

飛沫を伴う非線形自由表面流れの計算法について

正員 木原 一*

On a Computing Method for Nonlinear Free Surface Flow Causing Spray Ejection

by Hajime Kihara, *Member*

Summary

On the numerical simulation using the BEM, the computational disadvantage by dealing with the particular fluid domain due to the jet flow is discussed and the adaptive schemes for robust time-domain computation are proposed. The developed computational models for the jet flow and splash are applicable to the water impact problem of a bow section with an arbitrary shape. Two numerical studies are demonstrated for the validity of the present method through some comparisons with experimental and other computational results.

1. 緒言

耐航性能に関する最近の研究動向の一つとして浮体と波との強非線形相互作用に関する問題が挙げられる。これまでも非線形問題への挑戦¹⁾という言葉がキーワードに境界要素法 (BEM) を用いた時間領域非線形計算法に関する研究が精力的に行われてきたが、最近の国内での研究例をみると、BEM を用いたこれらの研究は少なく、CFD に代表される差分法を用いた計算手法の開発や応用研究などが多く見られる。一方、ストリップ法は依然として船舶の設計段階では有用性の高いツールであり、特に波浪衝撃現象による荷重推定を精度よく行うことは重要な課題の一つである。この視点から BEM による流体力計算法の高度化は意義あるものと言える。

著者は混合オイラー・ラグランジェ (MEL) 法を用いた時間領域解法が非線形性の強い問題に対してどれ位有効であるかその可能性について調査してきた²⁾³⁾⁴⁾。本報告は 2 次元物体の水面衝撃問題の数値計算法について考察したもので、特に流体と物体との衝突にともなうジェットやスプラッシュの発生をあるレベルまでシミュレーションできる方法を提案している。水面衝撃問題は浮体と波との非線形相互作用の中でも数値シミュレーションが最も難しいテーマの一つであり、浮体の大振幅動揺問題を扱うには避けて通れない問題と言える。計算スキームの開発という点に注目すると、これまで BEM ベースの計算法に関する成果報告では計算法が十分明らかにされてきたとは言い難い面もあり、書物などで公開されている BEM の計算コードを使用してもなかなか満足する結果が得られない場合も多い。境界型計算法のもつメリッ

トがありながら非線形問題の数値解析法としての普及が現状に留まっている要因の一つと考えられる。本報告で提案する計算モデルを用いると少なくともスプラッシュや砕波等の現象によって計算が不能になる状況は回避できる。また非常に短い時間スケールで起きる衝撃圧の計算も可能であり、境界積分方程式を用いた計算法なので計算時間も比較的短く、信頼のおける解が期待できる。研究の最終目標は波浪衝撃による非線形荷重解析を実施することであるが、本報告では 2 次元円断面形状物体の着水時の衝撃解析と船型物体への応用例としてチャイン付き柱状滑走体まわりの流れの解析を行い本計算法および飛沫に関する計算モデルの有効性を検証する。

2. 問題の定式化

物体の水面衝撃問題を扱うために、水面にわずかに浸かった状態から速度 \mathbf{v}_B で突然動き出す物体の 2 次元造波問題を考える。非圧縮性流体を考え渦なし流れを仮定すると、攪乱による流体運動は速度ポテンシャル ϕ によって表される。静止水面上に y 軸を、鉛直上向きに z 軸をとり、境界 Γ で囲まれている有限の流体領域 Ω を考える。境界は自由表面 Γ_F 、没水した物体表面 Γ_B および水底や壁面からなる固体境界 Γ_S からなるとする。ある時間の速度場は以下の境界値問題で記述できる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n} \quad (2)$$

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \nabla \phi \quad \text{on } \Gamma_F \quad (3)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - gz \quad \text{on } \Gamma_F \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \quad (5)$$

ここで D/Dt は実質微分を表している。 g は重力加速度で、領域内の任意の点の位置ベクトルを $\mathbf{x} = (y, z)$ で表す。移動境界

* 防衛大学校機械システム工学科

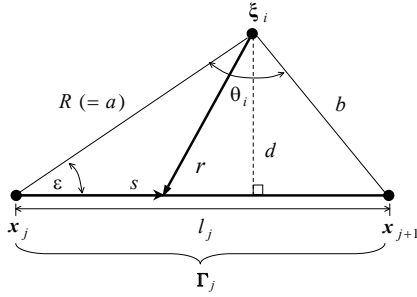


Fig. 1 Parameters in element integration

である自由表面の形状と速度ポテンシャルを初期条件として与えることで境界値問題は閉じる。

上記境界値問題を解くと物体に働く流体圧はベルヌーイの式を用いて計算できるが、その際、流体の速度以外に速度ポテンシャルの時間微分値が必要になる。これは ϕ の時間差分をとることで計算可能であるが、この差分計算を避けるために $\phi_t \equiv \partial\phi/\partial t$ に関する以下の境界値問題を考える。

$$\nabla^2 \phi_t = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial n} = \kappa |\nabla \phi|^2 + \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_B \quad (7)$$

$$\phi_t = -\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - gz \quad \text{on } \Gamma_F \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \quad (9)$$

ここで $\partial/\partial s$ は境界に沿った接線微分を、 κ は境界形状の曲率を表す。 ϕ_t に関する物体表面条件は Tanizawa⁵⁾ の方法で計算できる。

3. 移動境界問題の解法

3.1 積分方程式の解法

2種類の境界値問題 (1)-(5) 式および (6)-(9) 式はグリーン関数の第2定理より積分方程式に変換される。ここで $\phi(\mathbf{x})$ または $\phi_t(\mathbf{x})$ を $u(\mathbf{x})$ で表すと以下のように同じ形の式で記述できる。

$$C(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (10)$$

ここで、 $\boldsymbol{\xi}$ および \mathbf{x} は観測点および積分点で、積分境界 Γ は流体領域 Ω を取り囲んでいる。 $C(\boldsymbol{\xi})$ は free term と呼ばれて

$$C(\boldsymbol{\xi}) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (11)$$

によって計算できる。観測点 $\boldsymbol{\xi}$ が領域の外にある場合 0、滑らかな境界上にあるときは 1/2、領域の内部にあるときは 1 を示すことが知られている。

グリーン関数 $G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ は以下の吹出しで表す。

$$G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (12)$$

水底境界に関する吹出しの鏡像を考えると、水底境界からの積分の寄与は無くな

るので水底境界を積分境界から取除くことができる。また静止水面に対して物体形状が左右対称な場合、対称軸に関して流場は対称となる。この対称軸上では (5)(9) 式が成り立ち、対称軸を流体境界にとれば計算境界を半分にできる。

観測点が境界上にあるとき積分方程式は選点解法により解くことができ、その数値解法は BEM に関する多くの解説書⁶⁾ に述べられている。積分方程式の離散化は複数の境界要素で分割し、各要素毎に積分を実行して行うが、本研究は1次のアイソパラメトリック要素の使用を推奨する。この理由は1次(線形)要素が積分を解析的に実行できる最大の次数だからである。ガウス積分などの数値積分を用いた処理はプログラミングも簡単で補間関数を変更するだけで高次要素まで扱えるため一般的に広く使用されている。要素積分の精度評価⁷⁾ が重要なのは言うまでもないが、我々が BEM を適用したい問題、つまり浮体近傍で自由表面形状の変化が激しい問題では数値積分で計算した形状影響係数は安定した解を与えないことが多い。特に水面衝撃問題ではジェット流の発生により物体面上に薄い流体層が形成されるが、こうした特殊な幾何形状をもつ計算領域を扱う必要性から要素積分を解析的に処理し、形状影響係数を高精度に求めることが数値解析の成功への鍵となる。

1次要素を用いた解析積分の結果を明記した文献はあまりないため、結果について以下簡単に記述する。積分境界 Γ が閉曲線の場合、 N 個の節点で表し、 N 個のセグメントを1次要素で近似とする。 j 番目の要素 Γ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) の長さを l_j とし、Fig.1に示すように積分変数 s を取る。図中の $\boldsymbol{\xi}_i$ 、 \mathbf{x}_j ($i, j = 1, 2, \dots, N$) は境界上の節点を表している。1次要素を用いる場合、 Γ_j に関して以下の補間関数を導入する。

$$\varphi_j^{(1)}(s) = 1 - \frac{s}{l_j}, \quad \varphi_j^{(2)}(s) = \frac{s}{l_j} \quad (0 \leq s \leq l_j) \quad (13)$$

このとき要素内の物理量は要素両端の節点上の離散値を用いて表すことができるので要素 Γ_j に関する積分は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_j} u \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \\ &= u_j \int_0^{l_j} \varphi_j^{(1)} \frac{\partial G}{\partial n} ds + u_{j+1} \int_0^{l_j} \varphi_j^{(2)} \frac{\partial G}{\partial n} ds \\ &= u_j \int_0^{l_j} \left(1 - \frac{s}{l_j}\right) \frac{\partial G}{\partial n} ds + u_{j+1} \int_0^{l_j} \frac{s}{l_j} \frac{\partial G}{\partial n} ds \\ &= u_j \int_0^{l_j} \frac{\partial G}{\partial n} ds + (u_{j+1} - u_j) \int_0^{l_j} \frac{s}{l_j} \frac{\partial G}{\partial n} ds \\ &\equiv u_j A_2 + (u_{j+1} - u_j) A_1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial n} G d\Gamma \\ &= \frac{\partial u_j}{\partial n} \int_0^{l_j} \varphi_j^{(1)} G ds + \frac{\partial u_{j+1}}{\partial n} \int_0^{l_j} \varphi_j^{(2)} G ds \\ &= \frac{\partial u_j}{\partial n} \int_0^{l_j} \left(1 - \frac{s}{l_j}\right) G ds + \frac{\partial u_{j+1}}{\partial n} \int_0^{l_j} \frac{s}{l_j} G ds \\ &= \frac{\partial u_j}{\partial n} \int_0^{l_j} G ds + \left(\frac{\partial u_{j+1}}{\partial n} - \frac{\partial u_j}{\partial n}\right) \int_0^{l_j} \frac{s}{l_j} G ds \\ &\equiv \frac{\partial u_j}{\partial n} C_2 + \left(\frac{\partial u_{j+1}}{\partial n} - \frac{\partial u_j}{\partial n}\right) C_1 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\equiv \frac{\partial u_j}{\partial n} C_2 + \left(\frac{\partial u_{j+1}}{\partial n} - \frac{\partial u_j}{\partial n}\right) C_1 \quad (17)$$

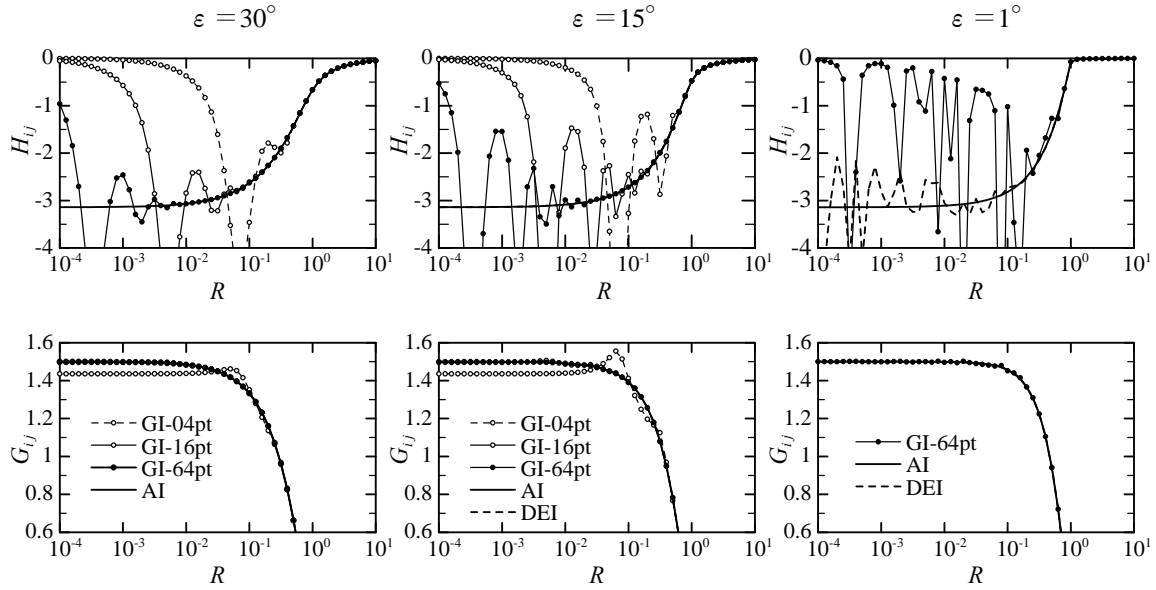


Fig. 2 Evaluation of influence coefficients (GI:Gaussian integration, AI:Analytical integration, DEI:Double exponential integration)

観測点 ξ_j が要素 Γ_j 上にあるか否かで場合分けされて、境界の形状影響を表す (15)(17) 式中の各係数は次式で与えられる。

(i) $\xi_i \neq \mathbf{x}_j, \xi_i \neq \mathbf{x}_{j+1}$ のとき

$$A_1 = \begin{cases} \frac{-1}{2\pi l_j} [(a \cos \varepsilon) \theta_i + d(\ln b - \ln a)] & (d \neq 0) \\ 0 & (d = 0) \end{cases} \quad (18)$$

$$A_2 = \begin{cases} \frac{-\theta_i}{2\pi} & (d \neq 0) \\ 0 & (d = 0) \end{cases} \quad (19)$$

$$C_1 = \frac{-1}{2\pi l_j} \left[a \cos \varepsilon \{-l_j + d\theta_i + (a \cos \varepsilon) \ln a + (l_j - a \cos \varepsilon) \ln b\} + \frac{1}{4} \{(a \cos \varepsilon)^2 - (l_j - a \cos \varepsilon)^2\} - \frac{1}{2} (a^2 \ln a - b^2 \ln b) \right] \quad (20)$$

$$C_2 = \frac{-1}{2\pi} \left[-l_j + d\theta_i + (a \cos \varepsilon) \ln a + (l_j - a \cos \varepsilon) \ln b \right] \quad (21)$$

(ii) $\xi_i = \mathbf{x}_j$ のとき

$$A_1 = A_2 = 0 \quad (22)$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \ln l_j \right) \frac{l_j}{2} \quad (23)$$

$$C_2 = \frac{1}{2\pi} \left(1 - \ln l_j \right) l_j \quad (24)$$

(iii) $\xi_i = \mathbf{x}_{j+1}$ のとき

$$A_1 = A_2 = 0 \quad (25)$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \ln l_j \right) \frac{l_j}{2} \quad (26)$$

$$C_2 = \frac{1}{2\pi} \left(1 - \ln l_j \right) l_j \quad (27)$$

以上は Γ_j に関する積分 (14)(16) 式について示したが、 j 番目の節点に着目すると物理量 $u_j, \partial u_j / \partial n$ にかかる形状影響係数は 2 つの要素 Γ_{j-1} および Γ_j に関する積分から構成される。

$$H_{ij} = \int_0^{l_{j-1}^{(1)}} \varphi_{j-1}^{(2)} \frac{\partial G}{\partial n} ds + \int_0^{l_j^{(1)}} \varphi_j^{(1)} \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (28)$$

$$G_{ij} = \int_0^{l_{j-1}^{(1)}} \varphi_{j-1}^{(2)} G ds + \int_0^{l_j^{(1)}} \varphi_j^{(1)} G ds \quad (29)$$

ここで要素積分の精度について考察する。Fig.2は (28), (29) 式の形状影響係数について、数値積分法と解析的方法で計算した結果を比較したものである。Fig.1に示すように特異点 ξ_i は積分要素に含まれず、端点 \mathbf{x}_j からの距離を R 、ベクトル $(\xi_i - \mathbf{x}_j)$ がベクトル $(\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j)$ となす角を ε と表すことにする。簡単のため要素 Γ_{j-1} および Γ_j の長さを 1 とし、 \mathbf{x}_j において両者は内角 π をなす場合の計算結果である。 $R \rightarrow 0$ または $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限は特異点が要素上またはその延長線上にあることを意味している。Fig.2より R, ε が共に小さくなるにつれて数値積分法による結果は不安定な挙動を示すことがわかり、また被積分関数に $1/r$ を含む H_{ij} の方が早く計算精度が低下することがわかる。積分要素上に特異点がない場合に、数値積分を用いた (28)(29) 式の計算結果がこのような挙動を示すことは興味深く、水面と物体表面の接触角が小さくなるような運動をともなう水波問題を解く場合には十分注意する必要がある。2次元問題の場合、(10) 式の代わりにコーシーの積分公式を用いて境界値問題を解く方法がある。こうしたアプローチによる研究例⁸⁾が以前は比較的多くみられたが、複素積分は解析的に実行されるので数値積分による精度低下の問題は表面化しなかったものと思われる。

すべての節点に関してこれらの形状影響係数を計算すると、積分方程式 (10) 式の離散化式は次のようにマトリクス表示できる。

$$[H_{ij}] \{u_j\} = [G_{ij}] \{\partial u_j / \partial n\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (30)$$

境界条件を考慮すると、境界上の未知数は N 元連立方程式の解として求めることができる。

3.2 移動境界の計算法

ある時間における境界値問題が解かれると、次の時間ステップの境界値問題を設定するために移動境界の境界条件を求めなければならぬ。これは(3)、(4)式を時間積分することによって計算でき、次式で書ける。

$$\mathbf{x}_j(t+\Delta t) = \mathbf{x}_j(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left\{ t \frac{\partial \phi(\tau)}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial \phi(\tau)}{\partial n} \right\} d\tau \quad (31)$$

$$\phi_j(t+\Delta t) = \phi_j(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla \phi(\tau)|^2 + gz(\tau) \right\} d\tau \quad (32)$$

ここで \mathbf{t} , \mathbf{n} は単位接線ベクトルおよび単位法線ベクトルを表す。(31)(32)式の時間積分には4次のルンゲ・クッタ法を用いる。設定した時間ステップ Δt が大きすぎるため、時間積分で誤差が生じないように以下の条件を課している。

$$\frac{\max\{|\nabla \phi_1|, |\nabla \phi_2|, \dots, |\nabla \phi_{N_F}|\}}{\min\{\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_{N_F}\}} \times \Delta t \leq c_s \quad (33)$$

ここで $\nabla \phi_j$, Δs_j は節点 \mathbf{x}_j の速度および要素 Γ_j の長さを表し、 N_F は移動境界 Γ_F 上の節点総数である。時間ステップを調節する係数 c_s は $1/3$ としている。

ラグランジ的に計算点を追跡する計算では節点の空間的な配置を制御することが不可欠となる。曲率が大きく、規模が小さな形状表現には解像度を高くする必要がある。しかし、解像度すなわち節点密度が局所的に高すぎたり低すぎたりするのは計算精度の面から好ましくない。特に速度勾配が大きい部分では計算精度の低下が計算の不安定さを招くからである。効率よく節点を配置するために以下の準一様性条件を課している。

$$\frac{\Delta s_{j-1}}{c_u} \leq \Delta s_j \leq c_u \Delta s_{j-1} \quad (34)$$

ここで c_u は一様性を制御するパラメータで1より大きい定数である。本研究では常に1.5としている。時間ステップ毎に自由表面境界を形成する節点が準一様性条件を満たしているかチェックしながら計算し、損なわれている点については3節点を用いた2次曲線補間により再配置させている。

次に接線方向の微分計算法について述べておく。境界の長さを s とし、微分したい物理量と s をともにパラメトリック表示すると、接線微分は次式で計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi(j)}{\partial s(j)} &= \frac{\partial \phi(j)}{\partial j} \bigg/ \frac{\partial s(j)}{\partial j} \\ \frac{\partial y(j)}{\partial s(j)} &= \frac{\partial y(j)}{\partial j} \bigg/ \frac{\partial s(j)}{\partial j} \\ \frac{\partial z(j)}{\partial s(j)} &= \frac{\partial z(j)}{\partial j} \bigg/ \frac{\partial s(j)}{\partial j} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここでパラメータ j は節点 \mathbf{x}_j の節点番号を表している。 $\partial/\partial j$ の計算には、 ϕ_j および \mathbf{x}_j に対してラグランジェの5点補間公式を適用し微分計算を行っている。(7)式における2階微分の計算にも上記計算法を応用できる。

3.3 初期条件の設定

物体が動き出す直前まで流体への攪乱はないので速度ポテンシャルと波面変位の初期条件として先ず $\phi = \zeta = 0$ を選ぶことができるだろう。しかし、初期攪乱が無い状態から始めた計算は

非常に小さな時間ステップを要し、計算誤差⁹⁾も大きくなるばかりでなく必ずしも正しい解が得られるとは限らない。水面衝撃は非常に短い時間スケールで生じるので自由表面の変化率は無限大に近いと考えられる。このような初期状態に関する研究¹⁰⁾¹¹⁾も行われており、これらの解を初期値としてその後の計算をBEM計算に引き継がせる方法が好ましいが、任意の物体形状について解が得られている訳ではない。従って、本報告では任意の物体形状についても楔の自己相似解を初期条件として適用する方法を提案する。近似解を得るための概念図をFig.3に示す。楔の自己相似解に関する波面形状および速度ポテンシャルを \mathbf{x}^* および ϕ^* として次式により初期条件としての近似解を計算する。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* \times H_w \quad (36)$$

$$\phi = \phi^* \times HV \quad (37)$$

ここで H は静止状態の物体の没水深さを、また H_w は図の一点鎖線で示された近似すべき楔の没水深さを表している。 H_w は水面形状を物体表面に合わせるために導入した。 V は物体の水面への突入速度を表す。水面との接触時に物体表面上に発達する薄い流体層をジェット領域と呼ぶことにすると、実際の物体形状に応じて図のようにジェット領域の形状を修正する。この方法は物体形状が厳密には異なるという点で合理性を欠いているが、実現象ではジェット領域は不連続な断片的液体であることや、ジェット領域が物体に与える圧力は大気圧と等しいことなどを考えあわせると許容できる近似と言える。また、この近似は初期ステップの計算に使用されるだけで、それ以降の計算にはBEMによる厳密な境界条件の下で計算が実行されるので実用上は問題ないと考えている。楔の自己相似解は、例えば著者の方法⁹⁾で予め計算し、波面形状と速度ポテンシャル値をデータベース化しておけば良い。デッドライズ角が 30° 以下となる計算では極めて有効な方法である。

4. 流体飛沫に関する計算モデル

4.1 ジェット領域の分離

楔の水面衝撃問題の数値解法に関して既に著者⁹⁾はジェット領域の計算モデルを示しているが、これは平面状の物体表面で流体層が発達することを想定したものであり自己相似解のような自由表面形状を得るのには都合良いものであった。ポテンシャル理論に基づく計算法ゆえに解析解と合致するジェットの数値表現が可能であるともいえる。しかし、BEMは領域が連続的に流体で満たされていることを前提としている計算であり、水面衝撃の後も物体にはり付いた流体層を計算し続けることは実現象と異なるモデル化になるためジェット領域で負圧や振動を示すといった数値解析上の問題点が生じる。任意物体形状への適用も想定すると流体層の数値表現は必ずしも必要ではないため、むしろジェット領域を現実的に分離する方法を本報告では提案する。この計算モデルにより数値解析上の多くの問題点を回避できる。Fig.3は計算の初期状態を表したものであるが、(a)はジェット領域を人工的に分離することを示している。このとき、ジェット領域を分割する境界要素は必ずしも物体表面に垂直である必要はないし、また1つの境界要素で構成する必要もない。

本計算モデルを実行するには領域分割法の考え方が適用できるが、2通りの方法が考えられる。Fig.4はその概念図を示したものである。領域 Ω_2 がジェット領域の先端部を表すと考えればよ

い。図中に (a) と示す方法は BEM による領域分割法を適用するもので、理論的に厳密な方法である。一方、図中に (b) と示した方法は流場を近似的に扱うことで一つの領域を分離する方法である。先ず (a) の方法では 2 つの領域を連立して解くので分割する境界上の値を合理的に計算でき、領域を分離した後も正しく計算を続けることができる。一般的に領域分割法の使用により計算精度が低下するのではないかと懸念する向きもあるが、この問題は領域を分割する際のコーナーにおいてポテンシャルフラックスが合理的に接続されないことが原因である。本報告での対処法を Fig.5 に示すが、境界端点のコーナーに 2 重節点を導入すると合理的に接続条件を満足させることができる。境界の離散化に一定要素を使用する場合にはこの点が不十分になるので注意しなければならない。インターフェース境界の端点における接続条件を以下に示す。

(i) On the boundary with Neumann condition

$$\begin{aligned} (\phi)_{j+1} &= (\phi)_j & \text{at Node } j+1 \\ (\phi)_k &= (\phi)_{k+1} & \text{at Node } k \end{aligned} \quad (38)$$

(ii) On the boundary with Dirichlet condition

$$\begin{aligned} (\phi)_{j+1} &= (\phi)_j & \text{at Node } j+1 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_k &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_{j+1} & \text{at Node } k \end{aligned} \quad (39)$$

(iii) On the interface boundary

$$\begin{aligned} (\phi)_j &= (\phi)_{k+1} & \text{at Node } j \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_{k+1} &= -\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_j & \text{at Node } k+1 \end{aligned} \quad (40)$$

ここで $j, j+1$ および $k, k+1$ のインデックスは Fig.5 における 2 重節点の番号を表す。基本的には 2 重節点でポテンシャルが連続になる条件が課されるが、自由表面のようにディレクリ型境界上にある 2 重節点ではポテンシャルフラックスが連続になる条件を課す必要がある点に注意すべきである。

次に (b) の方法はジェットやスプラッシュといった流体噴出を伴う単純な流れに対して有効である。ジェット領域における流れはほとんど 1 次元的と言って、等ポテンシャル線は図のような形になる。分割する境界上の解は周囲の値から補間することで容易に推定できて、領域を分離した後も問題なく計算を続けることができる。(a) の方法に比べると適用範囲は限定されるが、実用的な方法と言える。本報告では、初期の計算ステップでは方法 (a) を用いているが、以後の計算ステップではジェット領域の分離に方法 (b) を積極的に使用している。ただし、発達したジェット領域を一度に大きく分離したり、ジェットが生じていない領域に方法 (b) を実行すると計算が直ちに終了することはないが、圧力計算値にノイズが現れたり、モデル化が不十分なために正しい解へと発展しない可能性があるのに注意すべきである。

計算上ジェット領域の発達をある程度抑えるのが実現象に即しており、そのときジェット領域の長さや厚さは液体分離実行の判断基準となるパラメーターである。著者は以下の無次元長さを定義して使用している。

$$L(t) \equiv \frac{l(t)}{l(0)} \left/ \left\{ \frac{H(t)}{H(0)} \right\}^\alpha \right. < L_{max} \quad (41)$$

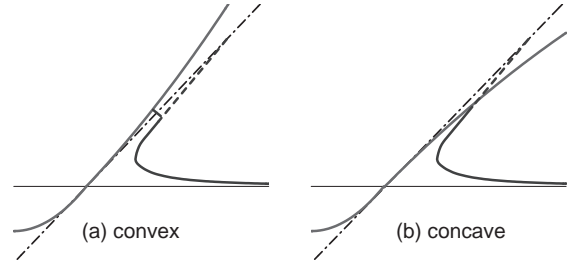
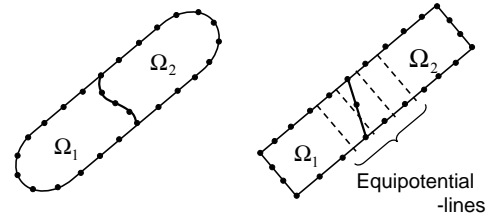


Fig. 3 Approximate solutions for initial conditions using self-similarity solutions



(a) Rational D.D. using BEM (b) Practical D.D. based on shallow water approximation

Fig. 4 Conception diagram for the Domain-Decomposition of the jet domain

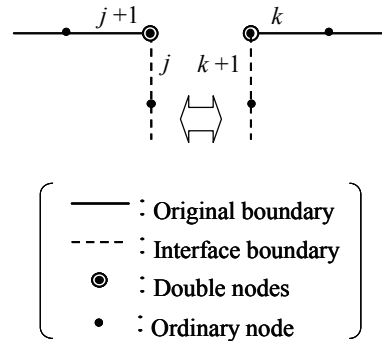


Fig. 5 Node arrangement for matching domain

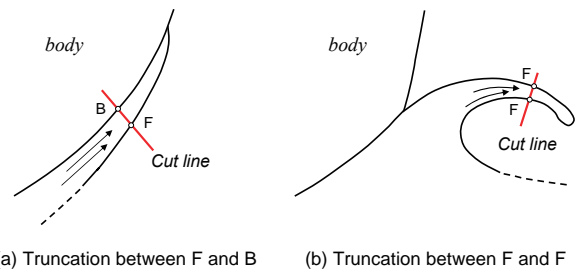


Fig. 6 Conception diagrams of truncation technique for jet flow and splash ejection

ここで、 $l(t)$ および $H(t)$ はある時間におけるジェット領域長さや物体の没水深度を表し、 α は流れの相似性を表す一つの尺度と考えられる。 $l(t)$ はワグナー理論では接水幅に対応する量である。重力影響がない楔の自己相似流れでは $\alpha = 1$ と考え、このとき無次元長さは $L(t) = 1$ となるが、突入速度が一定であっても任

意形状の場合にはジェット領域の発達を表現するのは容易ではない。無次元長さ $L(t)$ の適用は水面衝撃とみなせる現象の継続時間の算定とも関係する議論であるが、(41) 式は衝撃現象下でジェット領域の長さに関する 1 つの目安になる。後述する円断面形状物体の水面衝撃解析例では経験的に α は 0.5, L_{max} は 0.8 として、無次元長さ $L(t)$ が上限値 L_{max} を超えたときにジェット領域を分離している。

4.2 スプラッシュの表現

BEM を用いた MEL スキームの計算の特徴はポテンシャル流れの枠組みではあるが、複雑な自由表面の変形を時系列で記述できる点であった。既に述べてきたジェットやスプラッシュ、あるいは大波高で生じる砕波などの現象はあるレベルまではシミュレーション可能であるが、スプラッシュが再び自由表面に突っ込む現象については境界が交差することになるので原理的にそれ以上は計算できない。しかし、既に述べたようにスプラッシュなどの流体噴出では必ずしも流体は連続していないという視点に立つと計算領域から流体の一部を分離するという計算モデルがそのまま適用できて、計算境界が交差することは回避できる。物体の運動により生じるスプラッシュを人工的に分離する概念図を Fig.6 に示す。点 F,B はそれぞれ自由表面および物体表面上の点であることを表している。ジェットやスプラッシュの先端を切り取ることは計算対象とする流体全体から見るとわずかな量であり、質量保存側に与える影響は非常に小さい。しかし、切り取る領域が小さくとも水面衝撃によるジェットやスプラッシュの運動エネルギーは大きいので、エネルギーの一部が散逸することになる。

5. 解析例

5.1 円断面形状物体の水面落下

円断面形状物体が一定速度で静水面を貫通する 2 次元着水問題を考える。この場合、物体表面条件 (2) 式における突入速度は

$$v_B = (0, -V) \tag{42}$$

と表される。本解析例では円の突入速度 V は 4.0m/sec, 半径 a は 1.0m とする。最初の計算ステップにおける円の没水深度は H は 0.035m であり、この時点が計算開始の時刻である。

運動直後の水面形状の変化を Fig.7 に示す。計算はすべて空間座標系で実施しているが、この図では物体に固定した座標系での結果に書き直したものである。楔のように物体表面が直線である場合と同様に曲線の場合もまた物体表面上に形成されるジェット領域がシュミレートできる。図にはジェット領域の分離の仕方が異なる 2 つの方法で計算された結果が比較されている。本計算法では物体表面上の流体は自由に滑ることができる条件を課しており、液体分離の仕方によってジェット領域の長さが異なる結果を得る。cal1 は 4.1 節で述べた方法によるものであり、ジェット領域が発達する程度は液体分離を実行する基準に依存している。一方、cal2 はジェット領域の先端のみを分離する方法⁹⁾によるものであり、物体表面に沿って薄い流体層が長く発達する結果になる。しかし、余りに長い流体層をシミュレートするのは非現実的だと考えられる。

物体底部近傍における圧力時系列の計算結果を Fig.8 に示す。時間の刻み幅は計算開始から 0.025s までは 0.025msec, それ以降は 0.25msec で行っている。計算に用いた節点数は物体表面上に終始 61 点, 自由表面上に 261 点であり、全ての境界上に

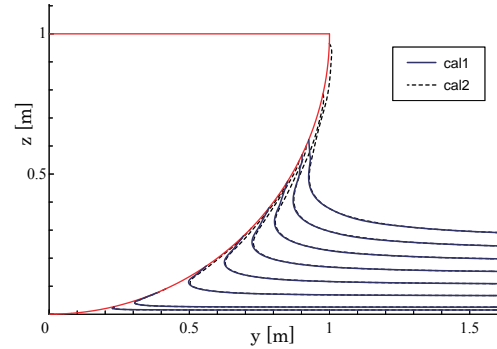


Fig. 7 Free surface evolution in water entry of a circular cylinder with radius $a=1.0m$ and constant speed $V=4.0m/sec$

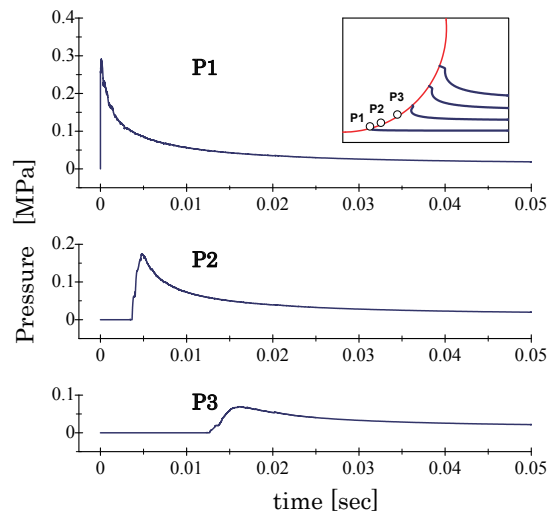


Fig. 8 Pressure time histories in water entry of a circular cylinder with radius $a=1.0m$ and constant speed $V=4.0m/sec$

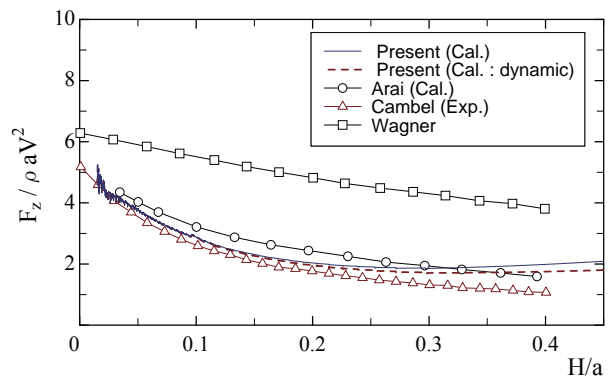


Fig. 9 Slamming coefficients of the circular cylinder (Present Calculation : $a=1.0m$, $V=4.0m/sec$)

は合計約 400 点を使用している。また、計算領域の大きさは水槽深さを 10m, y 方向の水槽幅は 25m とした。水槽幅を大きくとっても水槽端部から波動の反射は生じるが、問題に影響を与える量ではない。最後に、物体の没水深度と半径の比を横軸にとり

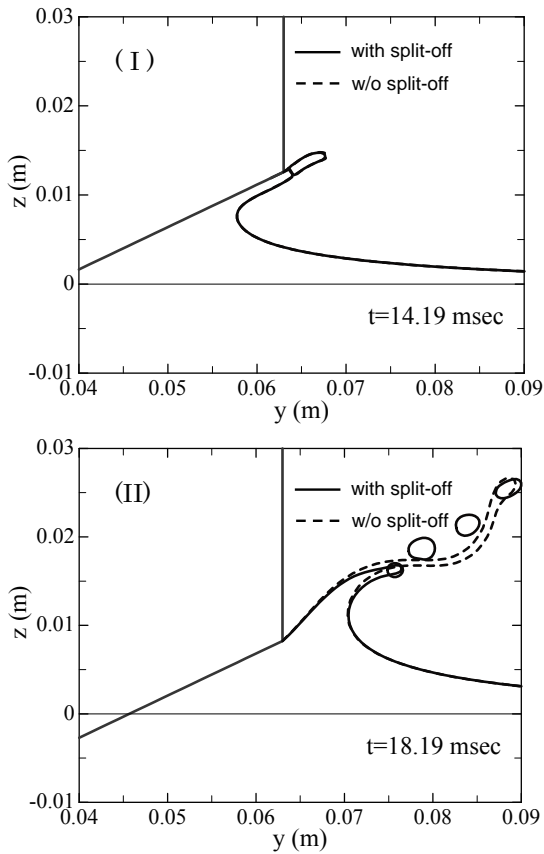


Fig. 10 Artificial liquid breakup using truncation technique ($V=1.08\text{m/sec}$, $B=0.126\text{m}$, $\beta=25^\circ$)

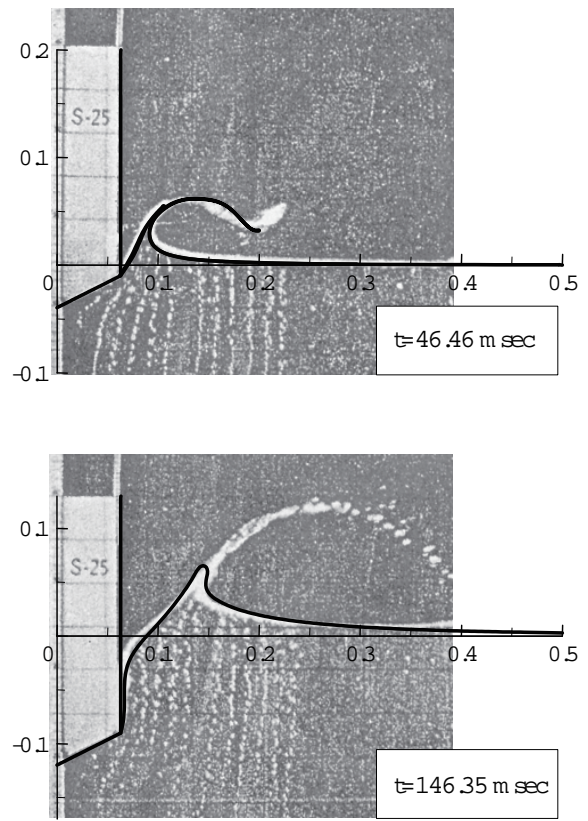


Fig. 11 Comparisons between experimental and computational results ($V=1.08\text{m/sec}$, $B=0.126\text{m}$, $\beta=25^\circ$)

スラミング係数を比較した結果を Fig.9に示す。図には参考文献¹²⁾¹³⁾から読み取った実験値や他の計算値を示している。本計算法では静水圧の寄与を見るために変動圧成分のみの計算結果も示している。計算開始直後にノイズのような振動が見られるが、これは計算スケールが小さいことによる計算精度の不足と、そのような状況でジェット領域の分離を行なうことに伴う計算精度の低下が主な原因である。ただし、トレンド成分がやや歪んで見えるのは3.3節で述べた近似的な初期条件を使用したことによる影響と考えられる。図より本計算法による結果は実験値を非常によく捕らえており、本計算法が信頼できる解を与えるものと言える。また本計算法のように物体表面の流体に関するフリースリップ条件下では Fig.7の計算範囲をさらに超えて長時間の計算が可能である。しかし、Fig.9からは大きさは小さいものの静水圧の影響が見られる付近から計算値が実験値から離れていく傾向が見られる。これは実際の流れにおける剥離に関連する現象が影響している可能性もあるためこの差異に関する解明は今後の課題としたい。

5.2 柱状滑走体への応用

飛沫の発生が特徴的な滑走艇まわりの流れを数値シミュレーションするために、滑走艇を単純化したチェーン付きの柱状物体を考える。船長方向に一樣な楔型断面をもち、トリムした状態で平水中を一定速度で滑走するとしよう。細長船理論の1つである2D+T法のアプローチでは、この問題はストリップ法のように

2次元断面に関する造波問題で表される。前進速度を U 、航走時のトリム角を τ とし、船幅を B 、水面下船底部のキール長さを L_k 、静止時の船底部デッドライズ角を β と定義する。断面形状が一樣な場合には2次元物体の着水問題として扱うことができる。問題の定式化は付録に記述しているが、物体表面条件(2)式における速度は

$$\mathbf{v}_B = (0, -V) = (0, -U \tan \tau) \quad (43)$$

と表される。また法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = \begin{cases} (\sin \beta_1, -\cos \beta_1) & \text{on bottom} \\ (1, 0) & \text{on side} \end{cases} \quad (44)$$

と考えればよい。ここで β_1 はトリム状態で yz 平面上にある楔型のデッドライズ角である。

本計算法でチェーン部から噴出する飛沫をシミュレートした結果を Fig.10に示す。異なる時間での計算結果が示されているが、流体噴出を人工的に分離する操作を行っている場合と行わない場合の2種類の結果を共に示している。Fig.10において、上の結果(I)はスプラッシュを分離している瞬間で、この操作を実行する判断基準としては発達したスプラッシュ部の長さを指標としている。一方、下の結果(II)では(I)に引き続き、3度のスプラッシュの分離を実施した結果である。分離した液滴内部が流体で満たされていると仮定すると、3.2節で述べた方法で時間発展させ

ながら液滴に関する境界値問題を時々刻々と解くことでその運動を追跡できる。液滴に関する問題の定式化は付録に示しているが、境界値問題を解く場合には液滴境界を構成する計算点を補間することで十分増やして計算を行っている。液滴の運動計算は船体の流体力計算には影響しないので本質的なものではないが、これらの方法により飛沫の挙動をある程度表現できる。

Kikuhara¹⁴⁾は飛行艇の着水時の飛沫を調査するために系統的に物体形状を変化させて水槽試験を実施しており、チェーン部の形状と飛沫の関係を調査している。本解析例で用いている楔型柱状体についても実験を実施している。2次元解析におけるそれらの結果と本計算法の結果を比較したものを Fig.11に示す。図中上段の $t = 46.46\text{msec}$ に相当するスナップショットには Fig.10と同様に人工的に液体分離を行なった場合と行わない場合の2種類の計算結果も示されている。この図では形状の違いがほとんど区別できないくらい両者は重なっており、図中の鞭のように細長く伸びている流体領域が液体分離の操作を行わないスプラッシュの計算結果である。一方、液体分離を行なった計算については Fig.10 (II) のような分離した液滴までは描画しておらず、スプラッシュの先端座標はグラフ上で概ね (0.11, 0.06) に位置している。また、この形状は $t = 46.46\text{msec}$ の瞬間に液体分離したものではなく Fig.10のようにチェーン部から噴出する際に分離し、その後のスプラッシュ形状の変化をシミュレートして得られた結果である。実験によるスプラッシュ形状の写真と比較すると人工的な液体分離を行わなければ先端付近までスプラッシュの発達を極めて忠実にシミュレートできることがわかる。しかし、計算を続けていくとスプラッシュ部の厚さが薄くなる部分で境界同士が接触するため、それ以上の計算を続けることはできなくなる。液体分離に関する現象をシミュレートできる方法が必要になるが、本計算法では人工的な分離操作によるモデル化を行い、これにより計算を継続させることが可能になる。液体分離を行なった計算だけが長くシミュレートできるので、下段に示された $t = 146.35\text{msec}$ の計算例はこれに対応した結果である。計算結果を写真と比較すると、液滴となって分裂しているスプラッシュの先端部を除いて水面形状を非常によくシミュレートできていると言える。

次に人工的に行なう液体分離が流体力計算に及ぼす影響を見るために、2つの計算結果を比較した。Fig.12は2次元物体に働く上下力の時系列である。両者にほとんど差は見られないが、液体分離を実行しない場合には上述の理由によりある時間以降の計算はできない。

最後に柱状滑走体まわりの流れのシミュレーション結果を Fig.13および Fig.14に示す。ともに右舷側が生計算結果であり、左舷側には飛沫の挙動を可視化するために液滴の軌跡を繋いだもので、静水面からの高さによる等高線表示が示されている。Fig.13は船底部を水面下から見上げた状態で飛沫の軌跡のみを描いたものである。平野ら¹⁵⁾は飛沫の観測結果を報告しているが、滑走艇の飛沫には Fig.10に示すチェーン部からの流体噴出だけでなく、もっと早い段階で船底との接水部先端からの流体噴出がある。後者については Fig.7と同様にジェット領域を分離しながら計算しており、その結果は Fig.13の図中にも含まれている。しかし、後者の場合に分離される流体領域は前者に比べると小さく、その運動を追跡するのは容易ではない場合もあるため、分離した全ての液滴挙動を計算するまでには至っていない。Fig.14は滑走体まわりの自由表面流れをシミュレートしたもので、船長方

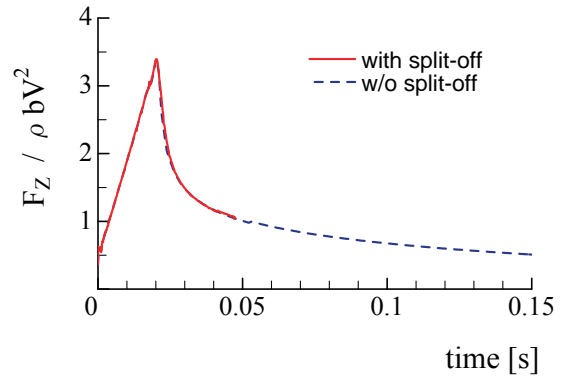


Fig. 12 Influence of domain split-off on vertical hydrodynamic force acting on a body ($V=1.08\text{m/sec}$, $B=2b=0.126\text{m}$, $\beta=25^\circ$)

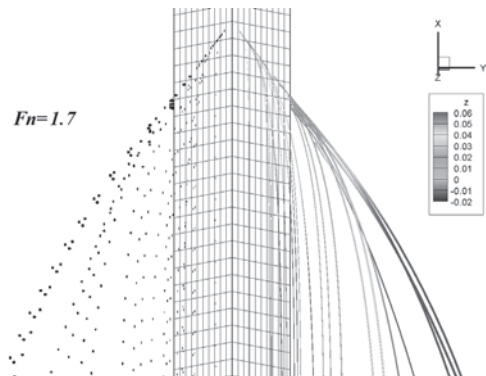


Fig. 13 Simulated spray generation by a prismatic planing-hull ($U=5.33\text{m/sec}$, $L_k=1.0\text{m}$, $B=0.126\text{m}$, $\tau=11.5^\circ$, $\beta=25^\circ$)

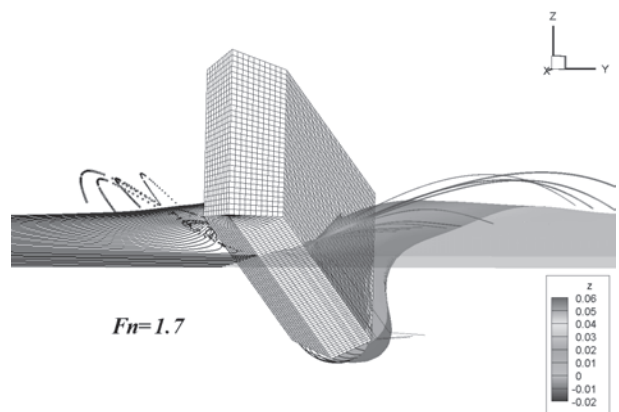


Fig. 14 Simulated free surface flow by a prismatic planing-hull ($U=5.33\text{m/sec}$, $L_k=1.0\text{m}$, $B=0.126\text{m}$, $\tau=11.5^\circ$, $\beta=25^\circ$)

向に $1.5L_k$ 分の長さの範囲を計算した。各時間ステップで計算に使用した節点数は物体表面に 31 点、自由表面に約 260 点であり、境界上には合計約 350 点を使用した。また計算領域は水深は 5m, y 方向の自由表面の長さは 10m である。時間の刻み幅については船長を 20000 分割した計算結果になっている。本計

算法により船首部の飛沫の発生から船尾に形成される大きな空洞域に至るまで大変形する自由表面流れをシミュレートできることがわかる。

6. 結 言

飛沫をともなう非線形自由表面流れに関する数値計算法の有効性について調査した結果、以下の結論を得た。

1. 水面衝撃にともなうジェットやスプラッシュを形成する流体の一部を人工的に分離する新しい計算モデルを示した。インパクトの瞬間を補足する通常計算だけでなく、インパクト後も継続的に流れのシミュレーションや流体力の計算を実行できる。
2. 円断面形状物体の着水時の衝撃解析において BEM を用いた本計算法は有効である。底面付近の衝撃圧についてノイズの少ない安定した結果を得ることができ、計算される衝撃時のスラミング係数は実験値と良く一致する。
3. 楔型物体のチェーン部から噴出するスプラッシュの発達がシミュレーション可能であり、その形状については実験結果と非常に良く一致する。ただし、長時間シミュレーションするためには流体を分離しながら計算していくことが必要である。分離された液滴に関する境界値問題を解いて飛沫の軌跡を計算することも可能である。
4. MEL スキームにより任意形状物体の水面衝撃を解析する場合、楔の自己相似解を用いた近似的初期条件を導入することにより実用的なシミュレーションが可能になる。また、提案した計算スキームによりジェットに伴う薄い流体領域形状を扱う数値計算に対してロバスト性が増す。

参 考 文 献

- 1) 内藤 林, 荒井 誠, 谷澤克治 : 時間領域の非線形数値計算法, 運動性能研究委員会第 13 回シンポジウム, 第 1 編, 1997, pp.97-114.
- 2) 木原 一 : 衝撃運動にともなう物体と波の非線形相互作用に関する一考察, 関西造船協会論文集, 第 242 号, 2004, pp.37-44.
- 3) 木原 一 : 柱状滑走体まわり流れの境界要素解析, 日本船舶海洋工学会講演論文集, 第 1 号, 2005, pp.217-218.
- 4) 木原 一 : 境界要素法による船首衝撃現象の解明について, 日本船舶海洋工学会講演論文集, 第 3 号, 2006, pp.415-417.
- 5) Tanizawa, K. : A Nonlinear Simulation Method of 3-D body Motions in Waves, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.178, 1995, pp.96-105.
- 6) Katsikadelis, J. T. : 境界要素法 -基本と応用- (田中正隆訳), 朝倉書店, 2004.

- 7) Grilli, S. T. and Svendsen, I. E. : Corner problems and global accuracy in the boundary element solution of nonlinear wave flows, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.7, No.4, 1990, pp.178-195.
- 8) Lin, W. M., Newman, J. N. and Yue, D. K. : Nonlinear Forced Motions of Floating Bodies, Proceedings of 15th Symposium on Naval Hydrodynamics, 1984, pp.33-49.
- 9) 木原 一 : 衝撃運動にともなう物体と波の非線形相互作用に関する一考察 (続報), 関西造船協会論文集, 第 243 号, 2005, pp.31-40.
- 10) Korobkin, A. A. : Jetting by floating wedge impact, Proceedings of 19th International Workshop Water Waves and Floating Bodies, 2004.
- 11) Iafrati, A. and Korobkin, A. A. : Initial stage of flat plate impact onto liquid surface, Physics of Fluids, Vol.16, 2004, pp.2214-2227.
- 12) Arai, M., Cheng, L.-Y. and Inoue, Y. : A Computing Method for the Analysis of Water Impact of Arbitrary Shaped Bodies, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.176, 1994, pp.233-240.
- 13) Cambell, I. M. C., and Weynberg, P. A. : Measurement of Parameters Affecting Slamming, Wolfson Unit for Marine Technology and Industrial Aerodynamics, Univ. of Southampton, Report No.440, 1980.
- 14) S. Kikuhara : A study of spray generated by seaplane hulls, Journal of the Aero/Space Sciences, June, 1960, pp.415-428.
- 15) 平野 進, 稲津 昌平, 姫野 洋司 : 柱状滑走体の spray の観測, 関西造船協会誌, 第 214 号, 1990, pp.65-73.
- 16) 杉野 隆三郎, 登坂 宣好 : 液滴挙動の境界要素シミュレーション, 第 6 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 1992, pp.607-610.

Appendix

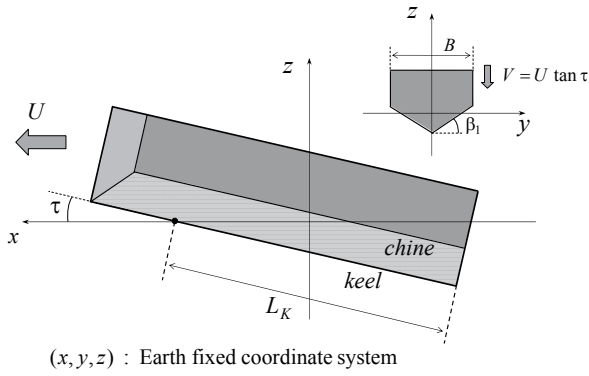
A 柱状滑走体の非線形造波問題

A1 2D+T 法による造波問題の定式化

本論 5.2 節で扱う柱状滑走体に関する造波問題の定式化を行う。鉛直上向きに z 軸, 水平面上に xy 平面をとり, 速度 U で航走する船とともに移動する座標系を考える。今, 船体中心線上に x 軸を一致させ船の進行方向を x 軸正方向にとると, 船の定常造波問題は速度ポテンシャルを用いて下記のように表される。

$$[L] \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A-1})$$

$$[H] \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = U n_x = U \sin \tau \cos \beta \quad (\text{A-2})$$



(x, y, z) : Earth fixed coordinate system

Fig. A-1 Coordinate system

$$[K] \quad -U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = \zeta \quad (\text{A-3})$$

$$[D] \quad -U \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\zeta = 0 \quad \text{on } z = \zeta \quad (\text{A-4})$$

さらに遠方での波の放射条件 [R] を適切に設定することにより、境界値問題を解くことができる。

ここで細長船近似を導入する。船の幾何学形状について幅と吃水が船長に比べて十分小さく船体近傍の流場における各軸方向の微分に関して

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A-5})$$

であるとすると、このとき流場の支配方程式は y, z に関するラプラス方程式で表され、境界条件についても高次項を省略すると船体近傍の2次元問題になる。(A-1)-(A-4)式は船体とともに移動する座標系で記述されているが、Fig.A-1に示すように空間座標系で考えると

$$\frac{\partial}{\partial t} = -U \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{A-6})$$

なるガリレオ変換が成り立つので船体近傍の造波問題は次式で表される。

$$[L] \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A-7})$$

$$[H] \quad \frac{\partial \phi}{\partial N} = V \cos \beta_1 = U \tan \tau \cos \beta_1 \quad (\text{A-8})$$

$$[K] \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = \zeta \quad (\text{A-9})$$

$$[D] \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\zeta = 0 \quad \text{on } z = \zeta \quad (\text{A-10})$$

$$[I] \quad \phi = \bar{\phi}, \zeta = \bar{\zeta} \quad \text{on } z = \zeta \quad \text{at } t = 0 \quad (\text{A-11})$$

船体表面条件 (A-8) 式の $\partial / \partial N$ は yz 平面に投影した船体上の法線方向微分を表している。(A-11)式は自由表面に関する初期

条件であり、船体近傍の造波問題は初期値境界値問題として定式化される。船首を起点として船尾方向へ計算を行う、 yz 平面上の船体断面についての境界値問題 (A-7)-(A-10) を解き、続いて移動境界となる自由表面を (31)(32) 式により更新しながら計算を進めていく。

A2 液滴運動に関する問題の定式化

本論中の Fig.10, Fig.13, Fig.14 のようにスプラッシュから分離した後の液滴挙動をシミュレートするために問題を定式化する。液滴内部が理想流体で満たされ、ポテンシャル流れを仮定すると、以下のように記述できる。

$$[L] \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in } \Omega_0 \quad (\text{A-12})$$

$$[K] \quad \frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \nabla \phi \quad \text{on } \Gamma_0 \quad (\text{A-13})$$

$$[D] \quad \frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + gz - \nu \kappa - \mu \phi \quad \text{on } \Gamma_0 \quad (\text{A-14})$$

$$[I] \quad \phi = \bar{\phi}_c, \quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}_c \quad \text{on } \Gamma_0 \quad \text{at } t = t_c \quad (\text{A-15})$$

ここで Ω_0 は液滴の流体領域を表し、領域を囲む境界を Γ_0 と表している。液面の力学的境界条件式の ν および κ は表面張力係数および液面の曲率であり、 μ は減衰係数を表し、液滴運動の減衰効果¹⁶⁾を取り入れるために導入している。また初期条件 (A-15) 式中の添字 c は液滴をスプラッシュから分離した瞬間の値であることを明示するものである。自由表面と同様に液滴の運動を (31)(32) 式を用いて計算できる。