

## 五维正交矢量天线导向矢量的秩-1 模糊问题研究

徐友根 刘志文 王四平

(北京理工大学电子工程系 北京 100081)

**摘要:** 该文研究共点放置的极化敏感五维正交矢量天线导向矢量中隐含的秩-1 模糊问题。论文首先定义了同维数但形式不同的极化-角度相干结构(PACS)之间的两种等价关系, 在此基础上分析和讨论了五种典型的五维 PACS 的秩-1 模糊。结果表明, 利用五维正交矢量天线可唯一辨识单个非水平极化信号的角度和极化参数。仿真实验结果验证了文中得出的结论。

**关键词:** 共点, 极化敏感, 秩-1 模糊

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)05-0749-04

## Rank-1 Ambiguity of Steering Vector of an Array with Five Co-localized and Orthogonally Oriented Sensors

Xu You-gen Liu Zhi-wen Wang Si-ping

(Dept. of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract** The rank-1 ambiguity problem involved in the Polarization-Angular Coherence Structure (PACS) of a 5-D co-localized vector antenna whose elements are orthogonally oriented is addressed in this paper. Two kinds of equivalent relations are defined, under which several typical and easy-analyzed 5-D PACSs are studied. It is further shown in the paper that with only one 5-D vector antenna, DOA and polarization of one signal except for the case of horizontally polarized signal could be uniquely identified, as is done by the well-known 6-D ElectroMagnetic (EM) vector sensor. Some representative examples are also given to validate the present analyses.

**Key words** Collocation, Polarization, Rank-1 ambiguity

### 1 前言

近二十几年来, 在自适应或测向阵列系统中, 采用多个极化选择特性不完全相同的传感器以有效利用信号极化这一微观结构逐渐引起人们的关注<sup>[1-10]</sup>。这一类型的阵列通常也称为极化敏感阵列, 它可以利用信号在极化域的可分性减小信号的空间相关程度, 从而获得较好的自适应和测向性能。在自适应阵列或测向阵列的设计中, 避免秩-1 模糊问题非常重要。否则, 相应的自适应阵列会出现输出信干比急剧恶化的情况, 也不能完成信号源角度和极化参数的唯一确定。极化敏感阵列中至少存在两个传感器具有不同的极化选择特性, 它们可以在空间同点放置, 也可以在空间分散排列。在空间同点放置即具有共同相位中心的  $N$  个具有不同极化选择特性的传感器组通常又可以称为  $N$  维矢量天线, 本文将研究同维数正交矢量天线极化-角度相干结构(PACS)间的等价关系, 并在此基础上讨论五维正交矢

量天线其极化-角度导向矢量的秩-1 模糊问题。

### 2 基本假定和描述问题

考虑图 1 所示直角坐标系  $Oxyz$ , 并假定完全极化信号的方位角和俯仰角分别为  $\theta$  和  $\phi$ , 并且  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ 。这里从电场(当然也可以基于磁场)瞬态矢量变化轨迹的角度定义信号的极化状态并分别用极化辐角  $\gamma$  和极化相位差  $\eta$  表征, 并且  $0 \leq \gamma \leq \pi/2$ ,  $-\pi \leq \eta \leq \pi$ 。在上述定义和假设下, 没有指向误差的六维矢量天线的极化-角度导向矢量可以表示为<sup>[3]</sup>

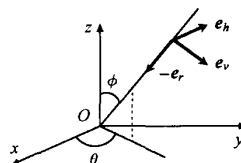


图 1 阵列几何及角度定义

$$F_{\Xi=\{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=6}(\theta, \phi, \gamma, \eta) = P \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \cos\phi \\ \cos\theta & \sin\theta \cos\phi \\ 0 & -\sin\phi \\ -\cos\theta \cos\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta \cos\phi & \cos\theta \\ \sin\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \exp(j\eta) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$\Theta_{\Xi=\{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=6}(\theta, \phi)$

式中  $\dim(\Xi)$  表示对应 PACS 的维数； $P$  为  $6 \times 6$  极化敏感矩阵，它刻画矢量天线中各传感器的极化接收方式，这里研究  $P$  为单位阵的情形，即矢量天线可以感应  $N$  个相互正交的电、磁分量； $h(\gamma, \eta)$  称为极化矢量。显然， $F_{\Xi=\{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=6}(\theta, \phi, \gamma, \eta)$  刻画了信号在极化-角度域的相干结构，它可体现传感器沿坐标系  $Oxyz$  3 个坐标轴方向感应电、磁信号之间的幅相关系。为简便起见，进一步令

$$e_h = V_1 = [-\sin\theta, \cos\theta, 0]^T$$

$$e_v = V_2 = [\cos\phi \cos\theta, \cos\phi \sin\theta, -\sin\phi]^T$$

分别为水平方向和垂直方向的单位矢量，并与信号传播矢量  $e_r$  组成一个与信号有关的右手局部坐标系。

定义 5 维极化-角度选择矩阵  $T_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=5}$ ，它可提取  $F_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=6}$  中某个  $5 \times 2$  维子矩阵，这里所要研究的问题即是分析 5 维 PACS  $T_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=5}$ 、 $F_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=6}$ 、 $F_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=5}$  是否并在什么情况下含有秩-1 模糊，亦即是否存在并且在什么情况下参数  $(\theta_1, \phi_1, \gamma_1, \eta_1) \neq (\theta_2, \phi_2, \gamma_2, \eta_2)$  的两个信号，它们对应的非零 PACS 之间满足线性关系  $F_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=5}(\theta_1, \phi_1, \gamma_1, \eta_1) = \xi F_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=5}(\theta_2, \phi_2, \gamma_2, \eta_2)$ ，其中复标量  $\xi$  为尺度模糊因子。

### 3 同维数极化-角度相干结构间的等价

在展开具体讨论之前，给出一个约定和两个引理。

约定 1 由于当信号为天顶或天底信号亦即  $\phi = 0, \pi$  时，信号方位角  $\theta$  没有定义，为此我们约定：当信号为天顶或天底信号时，其方位角  $\theta = 0$ ，并且此时两信号角度不同定义为  $\phi_1 \neq \phi_2$ ；否则，两个信号角度不同定义为  $(\theta_1 - \theta_2, \phi_1 - \phi_2) \neq (0, 0)$ 。两个信号角度不同记作  $(\theta_1, \phi_1) \neq (\theta_2, \phi_2)$ ；而相同则记作  $(\theta_1, \phi_1) = (\theta_2, \phi_2)$ 。

引理 1 (Tan, Ho, Nehorai)<sup>[4]</sup>：当  $(\theta_1, \phi_1) \neq (\theta_2, \phi_2)$  时（此时，秩-1 模糊会影响 DOA 的唯一辨识），当且仅当

$$\text{rank}\{\{\Theta_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=m}(\theta_1, \phi_1), \Theta_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=m}(\theta_2, \phi_2)\}\} < 4 \quad (2)$$

时，对应的 PACS 亦即  $F_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=m}(\theta_1, \phi_1, \gamma_1, \eta_1)$  和  $F_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=m}(\theta_2, \phi_2, \gamma_2, \eta_2)$  线性相关。

引理 2 当  $(\theta_1, \phi_1) = (\theta_2, \phi_2) = (\theta, \phi)$  时，仅当

$$\text{rank}\{\Theta_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=m}(\theta, \phi)\} < 2 \quad (3)$$

时，极化参数互异的两个信号对应的 PACS 才可能线性相关。

下面定义两种等价关系：

等价关系 1 如果不同的 PACS 通过坐标系的旋转之后可以具有相同的形式，我们认为两者是等价的。不妨设新坐标系  $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  基矢量矩阵为  $R$ ，相应的信号参数为  $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}, \tilde{\gamma}, \tilde{\eta})$ ，由文献[4]中的分析，可以得到

$$\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 & \tilde{V}_2 \\ -\tilde{V}_2 & \tilde{V}_1 \end{bmatrix} Q(\tilde{\delta}) h(\tilde{\gamma}, \tilde{\eta}) = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ -V_2 & V_1 \end{bmatrix} h(\gamma, \eta) \quad (4)$$

$\tilde{R} \quad \tilde{V} \quad \tilde{h}(\tilde{\gamma}, \tilde{\eta}) \quad V$

式中  $\tilde{\delta}$  为信号波前平面内两组基  $(V_1, V_2)$  和  $(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$  之间的夹角， $|R|=1$ ，它保证新坐标系  $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  可以由原坐标系的正交旋转得到。定义极化-角度选择矩阵为  $T_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=m}$ ，它满足  $T_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=m} F_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=6} = F_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=m}$ 。如果存在  $T_{\Xi_1 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_1)=m}$  和  $T_{\Xi_2 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_2)=m}$  满足  $G_m^1 T_{\Xi_1 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_1)=m} \tilde{R} = G_m^2 T_{\Xi_2 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_2)=m}$ ，其中  $G_m^1$  和  $G_m^2$  为行下标调整矩阵，它使得 PACS 中的分量按行下标增加方式排列，此时我们称相应的 PACS 满足等价关系 1 并记作

$$F_{\Xi_1 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_1)=m} \sim F_{\Xi_2 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_2)=m} \quad (5)$$

由于  $|\text{diag}\{Q(\tilde{\delta}_1), Q(\tilde{\delta}_2)\}| \neq 0$ ，可以看出在等价关系 1 下有

$$\begin{aligned} \text{rank}\{\{\Theta_{\Xi_2 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_2)=m}(\tilde{\theta}_1, \tilde{\phi}_1), \Theta_{\Xi_2 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_2)=m}(\tilde{\theta}_2, \tilde{\phi}_2)\}\} \\ = \text{rank}\{\{\Theta_{\Xi_1 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_1)=m}(\theta_1, \phi_1), \Theta_{\Xi_1 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_1)=m}(\theta_2, \phi_2)\}\} \end{aligned} \quad (6)$$

等价关系 2 等价关系 2 无需考虑坐标系的旋转。假设极化-角度选择矩阵仍然用  $T_{\Xi \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi)=m}$  表示，则对于任意  $(\theta, \phi, \gamma, \eta)$ ，当下列恒等式：

$$T_{\Xi_1 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_1)=m} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} V \equiv T_{\Xi_2 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_2)=m} V \quad (7)$$

成立时，它们对应的 PACS 满足等价关系 2 并仍然记作

$$F_{\Xi_1 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_1)=m} \sim F_{\Xi_2 \subset \{1,2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_2)=m}$$

由上述等价关系的定义可以看出：对于同一等价关系下不同形式的 PACS 在经过适当的坐标轴旋转之后，总可以得到相同的秩-1 模糊产生条件，所以，可选择等价关系下形式简单易于分析的 PACS 进行讨论。

### 4 五维矢量天线导向矢量的秩-1 模糊

五维 PACS 共有  $C_6^5 = 6$  种形式，如果不考虑 PACS 内部元素顺序，该 6 种结构都是等价的：

$$F_{\Xi_1 \subset \{1,2,3,4,5\}}^{\dim(\Xi_1)=5} \sim F_{\Xi_2 \subset \{1,2,3,4,5\}}^{\dim(\Xi_2)=5} \sim F_{\Xi_3 \subset \{1,2,3,5,6\}}^{\dim(\Xi_3)=5} \sim F_{\Xi_4 \subset \{1,2,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_4)=5} \sim F_{\Xi_5 \subset \{1,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_5)=5} \sim F_{\Xi_6 \subset \{2,3,4,5,6\}}^{\dim(\Xi_6)=5}$$

下面将基于引理 1 和引理 2 并以  $\Xi = \{1,2,3,4,5\}$  为例分析五维 PACS 的秩-1 模糊。

为简便起见，首先令  $D_{abcd}$  为矩阵

$$\begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & \cos\phi_1 \cos\theta_1 & -\sin\theta_2 & \cos\phi_2 \cos\theta_2 \\ \cos\theta_1 & \cos\phi_1 \sin\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\phi_2 \sin\theta_2 \\ 0 & -\sin\phi_1 & 0 & -\sin\phi_2 \\ -\cos\phi_1 \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & -\cos\phi_2 \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ -\cos\phi_1 \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & -\cos\phi_2 \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

的第  $a, b, c, d$  行组成的子矩阵。

当信号角度不同时，通过直接计算可以得到

$$\begin{cases} \mu_1 = |D_{1234}| = (\sin\phi_1 \cos\theta_1 + \sin\phi_2 \cos\theta_2)(\cos\phi_1 \cos\theta_2 + \sin\phi_1 \sin\theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - 1) \\ \mu_2 = |D_{1235}| = (\sin\phi_1 \sin\theta_1 + \sin\phi_2 \sin\theta_2)(\cos\phi_1 \cos\theta_2 + \sin\phi_1 \sin\theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - 1) \\ \mu_3 = |D_{1245}| = \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 - (1 - \cos\phi_1 \cos\phi_2)^2 \\ \mu_4 = |D_{2345}| = \sin\phi_1 \sin\phi_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)(\cos\phi_1 \sin\phi_2 \sin\theta_2 - \sin\phi_1 \cos\phi_2 \sin\theta_1) + (\cos\phi_2 - \cos\phi_1) \times (\sin\phi_1 \cos\theta_1 - \sin\phi_2 \cos\theta_2) \\ \mu_5 = |D_{1345}| = \sin\phi_1 \sin\phi_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\sin\phi_1 \cos\phi_2 \cos\theta_1 - \cos\theta_1 \sin\phi_2 \cos\theta_2) + (\cos\phi_1 - \cos\phi_2) \times (\sin\phi_1 \sin\theta_1 - \sin\phi_2 \sin\theta_2) \end{cases}$$

由于  $\sin\phi_1 \sin\phi_2 \geq 0$ ，所以

$$\begin{aligned} \cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - 1 &\stackrel{\theta_1=\theta_2}{\leq} \cos\phi_1 \cos\phi_2 \\ &+ \sin\phi_1 \sin\phi_2 - 1 = \cos(\phi_1 - \phi_2) - 1 \stackrel{\phi_1=\phi_2}{\leq} 0 \end{aligned} \quad (9)$$

式中符号  $\stackrel{\theta_1=\theta_2}{\leq}$  表示当  $\theta_1 = \theta_2$  时等号成立，否则满足“小于”关系， $\stackrel{\phi_1=\phi_2}{\leq}$  表示当  $\phi_1 = \phi_2$  时等号成立，否则满足“小于”关系。显然，当信号角度不同时，有  $\cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - 1 \neq 0$ 。

下面讨论在什么条件下能够保证  $\mu_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$  同时为零。不妨首先考虑  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ，显然

(1) 在非平凡条件下，即当  $\phi_1, \phi_2 \neq 0, \pi$  时，下面的方程组式(10)应当有解

$$\begin{cases} \sin\phi_1 \cos\theta_1 + \sin\phi_2 \cos\theta_2 = 0 \\ \sin\phi_1 \sin\theta_1 + \sin\phi_2 \sin\theta_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

亦即下面的方程组

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sin\theta_1 + \cos\theta_1 & \sin\theta_2 + \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 - \cos\theta_1 & \sin\theta_2 - \cos\theta_2 \end{bmatrix}}_{R_{sc}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sin\phi_1 \\ \sin\phi_2 \end{bmatrix}}_l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

有解。因为  $l \neq 0$ ，所以  $|R_{sc}| = \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$ ，于是有  $|\theta_2 - \theta_1| = k\pi (k=0, 1)$ 。但当  $\theta_1 = \theta_2$  时应有

$$\begin{cases} \cos\theta_1(\sin\phi_1 + \sin\phi_2) = 0 \\ \sin\theta_1(\sin\phi_1 + \sin\phi_2) = 0 \end{cases}$$

而  $\sin\phi_1 + \sin\phi_2 > 0$ ，所以应该有  $\cos\theta_1 = \sin\theta_1 = 0$ ，显然不可能，由此可知，只有当  $|\theta_2 - \theta_1| = \pi$  时，方程组式(10)才

有可能有解。不失一般性，令  $\theta_2 > \theta_1$ ，则  $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ ，此时有

$$\begin{cases} \cos\theta_1(\sin\phi_1 - \sin\phi_2) = 0 \\ \sin\theta_1(\sin\phi_1 - \sin\phi_2) = 0 \end{cases}$$

于是  $\sin\phi_1 = \sin\phi_2$ ，从而有  $\phi_1 = \phi_2$  或者  $\phi_1 + \phi_2 = \pi$ 。所以，在  $\phi_1, \phi_2 \neq 0, \pi$  的情况下，当  $|\theta_2 - \theta_1| = \pi$  且  $\phi_1 = \phi_2$  或  $\phi_1 + \phi_2 = \pi$  时，有  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 。进一步可以发现当  $|\theta_2 - \theta_1| = \pi$ ， $\phi_1 = \phi_2$  时，恒有  $\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$ ，而当  $|\theta_2 - \theta_1| = \pi$ ， $\phi_1 + \phi_2 = \pi$  时，仅有在  $\phi_1 = \phi_2 = \pi/2$  时才有  $\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$ ；

(2) 在平凡条件下，即当  $\phi_1, \phi_2 = 0, \pi$  时，恒有  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_4 = \mu_5 = 0$ ，但仅当  $\phi_1 = \phi_2 = 0, \pi$  亦即信号角度相同时，才有  $\mu_3 = 0$ 。否则  $\mu_3 \neq 0$ ，相应的 PACS 线性无关。

由此可知：存在某一坐标系使得两个角度不同的信号只有当其角度关系满足  $|\theta_2 - \theta_1| = \pi$ ， $\phi_1 = \phi_2$  时，它们对应的五维 PACS 才有可能线性相关的。

下面分析当  $\phi_1, \phi_2 \neq 0, \pi$  时对应五维 PACS 线性相关的两个信号极化状态有什么特点。由于五维 PACS 的前 3 个分量与三极子天线的相同。由文献[10]可知，如果信号为非线极化信号的话，那么只有角度相反的两个信号其对应的 PACS 才有可能线性相关的，这样，结合上文的讨论可知，如果两个非线性极化信号对应的 PACS 线性相关，那么必然有  $\phi_1 = \phi_2 = \pi/2$ ， $|\theta_2 - \theta_1| = \pi$ 。但是，当  $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$  时，下面的方程组：

$$\begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 \\ \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma_1 \\ \sin\gamma_1 \exp(j\eta_1) \end{bmatrix} = \xi \begin{bmatrix} \sin\theta_1 & 0 \\ -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma_2 \\ \sin\gamma_2 \exp(j\eta_2) \end{bmatrix}, \quad \xi = \pm 1 \quad (12)$$

无解。由此可以看出，对于两个非水平线极化信号，如果  $\phi_1, \phi_2 \neq 0, \pi$ ，那么它们所对应的五维 PACS 均不存在秩-1 模糊。

如果  $\gamma_1, \gamma_2 = 0$ ，易于验证两个信号所对应的 PACS 线性相关，并且  $\xi = -1$ 。事实上，由于五维 PACS 含有三极子天线结构，所以如果信号为线极化信号，则只有当它们沿其传播矢量所在平面的垂直方向线极化时，对应的 PACS 才可能线性相关。而当  $|\theta_1 - \theta_2| = \pi$ ， $\phi_1 = \phi_2$  时，两者传播矢量所在平面与  $xy$  平面垂直，所以 PACS 线性相关的线极化信号只能沿水平方向线极化。

当信号角度相同时，由于  $\text{rank}\{\Theta_{\Sigma}^{\text{dim}(\Sigma)=5}_{\Sigma=\{1,2,3,4,5\}}(\theta, \phi)\} = 2$ ，根据引理 2 可知，只要信号极化参数不同，相应的五维

PACS 线性无关。

综上，可以得到下面的结论：

定理 1 对于 FIER1 的每一种形式，总存在某个坐标系使得：当  $\phi_1, \phi_2 \neq 0, \pi$  时，只有在两个信号完全沿水平方向线极化，且两者角度关系满足  $|\theta_2 - \theta_1| = \pi, \phi_1 = \phi_2$  时，它们对应的五维 PACS 才表现为线性相关；而当  $\phi_1, \phi_2 = 0, \pi$  但  $\phi_1 \neq \phi_2$  时，两者对应的 PACS 线性无关；当信号角度相同时，极化参数不同的两个信号对应的五维 PACS 线性无关。

### 5 仿真实例

本节进行计算机仿真以验证文中所得到的一些结论。仿真中采用谱峰搜索 MUSIC 方法对一个窄带信号源的二维 DOA 进行估计，MUSIC 空域谱峰搜索表达式如下式<sup>[1]</sup>：

$$SP(\theta, \phi) = \{1/\lambda_{\min}, \lambda_{\min} \leq \lambda \mid \det(\Theta^H E_n E_n^H \Theta - \lambda \Theta^H \Theta) = 0\} \quad (13)$$

式中  $E_n$  为噪声子空间矢量矩阵。由文献[11]可知，对于单个信号源，可以根据谱峰的分布特征确定对应的导向矢量是否存在和存在什么类型的空间域秩-1 模糊。仿真中采样快拍数为 50，信噪比为 50dB，其它参数标于各自的图中。不难看出，所研究的实例其谱峰特征均与文中理论分析得到的结论相符合。

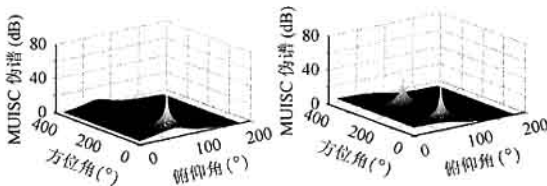


图 2  $\Xi = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \theta = 30^\circ, \phi = 60^\circ, \gamma = 60^\circ, \eta = 30^\circ$       图 3  $\Xi = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \theta = 30^\circ, \phi = 60^\circ, \gamma = 0^\circ, \eta = 0^\circ$

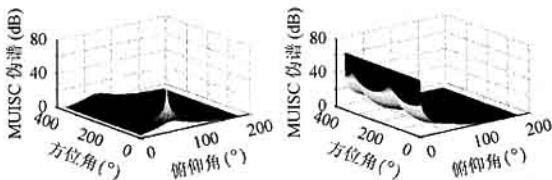


图 4  $\Xi = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \theta = 30^\circ, \phi = 60^\circ, \gamma = 90^\circ, \eta = 0^\circ$       图 5  $\Xi = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \theta = 0^\circ, \phi = 0^\circ, \gamma = 60^\circ, \eta = 30^\circ$

### 6 总结

本文分平凡( $\phi = 0, \pi$ )和非平凡( $\phi \neq 0, \pi$ )情形对五维 PACS 的秩-1 模糊问题进行了研究，为能否基于单个五维正交矢量天线开发无模糊参数估计闭式算法提供了一定的理

论依据。文中工作表明：(1) 在非平凡条件下，五维矢量天线可以唯一地辨识非线极化信号和非水平方向线极化信号的角度和极化参数；(2) 在平凡条件下，只要信号角度不同，也可以完成 DOA 的唯一辨识；(3) 对于角度相同的两个信号，如果已知它们的极化参数不同，也是可以唯一辨识的，并可以在极化-角度域完成滤波。以上结论表明：如果已知信号非水平极化，可以用任意五维矢量天线代替六维矢量传感器<sup>[1]</sup>，开发相应的 DOA 估计闭式算法是可行并有意义的。

### 参考文献

- [1] Ferrara E R, Parks T M. Direction finding with an array of antennas having diverse polarization [J]. *IEEE Trans. on AP*, 1983, AP-31(2): 231 - 236.
- [2] Compton R T. The tripole antenna: an adaptive array with full polarization flexibility [J]. *IEEE Trans. on AP*, 1981, AP-29(6): 944 - 952.
- [3] Nehorai A, Paldi E. Vector sensor array processing for electromagnetic source localization [J]. *IEEE Trans. on SP*, 1994, SP-42(2): 376 - 398.
- [4] Tan Kah-Chye, Ho Kwok-Chiang, Nehorai A. Linear independence of steering vectors of an electromagnetic vector sensor [J]. *IEEE Trans. on SP*, 1996, SP-44(12): 3099 - 3107.
- [5] 王建英, 陈天麒. 用四阶累积量实现频率、二维到达角和极化的联合估计[J]. *中国科学*, 2000, 30(5): 424 - 429.
- [6] 王建英, 陈天麒. 频率、二维到达角和极化联合估计[J]. *电子学报*, 1999, 27(11): 74 - 76.
- [7] 王建英, 王激扬, 陈天麒. 宽频段空间信号频率、二维到达角和极化联合估计[J]. *中国科学*, 2001, 31(6): 526 - 532.
- [8] 石新智, 王高峰, 文必洋. 修正 MUSIC 算法对非线性阵列适用性的讨论[J]. *电子学报*, 2004, 32(1): 147 - 149.
- [9] 董豹, 姚振东. 极化信息在智能天线技术中的应用[J]. *信号处理*, 2002, 18(6): 560 - 563.
- [10] 徐友根. 极化敏感阵列多维参数估计中的若干问题研究[D]. [博士论文], 北京: 北京理工大学研究生院, 2004.
- [11] Ho K.-C, Tan K.-C, Ser W. An investigation on number of signals whose directions-of-arrival are uniquely determinable with an EM vector sensor [J]. *Signal Processing*, 1995, 47(1): 41 - 54.

徐友根：男，1975 年生，讲师，研究方向为极化敏感阵列信号处理及其应用。

刘志文：男，1962 年生，教授，研究方向为雷达成像技术、图像处理 and 文本识别技术、阵列信号处理及其应用。

王四平：男，1976 年生，博士生，研究方向为现代信号处理技术、图像处理及名片识别技术。