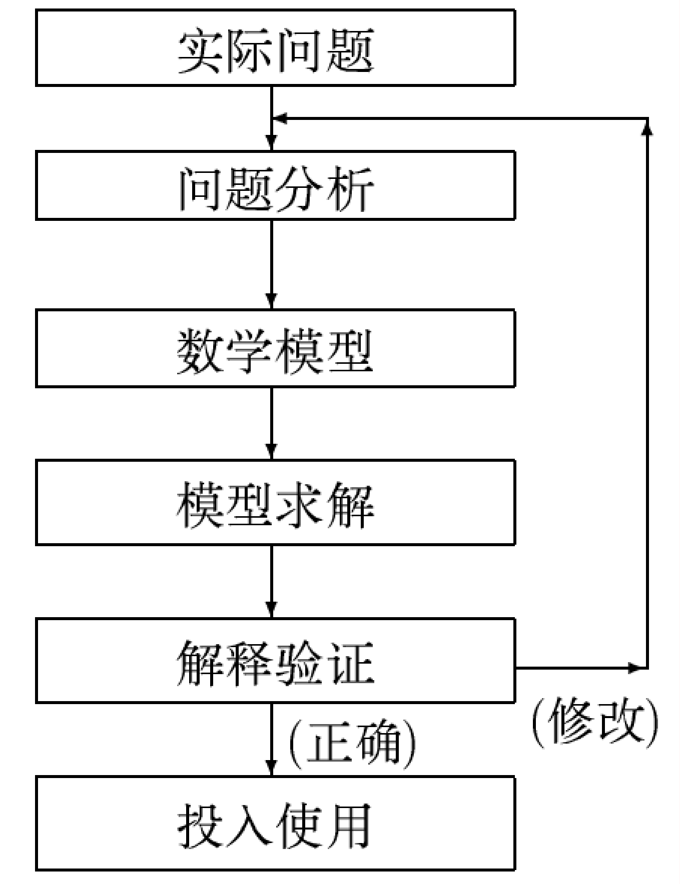

图1.1.1 数学建模的基本过程.

从现实对象到数学模型
数学建模示例
访问主页
标题页
第 7 页 共 28 页
返回
全屏显示
关闭
退出

学习数学模型基本的目的在于学会如何利用有效的数学知识、计算机工具和科学实验手段来创造性地解决实际问题。

数学建模的基本组成部分为：

(1) 用适当的数学方法对实际问题进行描述；

(2) 求数学模型的数值解；

(3) 模型结果的定性和定量分析。

较好的数学模型通常具备以下特点：考虑问题较全面，具有独到性或创新性，结果合理，稳定性好，适用性强。

注意数学模型解答不应由于系统参数的微小扰动或舍入误差的扩散而产生大的变化或失真。

下面简要概括一下数学建模的基本步骤及其应注意的一些问题。

1.5. 问题分析

1. 总体设计

将分析过程中的问题要点用文字记录下来，在其框架中标示出重点、难点，是一种好的思考方法；将问题结构化，即层层分解为若干子问题，会利于讨论交流和修改；要花费足够时间进行调研分析，以尽量避免走不必要的弯路或误入歧途。

2. 合理分析选取基本要素

(1) 因素：主要、次要、可忽略因素的分析；

(2) 数据：对数据数量的充分性和可靠性应进行判断，并归纳或明确数据所提供的信息；

(3) 条件：分析已知条件中哪些是不变的，哪些是可变动的；

(4) 正确选择输入、输出量。

3. 启发式的思维方法

首先，应集思广益充分发挥集体的力量，然后从各种角度来分析考虑问题，例如：整体—局部，分解—组合，正面—反面，替代—转换等等。在深入研讨过程中，“悟性”是十分重要的，即所谓的灵机一动，茅塞顿开，它是认识升华的产物。

1.6. 合理假设

1. 基本假设

变量、参数的定义，以及根据有关“规律”作出的变量间相互关系的假定。

2. 其他假设

暂忽略因素，限定系统边界，说明模型应用范围以及局部进程中的二次假设等。

1.7. 模型构造

应根据问题的特征和建模目的来选择恰当的数学方法，对不同处理方案的模拟结果进行比较。从中选择“最优”方案也不失为一种策略。

简化问题的假设或处理方法，目的是要提供建模方法所需满足的前提或条件，但必须要符合实际，这样才有意义。

充分利用现有成果和简明方法，从理想化的、简单的模型逐步过渡到实际的、复杂的模型，这是一种十分有效的途经。

1.8. 模型求解和检验

在模型求解和分析时，应注意以下三个方面：

(1) 充分利用先进的工具和数值试验技术。

(2) 结果合理性分析，其中包括误差，敏感性、稳定性分析等。

(3) 对模型检验最根本的是实践的检验，对新模型则可从合理性、精确性、复杂性、普适性等方面来进行分析评价，一般还需指明模型的改进方向。

1.9. 在数学建模学习中一般应注意的几个方面

(1) 要深刻领会数学的重要性不仅体现在数学知识的应用，更重要的是数学的思维方法，这里包括思考问题的方式，所运用的数学方法及处理技巧等，特别应致力于“双向”翻译、逻辑推理、联想和洞察四种基本能力的培养。

(2) 要提高动手能力，这包括自学、文献检索、计算机应用、科技论文写作和相互交流能力，特别应有意识地增强文字表述方面的准确和简明性。

(3) 要勇于克服学习中的困难，消除畏难情绪。由于数学建模课程属于拓宽性的启发性强的难度较深的课程，它提倡创造性思维方法的训练，因而文字习题解题中找不到感觉或做得有出入是一种正常现象，对此不必丧失信心。相信通过摸索会逐步有所改进，如能解决好几个问题或真正动手完成一两个实际题目都应视为有所收获。从长远看这种学习有益于开阔人们的思路和眼界，有利于知识结构的改善和综合素质的提高。

2 数学建模示例

2.1. 椅子问题

1. 问题

四条腿长相同的方椅放在不平的地面上，是否能使它四脚同时着地呢？

在简单条件下答案是肯定的，其证明体现了想象力所发挥的卓越作用。

2. 模型假设

(1) 椅子：四腿长相同并且四脚连线呈正方形。

(2) 地面：略微起伏不平的连续变化的曲面。

(3) 着地：点接触，在地面任意位置处椅子应至少有三只脚同时落地。

3. 模型建立

该问题的关键是要用数学语言把条件及结论表示出来，需运用直观和空间的方式来思考。将椅脚连线构成的正方形的中心称为椅子中心，椅子处于地面任一位置，总可想象为椅子中心处于该位置— 某直角坐标系的原点O处，而用A、B、C、D表示椅子四脚的初始位置。椅子总能着地，则意谓着通过调整，四脚定能达到某一平衡位置，即使四脚与地面距离均为零。这可想象为使椅子以原点O为中心旋转角度。此时四脚位置变为A'、B'、C'、D'。

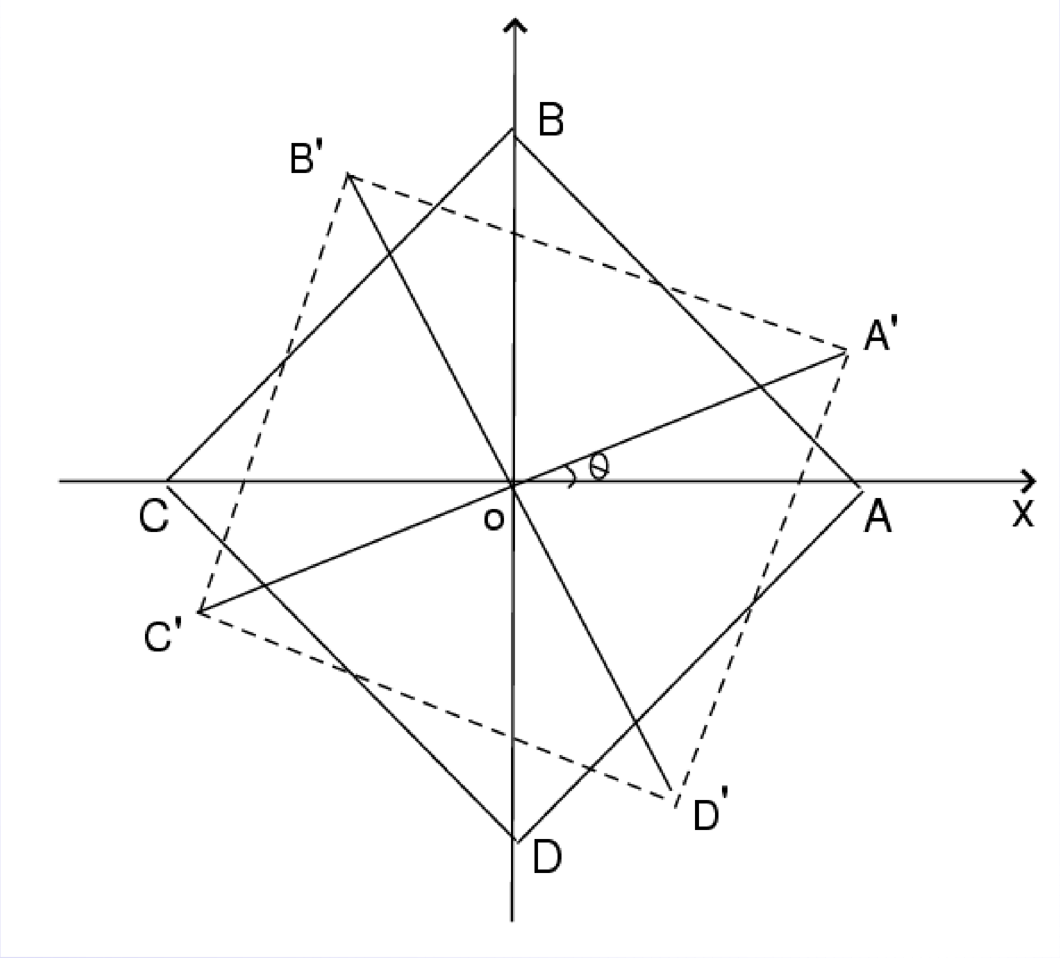

图1.2.1 用θ表示椅子的位置.

显然椅子位置可用θ 来表示，而椅脚与地面距离应是θ的连续函数，记A, C两脚，B, D两脚与地面距离之和分别为$f(\theta)$ 和$g(\theta)$，则该问题易归结为：

已知连续函数$f(\theta) \geq 0$, $g(\theta) \geq 0$ 且$f(\theta)g(\theta) = 0$, 若$f(0) > 0$, $g(0) = 0$, 则一定存在$\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0.$$

证明： 令$\theta = \frac{\pi}{2}$ (即旋转90^o对角线AC与BD互换)，则$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. 定义$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$, 得到$h(0)\cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. 根据连续函数的零点定理，则存在$\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$h(\theta_0) = f(\theta_0) - g(\theta_0) = 0.$$

结合条件$f(\theta_0)g(\theta_0) = 0$, 从而得到

$$f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0,$$

即四个点均在地面上。

2.2. 商人安全过河

1. 问题

三名珠宝商人各带一名随从欲乘船过河，一只小船需自己划且每次至多只能容纳二人。随从密谋：在河的任一岸，一旦他们人数多于商人人数就杀人越货。商人事先知悉随从欲图谋不轨，此时商人怎样才能安全过河？

这是一典型的智力竞赛题，但它具有代表性，即从数学上可归结为多步决策过程，并利用状态转移法来描述和求解。

2. 基本步骤

(1) 定义状态$S_k=(x_k,y_k)$. S_k表示第k次过河时此岸商人数为x_k, 随从数为y_k, 其可能取值为$x_k,y_k=0,1,2,3$.

对商人安全的合法状态之集合称为允许状态集合，记作

$$
\begin{aligned}
S=\{(x,y)\mid\ & x=0,\ y=0,1,2,3;\\
& x=3,\ y=0,1,2,3;\\
& x=y=1,2\}.
\end{aligned}
$$

自然要求$S_k\in S$.

(2) 定义决策$d_k=(u_k,v_k)$. d_k表示第k次渡河方案，此时渡船中商人数为u_k, 随从数为v_k. 据题意，允许决策集合$D=\{(u,v)|u+v=1,2\}$, 并且有$d_k\in D$.

(3) 建立状态转移方程

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^k d_k$$

来表示第k次过河的运动规律。由于全体过河需奇数次n, 从而该问题可归结为上述规律$S_1=(3,3)\xrightarrow{n\text{步}}S_{n+1}=(0,0)$.

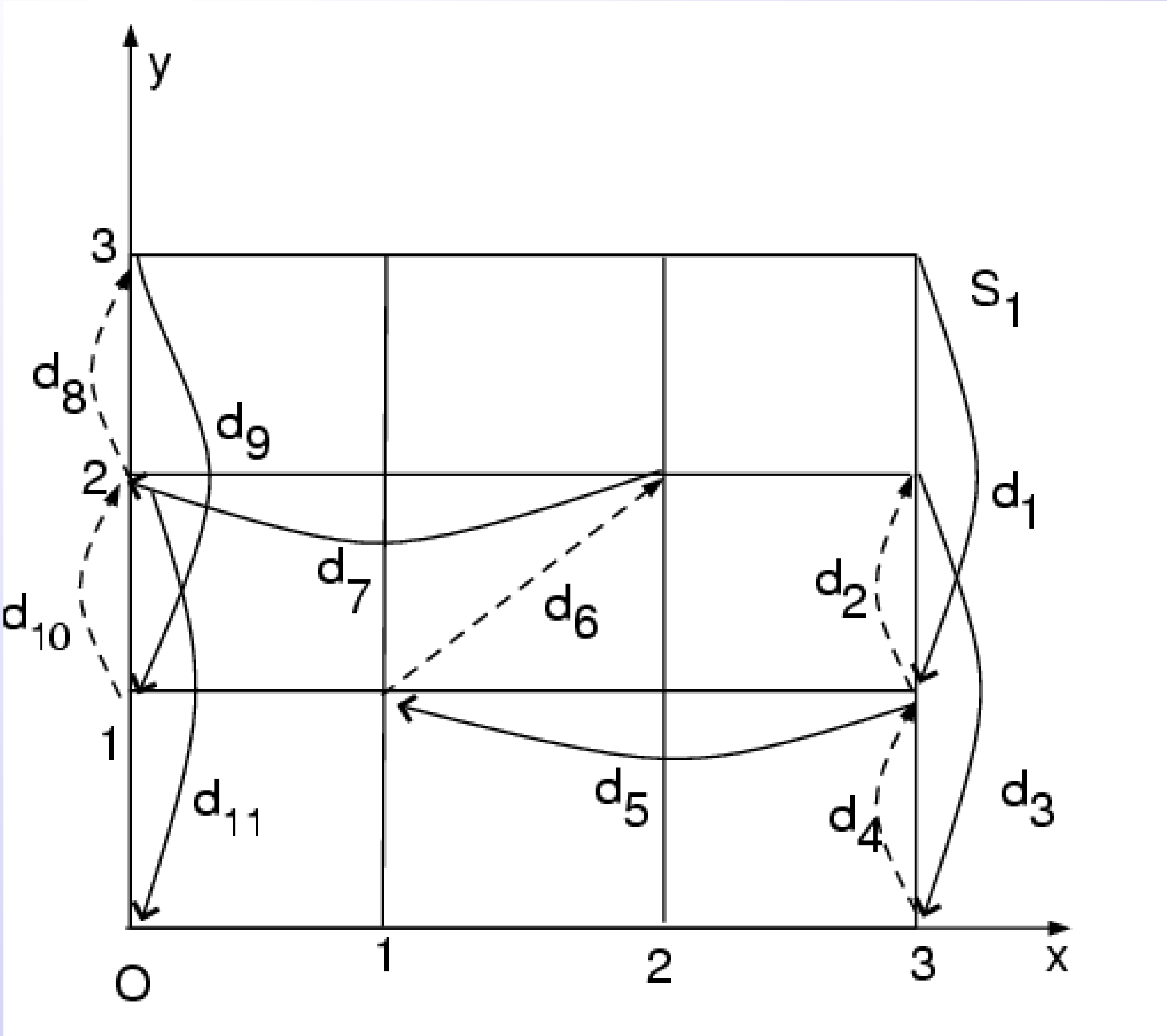

图1.2.2 图解法.

由于此问题十分简单，可利用更直观的图示法求解。在图1.2.2中，允许状态用圆点标示，允许决策为沿方格线移动$1 \sim 2$格，其运动规律为奇次向左下方运动(实线), 偶次向右上方移动(虚线)。最终经$n = 11$步到达$(0, 0)$。