

横观各向同性岩体孔径变形法的三维地应力分析计算*

何江达 范景伟 王桂芳 宗仁怀
(四川大学水电学院 成都 610065)

摘要 根据各向异性弹性理论的复变函数方法, 导出了远处加载时横观各向同性岩体孔周径向位移的理论公式, 结合孔径变形法地应力量测特点, 建立了横观各向同性岩体三维地应力计算理论, 并开发了相应的计算分析软件, 给出了一个典型算例。

关键词 横观各向同性岩体, 三维地应力量测, 孔径变形法

分类号 TD 311 **文献标识码** A **文章编号** 1000-6915(2000)03-0299-05

1 前言

地应力是赋存于岩体中的天然内应力, 目前已有几十种量测地应力的方法应用于实际工程, 如应力恢复法、钻孔应力解除法、水压致裂法及地球物理方法等^[1, 2]。其中三孔交汇应力解除法应用最为广泛, 该方法由量测的孔径变形推求地应力时, 基本上都采用各向同性的弹性理论。事实上, 岩体的力学性质十分复杂, 具有明显的非线性与非确定性特征, 能视为各向同性的岩体并不多见, 对于各向异性岩体, 若利用各向同性介质的位移-应力关系来推求地应力必然带来较大的误差。因此建立各向异性岩体的孔周径向位移理论及相应的三维地应力计算方法, 具有重要的理论价值和良好的应用前景。本文针对自然界普遍存在的横观各向同性(层状)岩体, 运用各向异性弹性理论的复变函数方法, 推导远处加载条件下横观各向同性岩体孔周径向位移的理论公式, 进而建立横观各向同性岩体孔径变形法的三维地应力计算理论。

2 坐标系统定义

本文理论推导及实测地应力计算过程中涉及如下3个坐标系。

(1) 基本坐标系 $X Y Z$ 。

X 轴正向为正北方向; Y 轴正向为正西方向; Z 轴为正向垂直向上。

(2) 钻孔坐标系 $x_1 y_1 z_1$ 。

(3) 岩体结构坐标系 $x_2 y_2 z_2$ 。

其中第(2)和第(3)个坐标系又分以下两种情况描述。

2.1 钻孔轴线与各向同性平面法线平行

取钻孔前进方向为各向同性面法线正向, 此时坐标系 $x_2 y_2 z_2$ 与 $x_1 y_1 z_1$ 重合, 如图1所示。

z_1 轴正向: 钻孔前进方向。

x_1 轴正向: 位于 $x_0 y_0$ 平面内(即水平面内), 其正向为人面对钻孔时水平线重合的直径左向。

y_1 轴正向: z_1 正向和 x_1 轴正向的矢积 $y_1 = z_1 \times x_1$ 。

2.2 钻孔轴线与各向同性平面法线斜交

z_1 轴正向: 钻孔前进方向。

z_2 轴正向: 各向同性平面法线的仰视方向。

$y_1(y_2) = z_2 \times z_1$, 位于各向同性面内且垂直于 z_1 轴。

$x_1 = y_1 \times z_1$, 位于钻孔横切面内并与 y_1 轴垂直。

$x_2 = y_2 \times z_2$, 位于各向同性面内且垂直于 y_2 轴。

3种坐标系相对几何关系如图2所示。

1999年1月13日收到初稿, 1999年11月16日收到修改稿。

* 国家“八五”攻关子题 85-208-02-05-02(1)部分内容。

作者 何江达 简介: 男, 38岁, 硕士, 1982年毕业于四川大学水利系水工建筑专业, 现任副教授, 主要从事岩石力学与工程方面的研究工作。

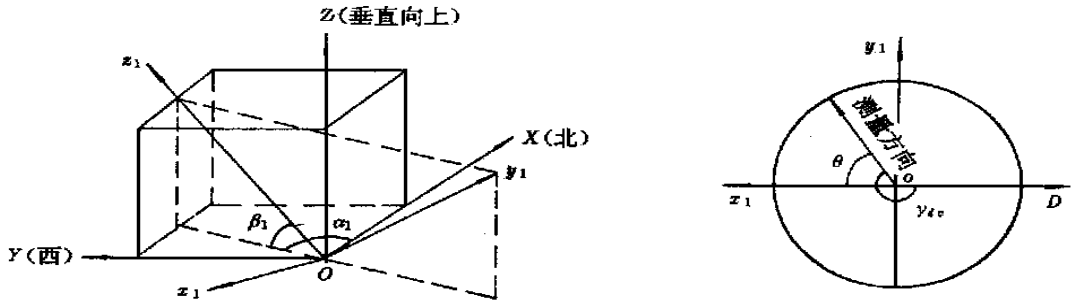


图 1 钻孔轴线与各向同性面法线平行时坐标系定义

Fig 1 Coordinate definition with borehole axis parallel to the normal of isotropic plane

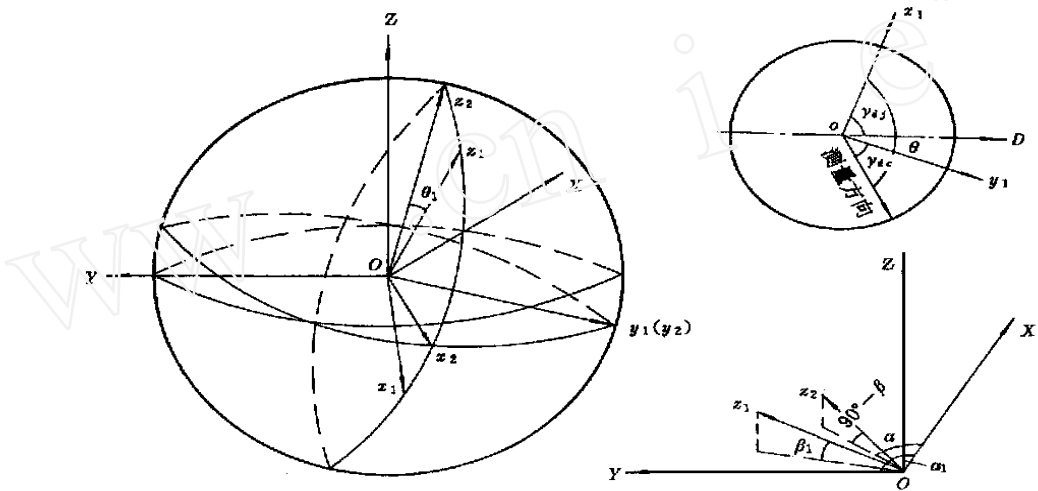


图 2 钻孔轴线与各向同性面法线斜交时坐标系定义

Fig 2 Coordinate definition with borehole axis oblique to the normal of isotropic plane

3 横观各向同性岩体中孔周径向位移理论

3.1 理论的适用条件及基本假设

该理论适用于均质的横观各向同性岩体，所谓横观各向同性是指岩体只有平行于某一平面内各向同性，而其他方向为各向异性。该类岩体具有 5 个独立的弹性常数 E, E, μ, μ, G [3]，根据地应力孔径变形法量测特点，引入如下基本假定：

- (1) 沿钻孔前进方向应变为一常量，即 $\epsilon_1 = k$ ，由于测量钢环距孔底有一定距离，孔底的约束效应微弱，故该假定是合理的。
- (2) 平面 y_1oz_1 及 x_1oz_1 内 $\gamma_{y_1z_1} = \gamma_{x_1z_1} = 0$ ，即只计入与钻孔轴线垂直面内释放应力 $\sigma_1, \sigma_1, \tau_{x_1y_1}$ 产生的孔径变形。
- (3) 应力分量和应变分量均不随孔深的变化而变化。
- (4) 在平衡方程中不计体力。
- (5) 设在无限远处加载，测孔周围及附近区域应力场视为均匀应力场。

3.2 钻孔周边径向位移的理论公式

(1) 钻孔轴线与各向同性平面法线平行
相对于钻孔坐标系 $x_1y_1z_1$ 与岩体结构坐标系 $x_2y_2z_2$ 的本构方程完全相同，可描述为

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_1) - \frac{\mu}{E} \sigma_1 & \gamma_{y_1z_1} = \frac{1}{G} \tau_{y_1z_1} \\ \epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_1) - \frac{\mu}{E} \sigma_1 & \gamma_{x_1z_1} = \frac{1}{G} \tau_{x_1z_1} \\ \epsilon_1 = -\frac{\mu}{E} (\sigma_1 - \sigma_1) - \frac{1}{E} \sigma_1 & \gamma_{x_1y_1} = \frac{1}{G} \tau_{x_1y_1} \end{cases} \quad (1)$$

式中： E, μ, E, μ 分别为各向同性面内与垂直方向弹性模量和泊松比； G 为各向同性面内剪切弹性模量， $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ ； G 为各向同性面内线段与 z_1 轴方向线段夹角改变之剪切弹性模量。

由基本假定 $\epsilon_1 = k$ 及式(1)中第 3 式可导出 $\sigma_1 = -kE - \mu(\sigma_1 - \sigma_1)$ ，则本构方程(1)可简化为

$$\begin{cases} \epsilon_1 = a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_1 + \mu k \\ \epsilon_1 = a_{12}\sigma_1 + a_{22}\sigma_1 + \mu k \\ \gamma_{x_1y_1} = a_{66}\tau_{x_1y_1} \end{cases} \quad (2)$$

式中： $a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E} + \frac{\mu^2}{E}, a_{12} = -\frac{\mu}{E} - \frac{\mu^2}{E}, a_{66} =$

$\frac{1}{G}$, k 为常数。

基于本构方程(2), 可导出钻孔周边径向位移公式^[3]:

$$\begin{cases} U_r = A \sigma_{x_1} + B \sigma_{y_1} + C \sigma_{z_1} + D \tau_{x_1 y_1} \\ A = \frac{R}{8G}(k+1) + \frac{R}{4G}(k+1)\cos 2\theta + R \frac{\mu^2}{E} \\ B = \frac{R}{8G}(k+1) - \frac{R}{4G}(k+1)\cos 2\theta + R \frac{\mu^2}{E} \\ C = -\frac{\mu^2}{E}R \\ D = \frac{R}{2G}(k+1)\sin 2\theta \\ k = \frac{(3-\mu)E - 4E\mu^2}{(1+\mu)E} \end{cases} \quad (3)$$

式中: U_r 为孔周径向位移, R 为钻孔半径, θ 为孔径测量方向与 x_1 轴正向之间夹角, 如图 1 所示。

不难证明 $E = E$, $\mu = \mu$ 时, 式(3)退化为

$$U_r = \frac{R}{E} [\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} + 2(1-\mu^2)(\sigma_{x_1} - \sigma_{y_1}) \cdot \cos 2\theta + 4(1-\mu^2)\tau_{x_1 y_1} \sin 2\theta - \mu \sigma_{z_1}] \quad (4)$$

这一公式与各向同性岩体的孔周径向位移公式完全相同。

(2) 钻孔轴线与各向同性面法线斜交

在此情况下, z_1 与 z_2 轴正向夹角为 θ , 横观各向同性岩体相对于岩体结构坐标系 $x_2 y_2 z_2$ 的本构方程为

$$\begin{cases} \epsilon_{x_2} = \frac{1}{E}(\sigma_{x_2} - \mu\sigma_{y_2}) - \frac{\mu}{E}\sigma_{z_2} \\ \epsilon_{y_2} = \frac{1}{E}(\sigma_{y_2} - \mu\sigma_{x_2}) - \frac{\mu}{E}\sigma_{z_2} \\ \epsilon_{z_2} = -\frac{\mu}{E}(\sigma_{x_2} - \mu\sigma_{y_2}) - \frac{1}{E}\sigma_{z_2} \\ \gamma_{y_2 z_2} = \frac{1}{G}\tau_{y_2 z_2} \\ \gamma_{x_2 z_2} = \frac{1}{G}\tau_{x_2 z_2} \\ \gamma_{x_2 y_2} = \frac{1}{G}\tau_{x_2 y_2} \end{cases} \quad (5a)$$

通过坐标变换, 可导出相对于钻孔坐标系 $x_1 y_1 z_1$ 的本构方程:

$$\begin{cases} \epsilon_{x_1} = C_{11}\sigma_{x_1} + C_{12}\sigma_{y_1} + C_{13}\sigma_{z_1} + C_{15}\tau_{x_1 y_1} \\ \epsilon_{y_1} = C_{12}\sigma_{x_1} + C_{22}\sigma_{y_1} + C_{23}\sigma_{z_1} + C_{25}\tau_{x_1 y_1} \\ \epsilon_{z_1} = C_{13}\sigma_{x_1} + C_{23}\sigma_{y_1} + C_{33}\sigma_{z_1} + C_{35}\tau_{x_1 y_1} \\ \gamma_{y_1 z_1} = C_{44}\tau_{y_1 z_1} + C_{46}\tau_{x_1 y_1} \\ \gamma_{x_1 z_1} = C_{15}\sigma_{x_1} + C_{25}\sigma_{y_1} + C_{35}\sigma_{z_1} + C_{35}\tau_{x_1 y_1} \\ \gamma_{x_1 y_1} = C_{46}\tau_{y_1 z_1} + C_{66}\tau_{x_1 y_1} \end{cases} \quad (5b)$$

由基本假定 $\epsilon_{z_1} = k$ 导出 σ_{z_1} 回代, 式(5b)可简化为

$$\begin{cases} \epsilon_{x_1} = a_{11}\sigma_{x_1} + a_{12}\sigma_{y_1} + a_{01}k \\ \epsilon_{y_1} = a_{12}\sigma_{x_1} + a_{22}\sigma_{y_1} + a_{02}k \\ \gamma_{x_1 y_1} = a_{66}\tau_{x_1 y_1} \end{cases} \quad (6)$$

式中:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{E}\cos^4\theta + \frac{1}{E}\sin^4\theta + \left(\frac{1}{4G} - \frac{\mu}{2E}\right)\sin^2 2\theta, \\ C_{12} &= -\frac{\mu}{E}\cos^2\theta - \frac{\mu}{E}\sin^2\theta, \\ C_{13} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E} - \frac{1}{G}\right)\sin^2 2\theta - \frac{\mu}{E}(\cos^4\theta + \sin^4\theta), \\ C_{15} &= \left(\frac{1}{E} - \cos^2\theta - \frac{1}{E}\sin^2\theta\right)\sin 2\theta - \left(\frac{1}{2G} - \frac{\mu}{E}\right)\sin 2\theta \cos 2\theta, \\ C_{22} &= \frac{1}{E}, \\ C_{23} &= -\frac{\mu}{E}\sin^2\theta - \frac{\mu}{E}\cos^2\theta, \\ C_{25} &= \left(\frac{\mu}{E} - \frac{\mu}{E}\right)\sin 2\theta, \\ C_{33} &= \frac{1}{E}\sin^4\theta + \frac{1}{E}\cos^4\theta + \left(\frac{1}{4G} - \frac{\mu}{E}\right)\sin^2 2\theta, \\ C_{35} &= \left(\frac{1}{E}\sin^2\theta - \frac{1}{E}\cos^2\theta\right)\sin 2\theta - \left(\frac{1}{2G} - \frac{\mu}{E}\right)\sin 2\theta \cos 2\theta, \\ C_{44} &= -\frac{1}{G}\cos^2\theta - 2\left(\frac{1}{E} + \frac{\mu}{E}\right)\sin^2\theta, \\ C_{46} &= \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E} - \frac{1}{2G}\right)\sin 2\theta, \\ C_{55} &= \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E} + \frac{2\mu}{E}\right)\sin^2 2\theta + \frac{1}{G}\cos^2 2\theta, \\ C_{66} &= \frac{1}{G}\sin^2\theta + 2\left(\frac{1}{E} + \frac{\mu}{E}\right)\cos^2\theta, \\ a_{11} &= C_{11} + C_{13}b_{11} + C_{15}b_{13}, \\ a_{12} &= C_{12} + C_{13}b_{12} + C_{15}b_{14} = \\ &\quad C_{12} + C_{23}b_{11} + C_{25}b_{13}, \\ a_{22} &= C_{22} + C_{23}b_{12} + C_{25}b_{14}, \\ a_{01} &= C_{13}b_{01} + C_{15}b_{02}, \\ a_{02} &= C_{23}b_{01} + C_{25}b_{02}, \\ a_{66} &= C_{66} - C_{46}^2/C_{44}, \\ b_{11} &= (C_{15}C_{35} - C_{13}C_{35})/(C_{33}C_{55} - C_{35}^2), \\ b_{12} &= (C_{25}C_{35} - C_{23}C_{35})/(C_{33}C_{55} - C_{35}^2), \\ b_{13} &= (C_{13}C_{35} - C_{33}C_{15})/(C_{33}C_{55} - C_{35}^2), \\ b_{14} &= (C_{23}C_{35} - C_{25}C_{33})/(C_{33}C_{55} - C_{35}^2), \\ b_{01} &= C_{55}/(C_{33}C_{55} - C_{35}^2), \\ b_{02} &= C_{35}/(C_{33}C_{55} - C_{35}^2). \end{aligned}$$

基于本构方程(6), 运用复变函数方法进行类似推导^[3], 可导出钻孔轴线与各向同性面斜交时钻孔周边的径向位移公式:

$$U_r = (\bar{X}_1 \cos\theta + \bar{X}_2 \sin\theta)\sigma_{x_1} + (\bar{Y}_1 \cos\theta + \bar{Y}_2 \sin\theta) \cdot$$

$$\sigma_1 + (\bar{Z}_1 \cos \theta + \bar{Z}_2 \sin \theta) \alpha_1 + (\bar{T}_1 \cos \theta + \bar{T}_2 \sin \theta) \tau_{x_1 y_1} = A \alpha_1 + B \sigma_1 + C \sigma_1 + D \tau_{x_1 y_1} \quad (7)$$

式中: 系数 $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2$ 及 A, B, C, D 与常数 $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{66}$ 有关, 涉及 E, E, μ, μ, G 及 θ, R, θ 基本参数。

4 基本坐标系 X Y Z 下应力和钻孔直径变形的关系

将式(3)及(7)统一简记为

$$U_r = A \alpha_1 + B \sigma_1 + C \sigma_1 + D \tau_{x_1 y_1}$$

根据钻孔坐标系 $x_1 y_1 z_1$ 与基本坐标系 $X Y Z$ 相对关系, 利用应力转轴可导出 $X Y Z$ 坐标系下的钻孔周边径向位移公式:

$$U_r = (A l_1^2 + B l_2^2 + C l_3^2 + D l_1 l_2) \alpha_x + (A m_1^2 + B m_2^2 + C m_3^2 + D m_1 m_2) \alpha_y + (A n_1^2 + B n_2^2 + C n_3^2 + D n_1 n_2) \alpha_z + (2A l_1 m_1 + 2B l_1 m_2 + 2C l_1 m_3 + D l_1 m_2 + D l_1 m_1) \tau_{xy} + (2A m_1 n_1 + 2B m_1 n_2 + 2C m_1 n_3 + D m_1 n_1 + D m_1 n_2) \tau_{yz} + (2A n_1 l_1 + 2B n_2 l_2 + 2C n_3 l_3 + D n_1 l_2 + D n_2 l_1) \tau_{zx} \quad (8a)$$

式中: $l_i, m_i, n_i (i = 1, 2, 3)$ 为 $x_1 y_1 z_1$ 坐标轴正向对 $X Y Z$ 轴正向的方向余弦, 简记为

$$U_r = \sum_{k=1}^6 A_k \alpha_k \quad (8b)$$

一般说来, 横观各向同性岩体在钻孔同一直径的周边两点径向位移不同, 故有

$$\Delta d = U_r + U_r \quad (9)$$

$$U_r = \sum_{k=1}^6 A_k \alpha_k \quad (10)$$

所以

$$\Delta d = \sum_{k=1}^6 (A_k + A_k) \alpha_k = \sum_{k=1}^6 B_k \alpha_k \quad (11)$$

式中: Δd 为钻孔直径的变形观测值, U_r 为与 U_r 所对应直径端点相对的径向位移。

式(11)表达了基本坐标系 $X Y Z$ 下钻孔直径变形值与 6 个应力分量的关系, 也即观测方程, 设 i 号钻孔第 j 次测量的径向变形值为 Δd_{ij} , 式(11)可改写为

$$\Delta d_{ij} = \sum_{k=1}^6 a_{ijk} \alpha_k \quad (12)$$

由于存在量测误差, 而且观测方程的个数一般大于未知量个数, 需用最小二乘法对观测方程进行优化

$$\frac{\Delta d_{ij}}{d} = \frac{\Delta \tilde{d}_{ij}}{d} + \delta_{ij} = \sum_{k=1}^6 \frac{a_{ijk}}{d} \tilde{\alpha}_k + \delta_{ij} \quad (13)$$

式中: $\Delta \tilde{d}_{ij}$ 为孔径变形最佳值, $\tilde{\alpha}_k$ 为应力分量最佳

值, δ_{ij} 为变形观测残差值。据最小二乘法则:

$$\Phi = \sum_{ij} \delta_{ij}^2 = \min \quad (14a)$$

即

$$\Phi = \sum_{ij} \delta_{ij}^2 = \left[\frac{\Delta d_{ij}}{d} - \sum_{k=1}^6 b_{ijk} \tilde{\alpha}_k \right]^2 \quad (14b)$$

由上式即可导出 $\tilde{\alpha}_k$ 的表达式, 进而可导出主应力及主方向表达式。

根据上述理论, 笔者研制了横观各向同性岩体地应力量测分析程序 CSTR。

5 算例

本文选取乌江洪家渡水电站某测点为例进行计算^[4], 测点位于三迭系下统夜郎组玉龙山段 T_{ly}^{2-5} 层浅灰色厚层块状灰岩中, 测得的弹模离散性较大, 取算术平均值 $E = 5.043 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\mu = 0.25$ 。为对比分析, 按各向同性与横观各向同性两种本构模型, 计算地应力所带来的差异性, 拟定以下 5 种情况, 计算成果见表 1。

表 1 按各向同性与横观各向同性介质地应力计算成果表
Table 1 The results of geostress computed with isotropic and transverse isotropic constitutive relations

序号	计算模型	应力分量	应力值 /MPa	方位角	倾角 /($^\circ$)
1	各向同性 $E/E = 1.0$ $\mu/\mu = 1.0$	σ_1	21.10	N16.70 E	9.30
		σ_2	13.74	S45.0 E	71.50
		σ_3	11.10	N76.0 E	16.25
2	横观各向同性 $E/E = 1.2$ $\mu/\mu = 0.95$	σ_1	25.75	N16.15 E	9.18
		σ_2	16.88	S45.6 E	71.14
		σ_3	13.64	N76.6 W	16.33
3	横观各向同性 $E/E = 1.5$ $\mu/\mu = 0.9$	σ_1	33.30	N15.64 E	9.17
		σ_2	22.06	S47.7 E	70.19
		σ_3	18.01	N77.3 W	17.4
4	横观各向同性 $E/E = 1.7$ $\mu/\mu = 0.85$	σ_1	38.65	N15.33 E	9.18
		σ_2	25.81	S49.1 E	69.47
		σ_3	21.22	N77.7 W	18.2
5	横观各向同性 $E/E = 2.0$ $\mu/\mu = 0.8$	σ_1	47.21	N14.9 E	9.19
		σ_2	31.91	S51.2 E	68.26
		σ_3	26.53	N78.4 W	19.52

从表 1 可以看出, 按各向同性与横观各向同性两种本构模型, 计算得到的地应力值存在较大差异, 且这种差异性随着平行与垂直各向同性面弹性模量比值 (E/E) 加大而递增。

6 结论

(1) 本文利用各向异性弹性理论复变函数方法

推导了横观各向同性岩体孔周径向位移的理论公式, 为该类岩体的地应力测量计算分析奠定了理论基础。

(2) 文中给出了由孔径变形法测得的径向变形观测值计算横观各向同性岩体三维地应力的方法, 并研制了该类岩体三维地应力计算软件, 便于工程应用。

(3) 由于各向同性岩体与横观各向同性岩体的径向位移理论公式存在较大差异, 文中算例表明, 用不同的理论公式算出的地应力值差别较大, 建议在实际工程中针对不同性状岩体选用相应理论公式。

参 考 文 献

- 1 中国科学院地质力学研究所 地应力测量原理及应用[M]. 北京: 地质出版社, 1981
- 2 李光煜, 白世伟 岩体应力测量原理方法[R]. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 1986
- 3 王桂芳 应用弹性力学[M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1995
- 4 电力工业部贵阳勘测设计研究院研究所 乌江洪家渡水电站地下厂房区 PD-1 平洞空间地应力测试报告[R]. 1989

A THEORY ON 3-D GEOSTRESS MEASUREMENT ANALYSIS FOR TRANSVERSE ISOTROPIC ROCKMASS

He Jiangda, Fan Jingwei, Wang Guifang, Zong Renhuai
(Sichuan University, Chengdu 610065 China)

Abstract Based on complex variable function method of anisotropic elasticity theory, an analytical formula of borehole radial displacement for transverse isotropic rockmass is established with load acted on the infinite outer space. Furthermore, a theory is put forward for 3-D geostress measurement analysis of borehole deformation method for this rockmass in situ, and the software related to this theory is completed. At last, one typical example is given.

Key words transverse isotropic rockmass, 3-D geostress measurement, method of borehole radial deformation

本刊编委、著名岩石力学专家陶振宇教授逝世

本刊编委、著名岩石力学专家、武汉水利电力大学教授、博士生导师陶振宇先生突发心脏病, 不幸于 2000 年 2 月 2 日逝世。

陶振宇教授出生于 1927 年元月, 湖南衡阳人。1952 年 7 月毕业于武汉大学水利系, 后赴苏联学习, 回国后致力于岩石力学教学和研究, 共完成 14 部学术专著、发表 120 余篇学术论文。陶振宇教授提出和倡导了岩石力学研究与工程应用的许多思想方法, 在水工设计岩体安全取值、岩石断裂与连续的统一性、岩体地应力、水库诱发地震等领域都取得了丰硕的研究成果。

陶振宇教授治学严谨, 诲人不倦, 直至生命的最后一刻。陶振宇教授共培养 18 名博士研究生和 20 余名硕士研究生, 为我国岩石力学的教育事业和学科发展作出了卓越贡献。

陶振宇教授的品格、业绩和优秀著作深得我国岩石工程界的怀念和尊敬, 并将继续指导后人前进。他的逝世是我国岩石力学与工程界的重大损失。

陶振宇教授安息吧!

《岩石力学与工程学报》
编辑部