第二章　水静力学

内容：研究液体静止状态下的平衡规律及实际应用.

静止液体：du/dy=0，　$\tau=0$，　只存在p.

具体：1. 点-点压强及特性；

2. 面-平面、曲面上的压力；

3. 体-浮体平衡与稳定；

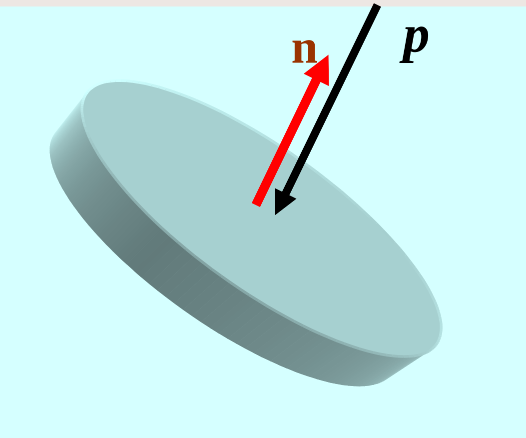
4. 相对平衡.

§ 2–1　静水压强及其特性

一. 静水压强的定义

➢静止液体的应力只有法向分量（液体质点之间没有相对运动不存在切应力）。

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (2.1.1)$$



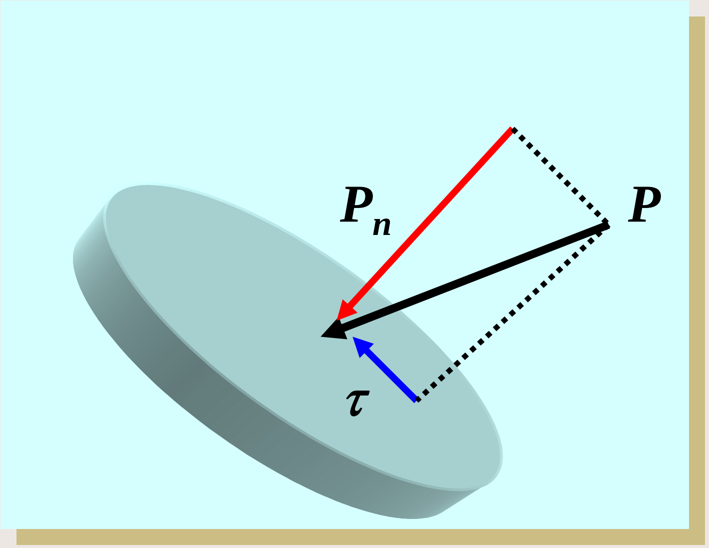
- 压强的单位：**Pa（N/m）**

二. 静水压强的特性

1. 沿受压面的内法线;

特性1证明如下:

- $\tau=0$
- $P=p_n$



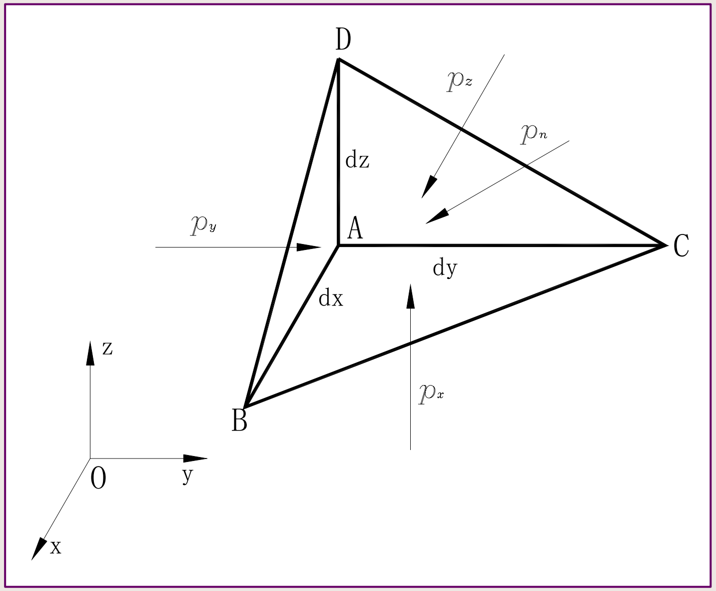
- 静止液体的应力只有内法向分量 — 静压强

2. 作用在同一点各方向的静水压强大小相等，即与作用方向无关.

特性2可以证明如下：

如图，微小四面体ABCD，中心为A，斜面BCD面积为dA，以x方向为例：

$$dA_x = dA\cos(n,x) = \frac{1}{2}dydz$$

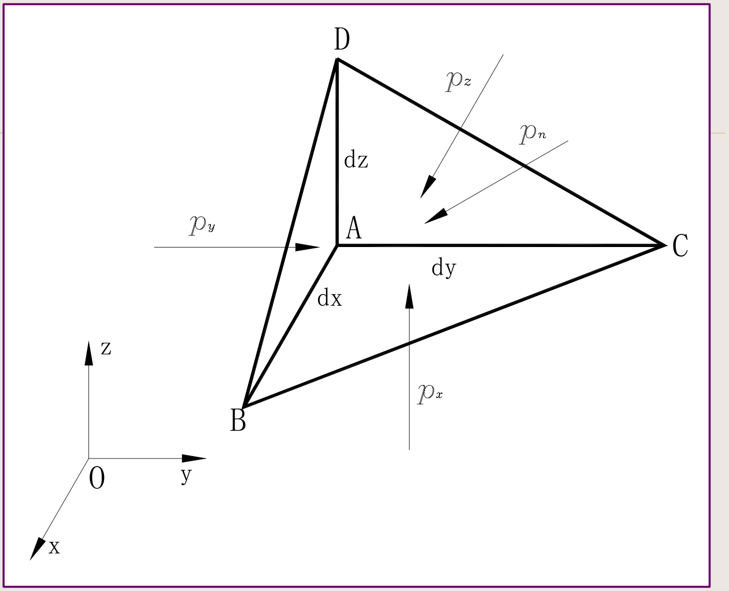


表面力：$P_x = p_x dA_x$

$$P_n = p_n dA$$

质量力：$F_x = X \cdot dM$

$$= X \cdot \frac{1}{3}(\frac{1}{2}dydz)dx \cdot \rho = X \cdot \frac{1}{6}\rho dxdydz$$



根据力的平衡条件:

$$P_x - P_n \cdot \cos(n,x) + F_x = 0$$

$$\Rightarrow p_x - p_n + \frac{1}{3}X\rho dx = 0 \qquad dx \to 0, p_x = p_n$$

同理： $p_y = p_n, p_z = p_n$ $\qquad p_n = p_x = p_y = p_z$

§2–2 液体平衡微分方程及其积分

一. 微分方程的形式:

X方向表面力:

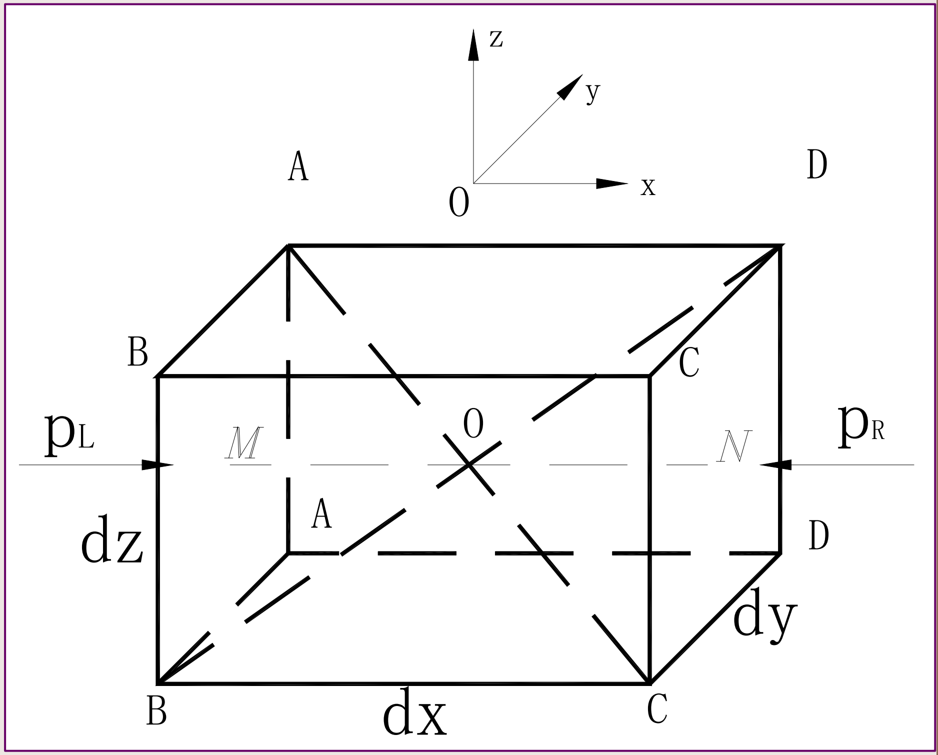
根据泰勒展开

$$p_M = p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx + \cdots$$

$$p_N = p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx - \cdots$$

$$P_L = p_M \cdot dydz$$

$$P_R = p_N \cdot dydz$$



X方向质量力:

$$X \cdot dM = X \cdot \rho dxdydz$$

根据力的平衡条件

$$P_L - P_R + X \cdot dM = 0$$

整理,得

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dxdydz + X \cdot \rho dxdydz = 0$$

同理

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.1)$$

式（2.2.1）称液体平衡微分方程（欧拉平衡微分方程）。

二. 平衡微分方程的物理意义:

$$\left.\begin{aligned} X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \\ Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0 \\ Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\}$$

➢液体的平衡微分方程实质上表明了单位质量力和单位表面力之间的平衡。

• 液体的平衡微分方程对于不可压缩液体和可压缩液体均适用。

二. 液体平衡微分方程的积分

$$\left.\begin{aligned} X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \\ Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0 \\ Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\}$$

将方程中各式依次乘以dx、dy、dz，相加得

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$$

$$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz) \qquad （2.2.3）$$

上式为液体平衡微分方程的综合式。

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

对于不可压缩液体 ρ=const, 则有

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz = d\Omega \qquad (2.2.5)$$

$$dp = \rho d\Omega \Rightarrow p = \rho\Omega + C \qquad (2.2.7)$$

式（2.2.7）为积分式，Ω称为力势函数.

三. 等压面

- 静止液体，P=const，为等压面。

由平衡方程综合式

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

可得等压面方程为

$$\boxed{Xdx + Ydy + Zdz = 0} \quad (2.2.8)$$

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

由上式可得等压面的性质:

- 等压面也是等势面;
- 等压面与质量力正交。

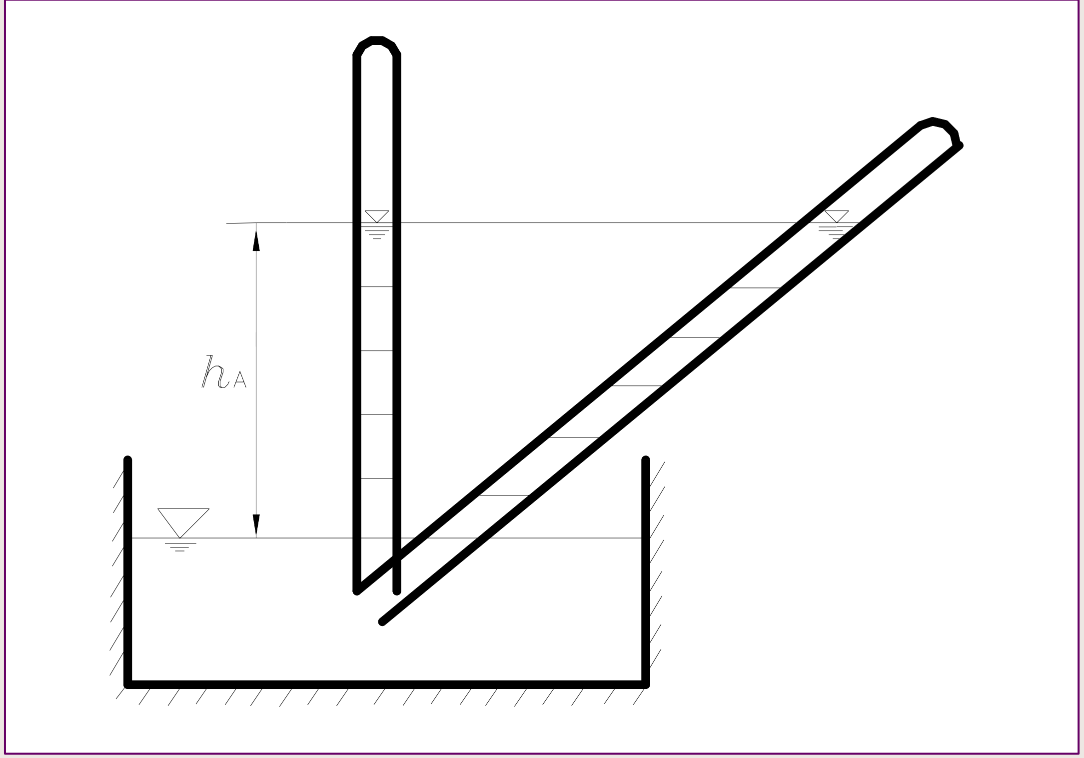
简证如下:

$$\vec{f} \bullet d\vec{l} = (Xi + Yj + Zk) \bullet (dxi + dyj + dzk)$$

$$= Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

等压面的应用一：

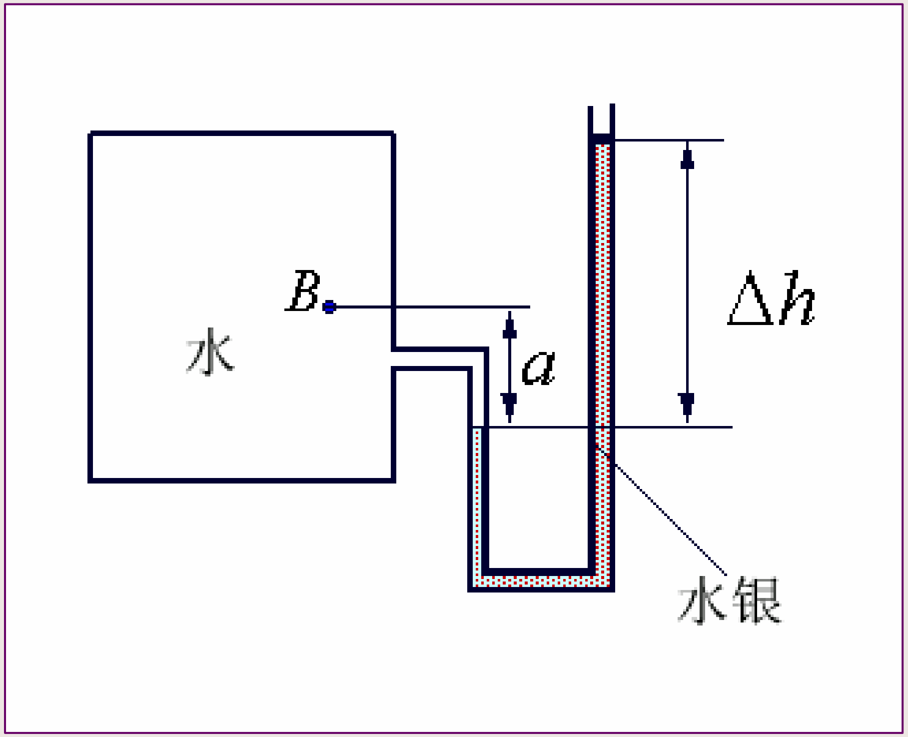
- 应用等压面测量大气压强



等压面的应用

三:

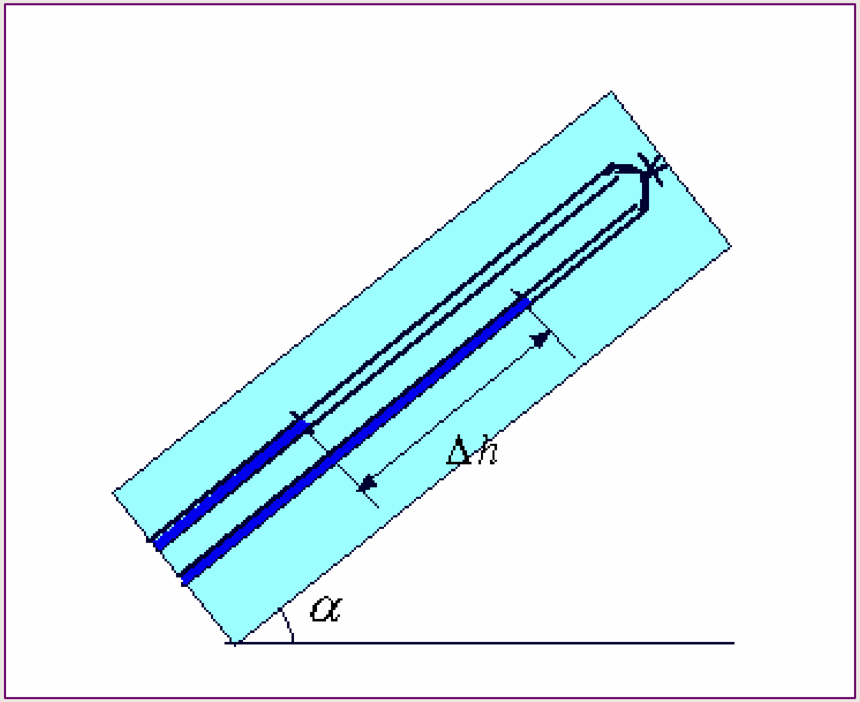
- 应用等压面测量任一点压强



等压面的应用

三：

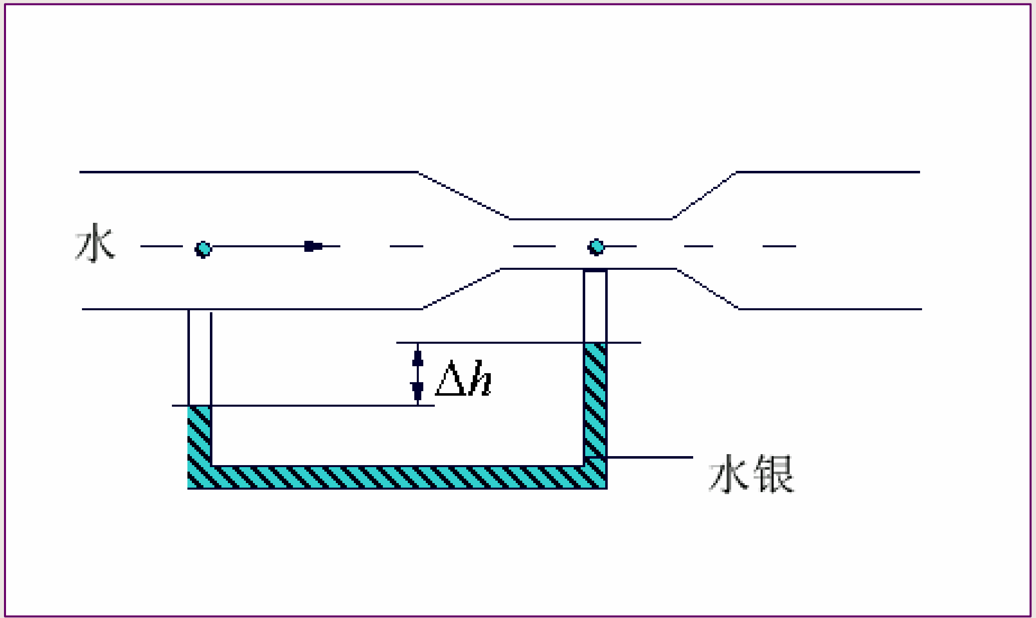
➢ 应用等压面测量任两点压强差



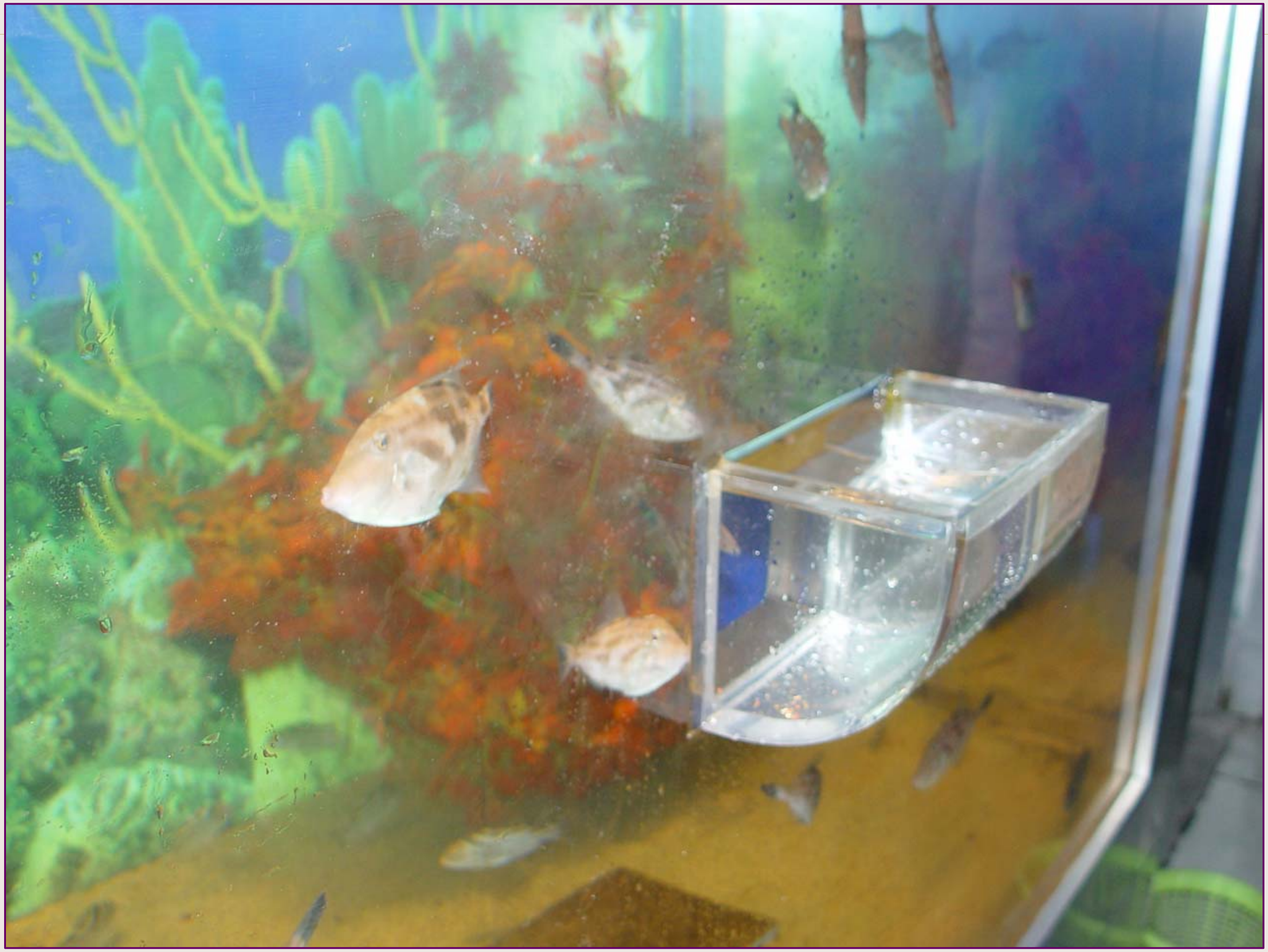
等压面的应用

四：

- 应用等压面测量任两点测压管水头差



思考题：神奇水槽为何不溢流？



§2–3 重力作用下静水压强的分布规律

一. 水静力学基本方程

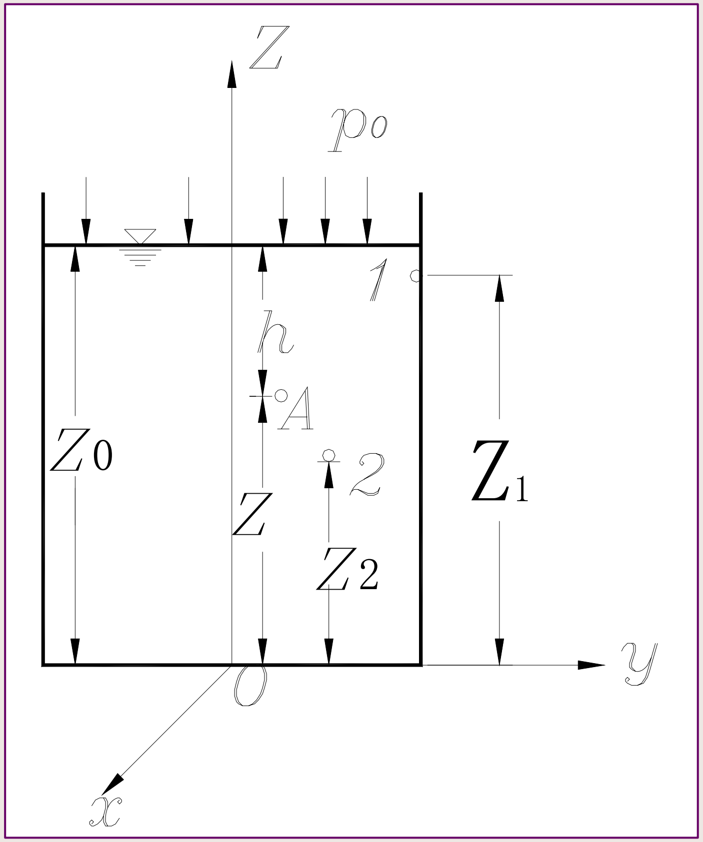
如图，质量力只有重力；

X=Y=0; Z=-g

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$= -\rho g dz = -\gamma dz$$

$$z + \frac{p}{\gamma} = C \qquad (2.3.1)$$



即重力作用下水静力学基本方程

$$z+\frac{p}{\gamma}=C \qquad \Rightarrow \frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+z_2$$

均匀连续介质静水压强性质：

$$\boxed{p_1=p_2 \Rightarrow z_1=z_2}$$

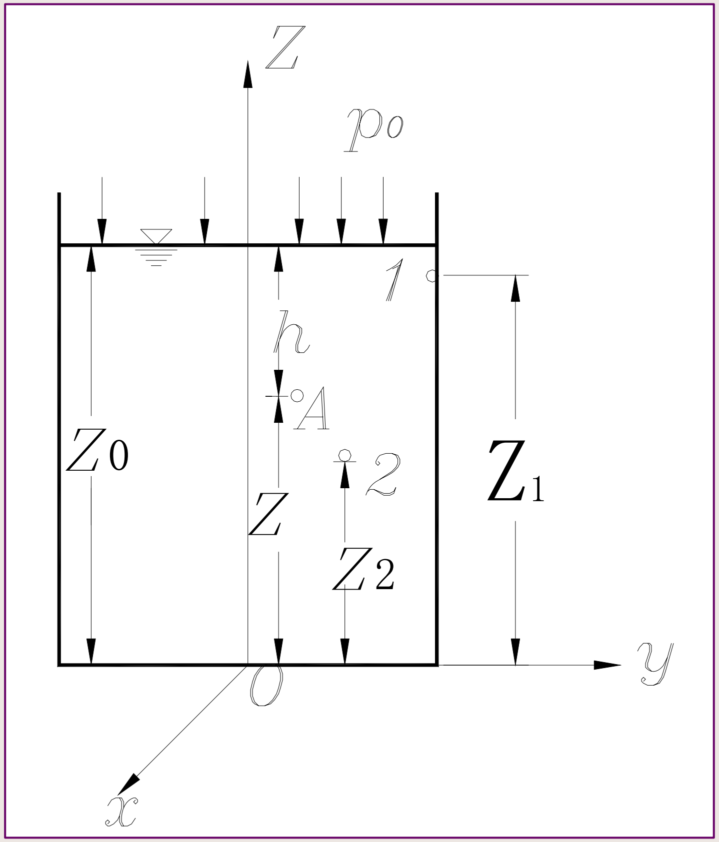
$$\boxed{z_1>z_2 \Rightarrow p_1<p_2}$$

当$z=z_0$时，$p=p_0$，则

$$C=z_0+\frac{p_0}{\gamma}$$

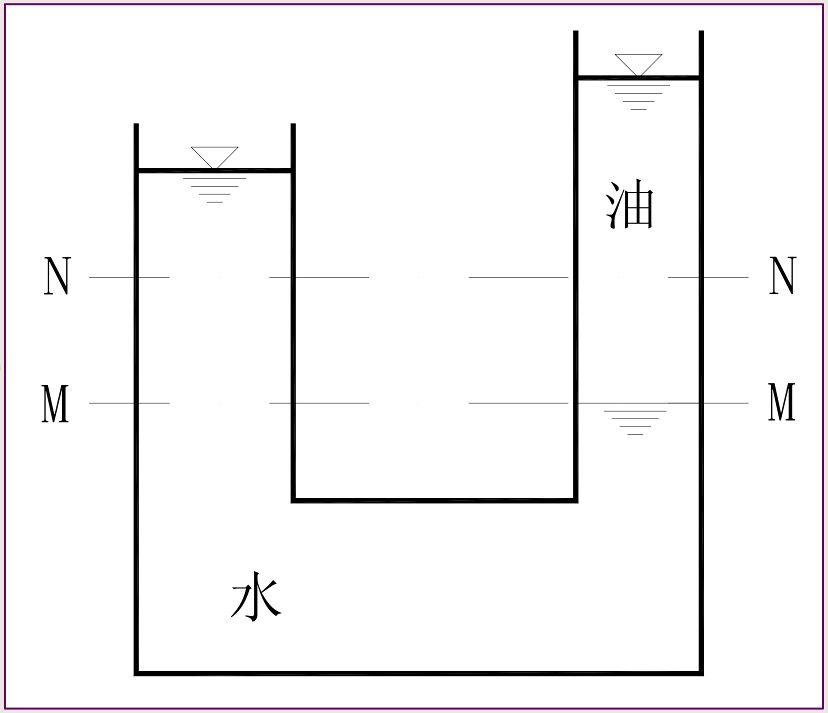
$$p=p_0+\gamma(z_0-z)$$

$$\boxed{p=p_0+\gamma h} \qquad (2.3.2)$$

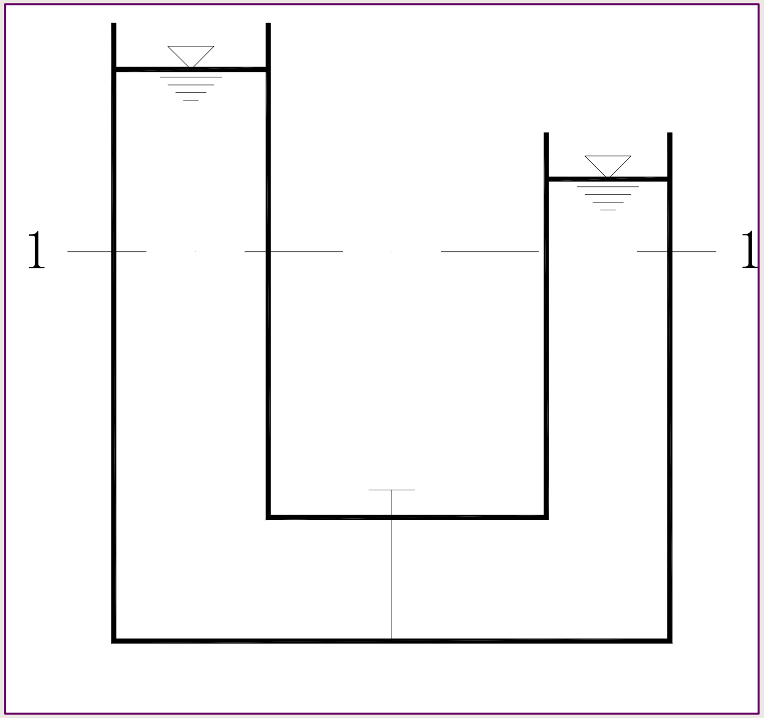


表面压强p_0可向液体内部各方向传递–帕斯卡定律

思考题：找等压面



（a）

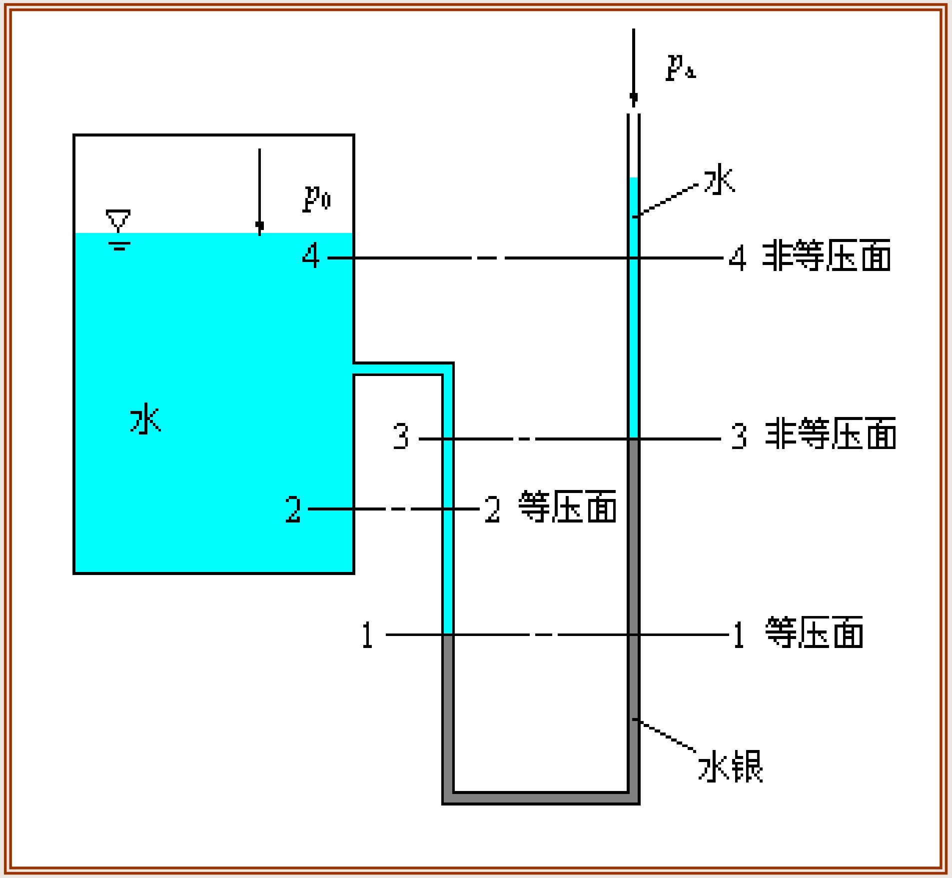


（b）

注意：

均匀连续介质

$$p_1 = p_2 \Rightarrow z_1 = z_2$$



二. 一些概念

1. 位置水头、压强水头、测压管水头

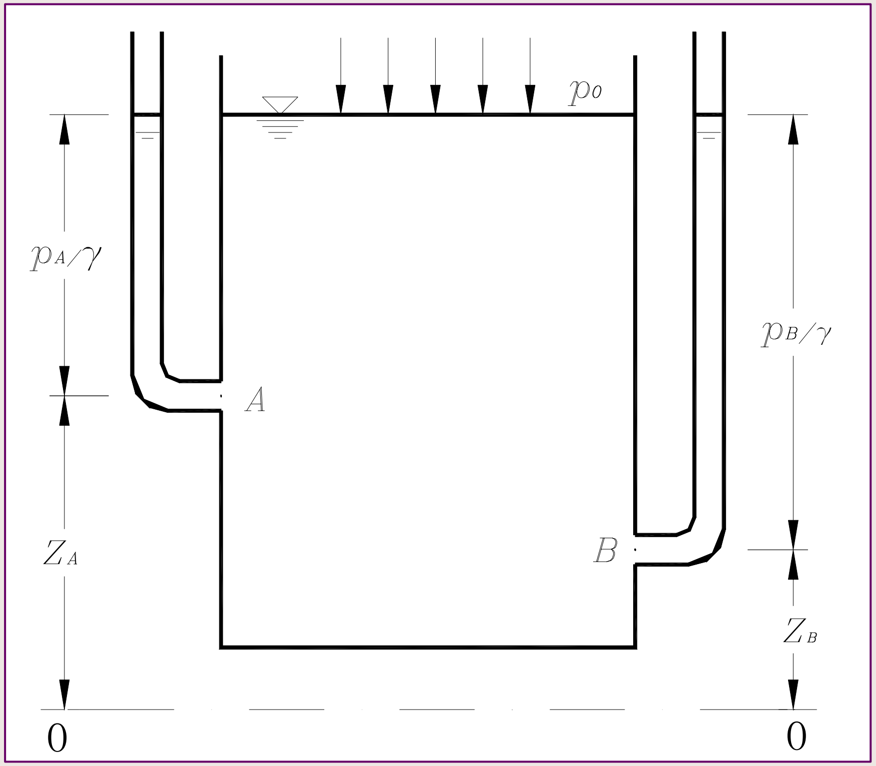
基本方程： $z+\dfrac{p}{\gamma}=C$

z: 位置水头；

p/γ: 压强水头；

z+p/γ: 测压管水头

$$z_A+\frac{p_A}{\gamma}=z_B+\frac{p_B}{\gamma}$$

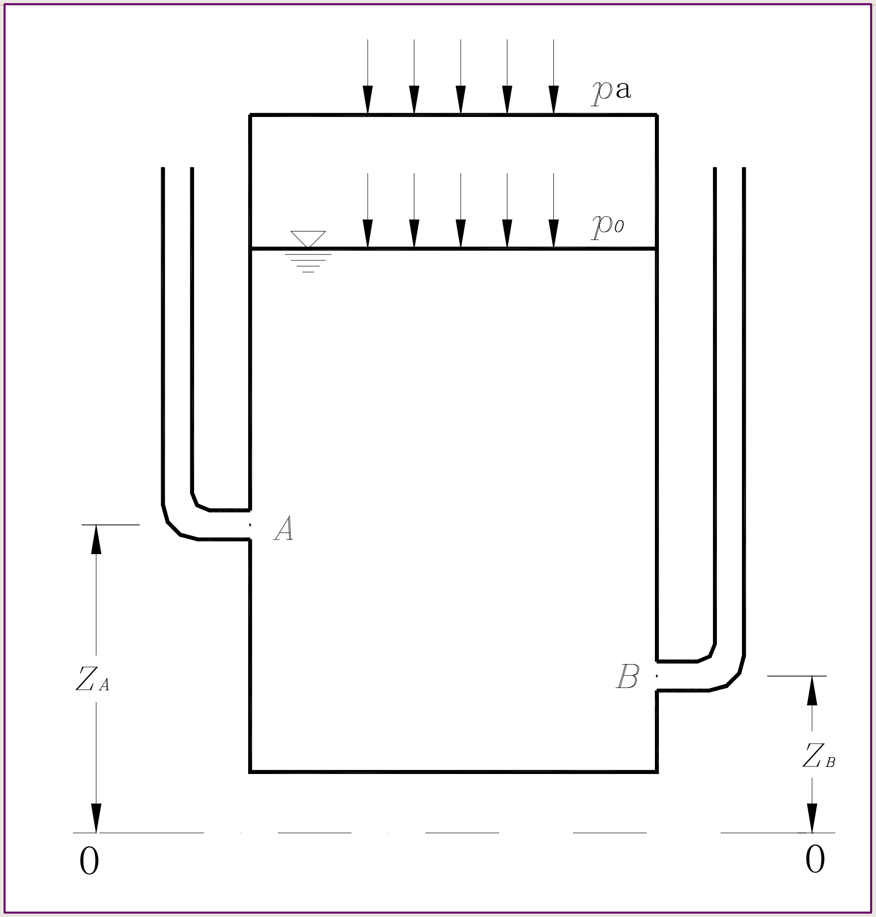


思考题:

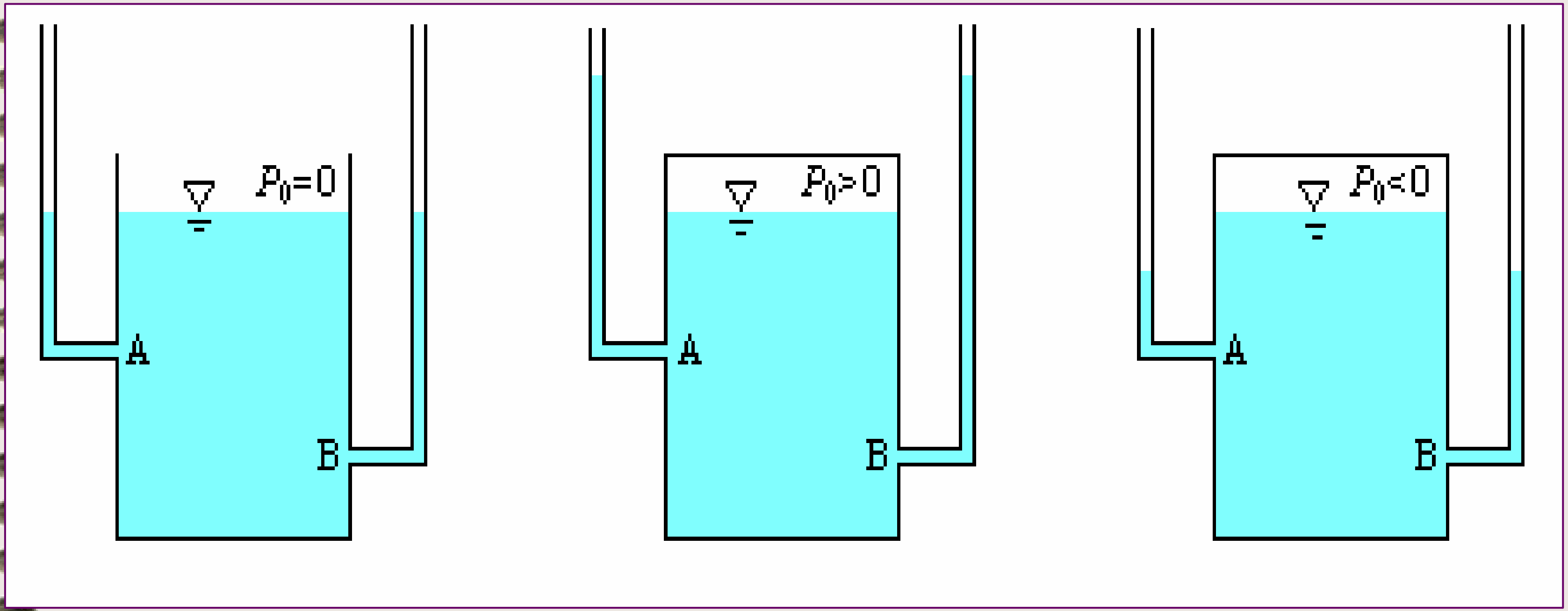
1. $p_0=p_a$时，液面高度？

2. $P_0>p_a$时，液面高度？

3. $P_0<p_a$时，液面高度？



敞口容器和封口容器的液面高度如图



2.绝对压强、相对压强、真空度

- **绝对压强**：以绝对真空状态下的压强为零点计量的压强，p_{abs}；
- **相对压强**：以当地大气压强p_a为零点计量的压强，p .

$$p = p_{abs} - p_a$$

$$p = p_0 + \gamma h - p_a = (p_0 - p_a) + \gamma h$$

实际工程中，$p_0 = p_a$

$$\boxed{p = \gamma h}$$

若$p_{abs}<p_a$，$p=p_{abs}-p_a<0$，称存在负压

- **真空压强：负压的绝对值，p_v**

$$p_v=|p_{abs}-p_a|=p_a-p_{abs} \qquad (2.3.5)$$

- **真空度：**真空压强用水柱高度表示，h_v

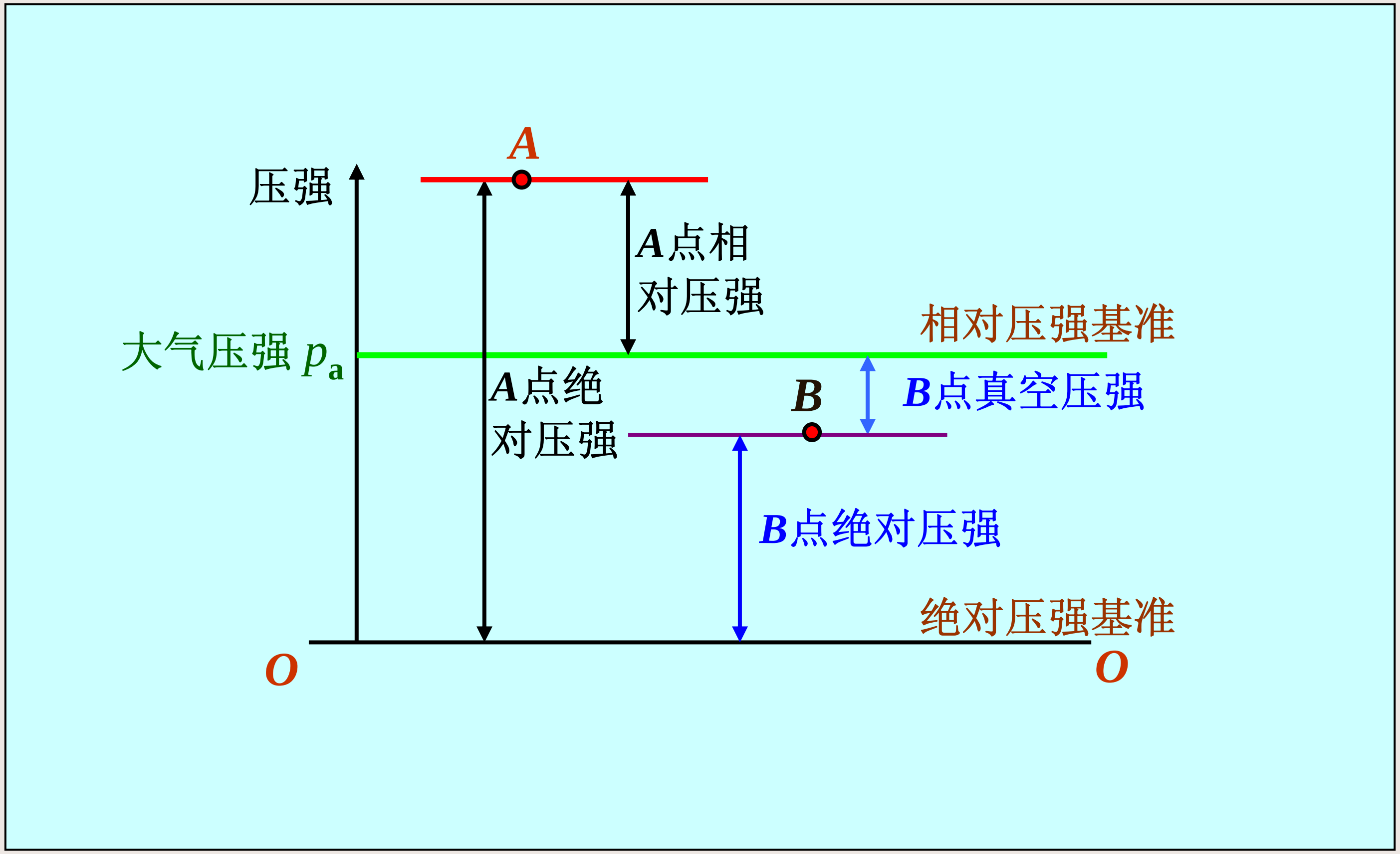
$$h_v=\frac{p_v}{\gamma}=\frac{p_a-p_{abs}}{\gamma}\ (m水柱) \qquad (2.3.6)$$

标准大气压：$1p_{标}=760mmHg=1.013\times10^5(N/m^2)$

工程大气压：$1p_{工}=735mmHg=9.8\times10^4(N/m^2)$

$=98kPa=10mH_2O$

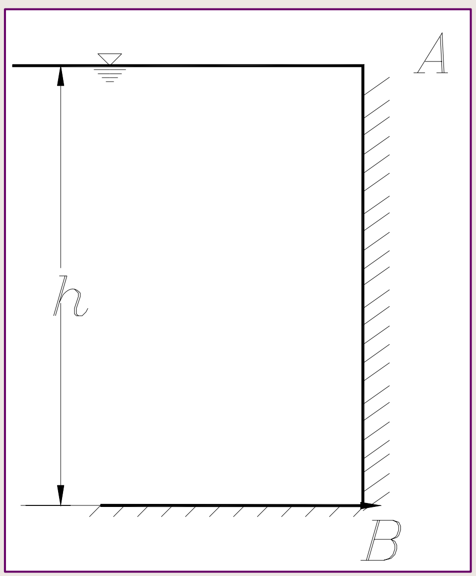
P_{ABS}、P及P_V三者的关系：

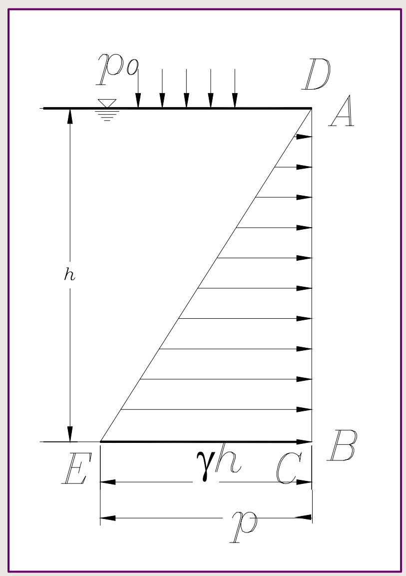


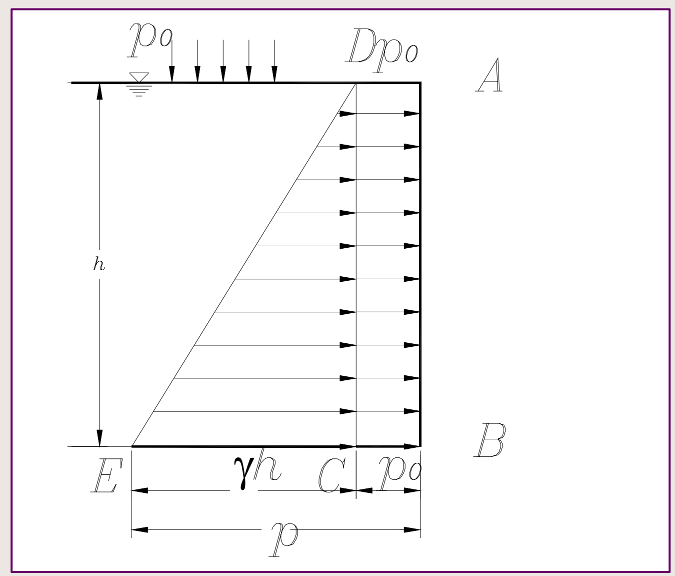
三. 静水压强图示

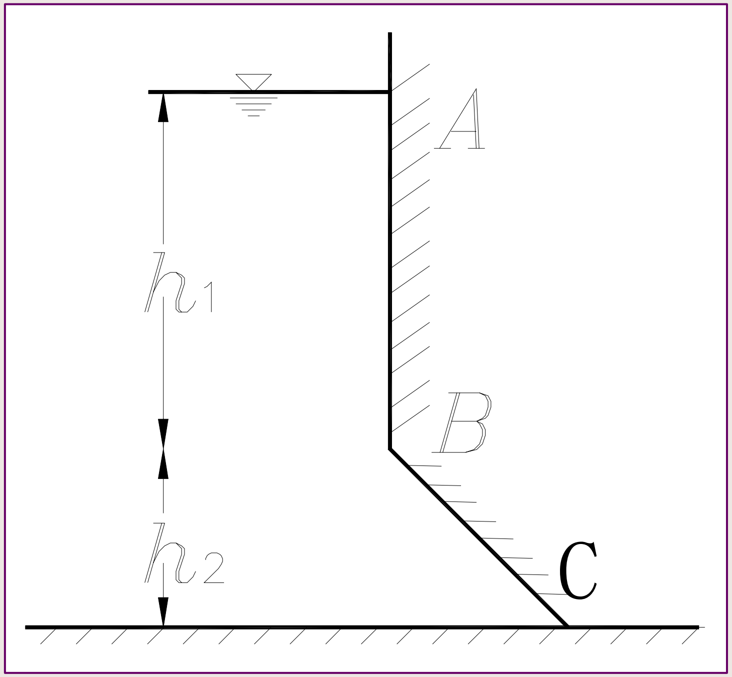
依据：1. 水静力学基本方程 $p=\gamma h$;

2. 静水压强特性（大小、方向）

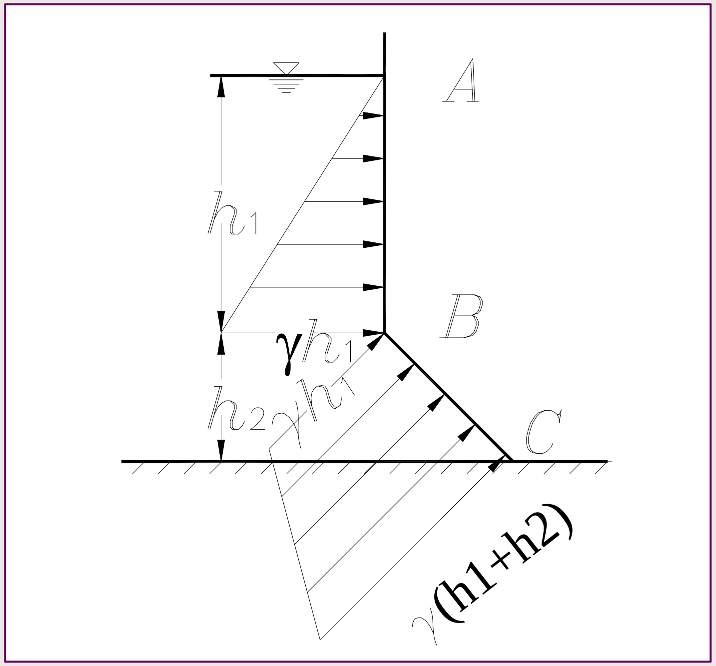




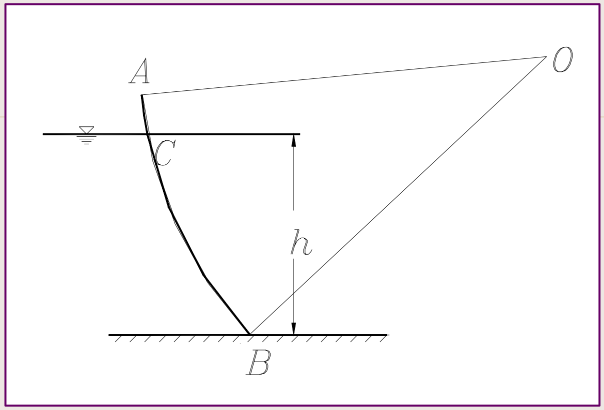


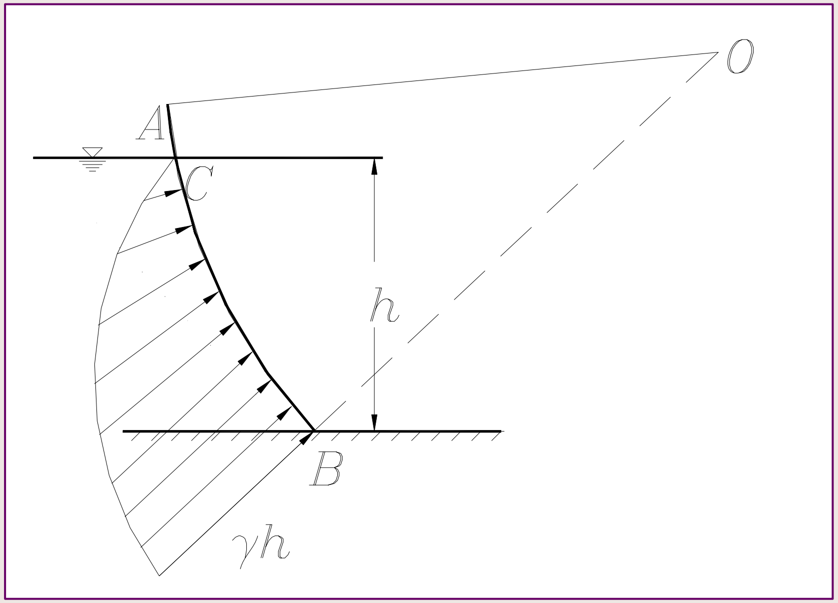


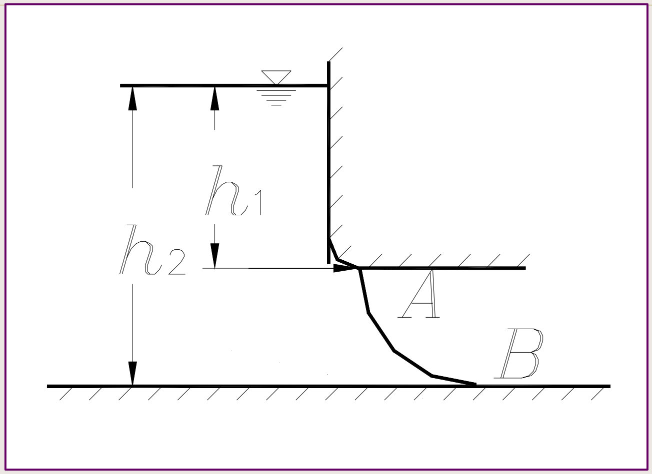
A
B
C
h_1
h_2



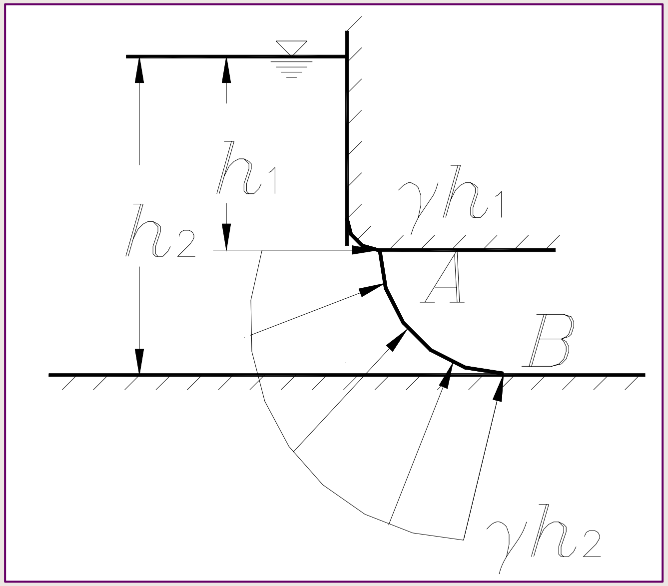
A
B
C
h_1
h_2
γh_1
γh_1
γ(h1+h2)


A
O
C
h
B


O
A
C
h
B
γh



h1
h2
A
B



h1
h2
γh1
A
B
γh2

§ 2–4　压强的量测

➢原理：等压面原理

- 差别：量程大小、计计量精度

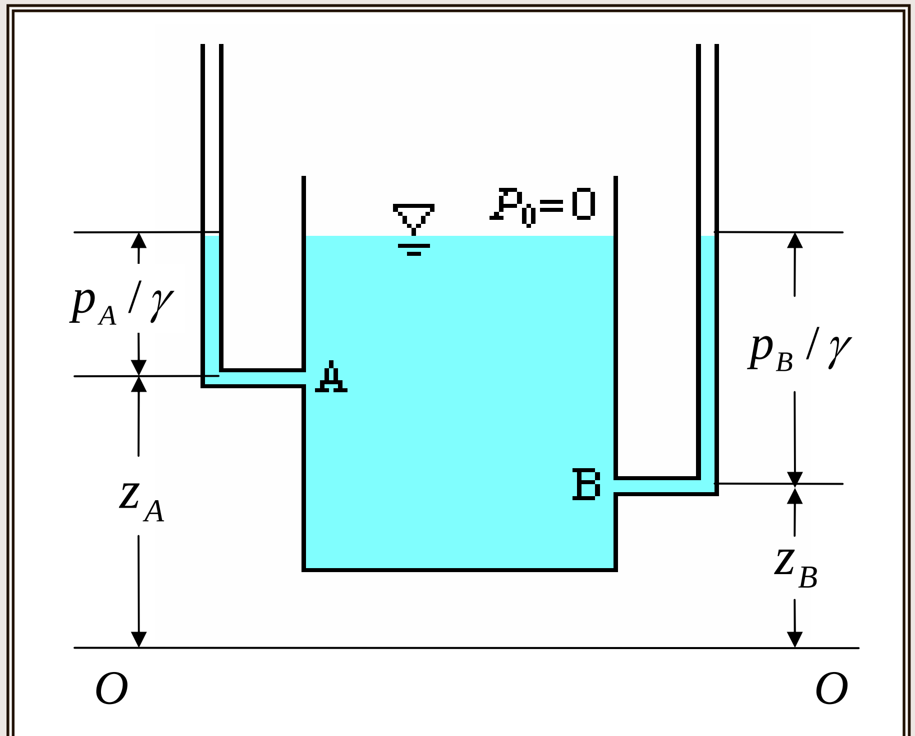
- 分类：
  - （1）液柱式压力计
  - （2）金属压力表
    - 压力表
    - 真空表

一．液柱式压力计

- 根据液柱高度或高差测量压强大
- 一般测量相对压强.

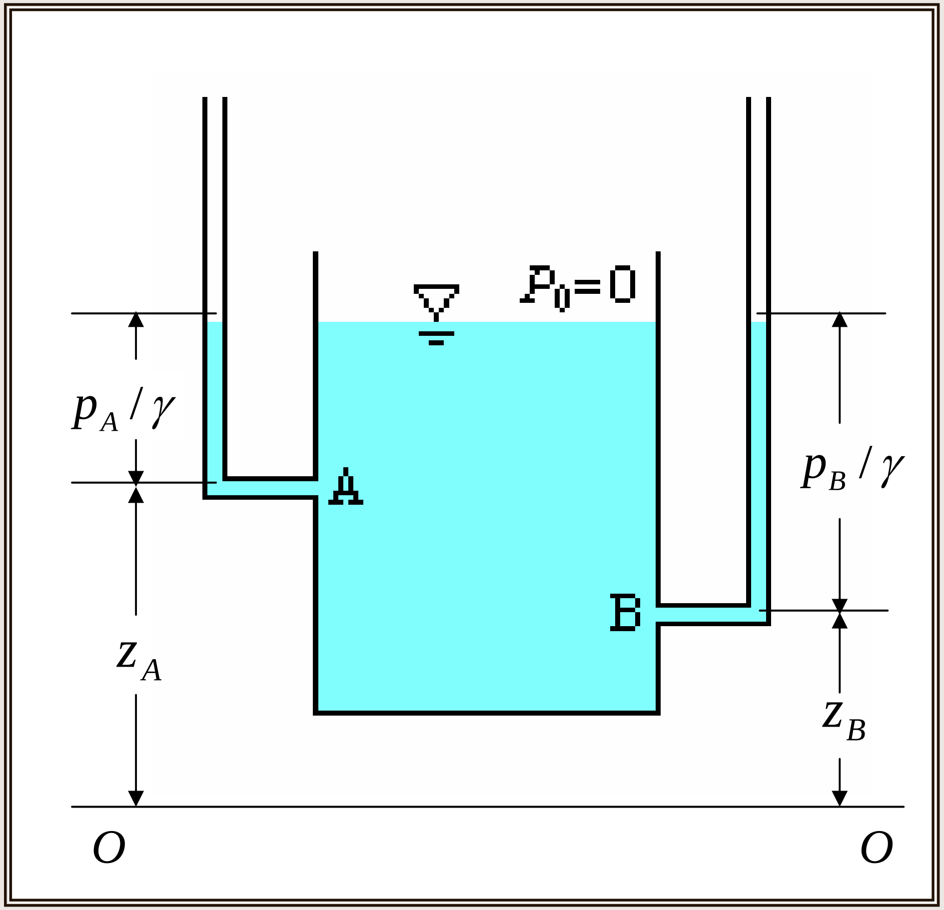
1. 测压管

在内有液体的容器壁选定测点，垂直于壁面打孔，接出一端开口与大气相通的玻璃管，即为测压管。

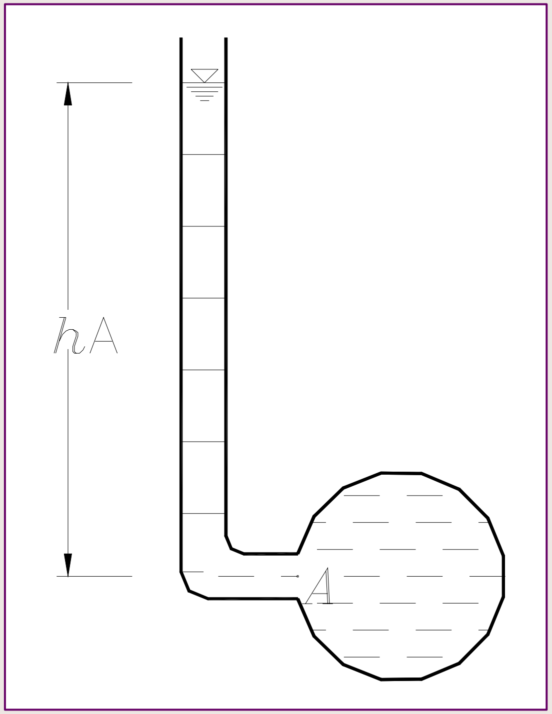


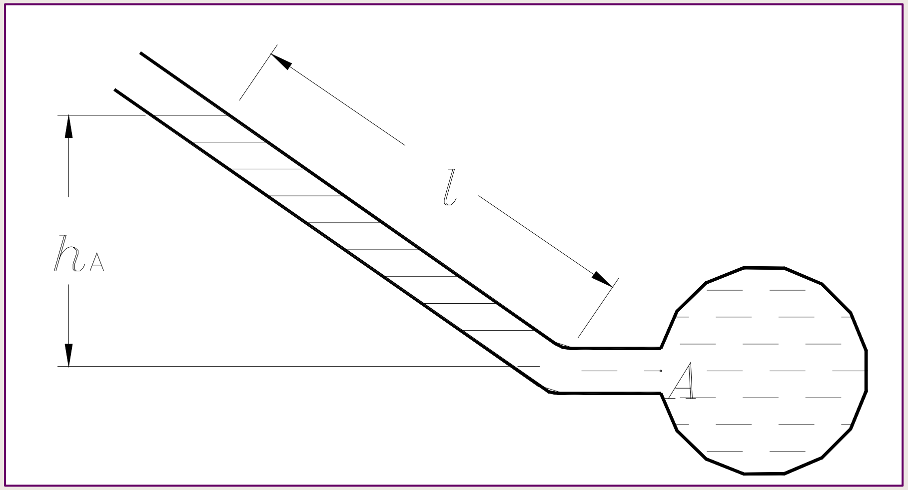
• 测静压只须一根测压管

如果容器内的液体是静止的，一根测压管测得的测压管水头也就是容器内液体中任何一点的测压管水头。如接上多根测压管，则各测压管中的液面都将位于同一水平面上。



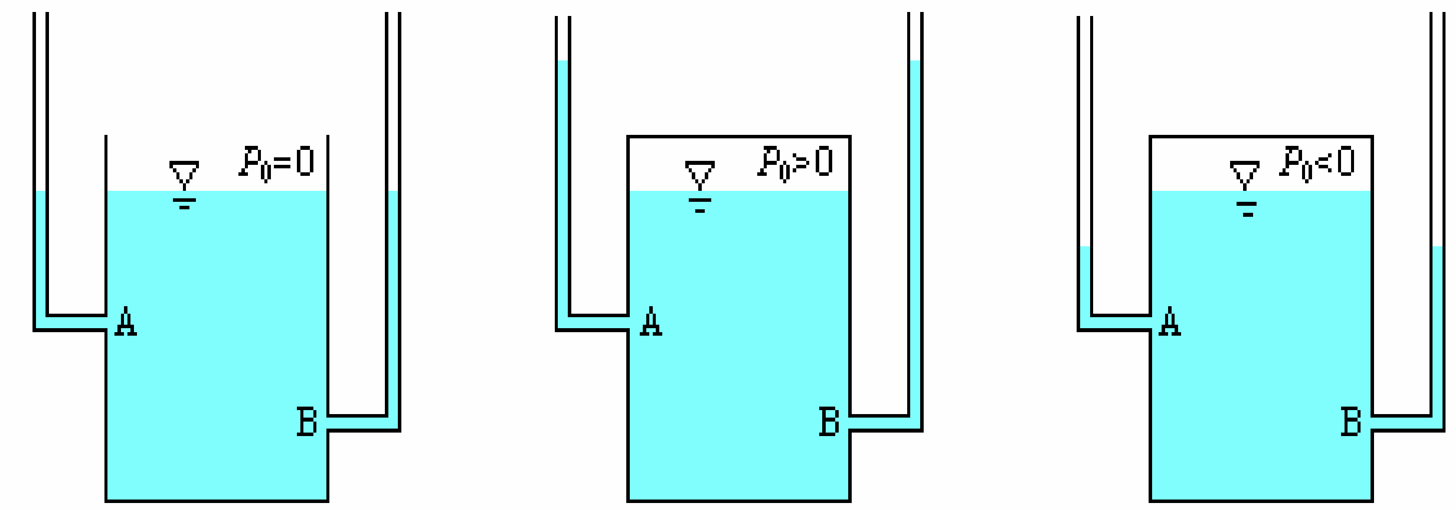
• 测压管直接用同种液体的液柱高度测量压强





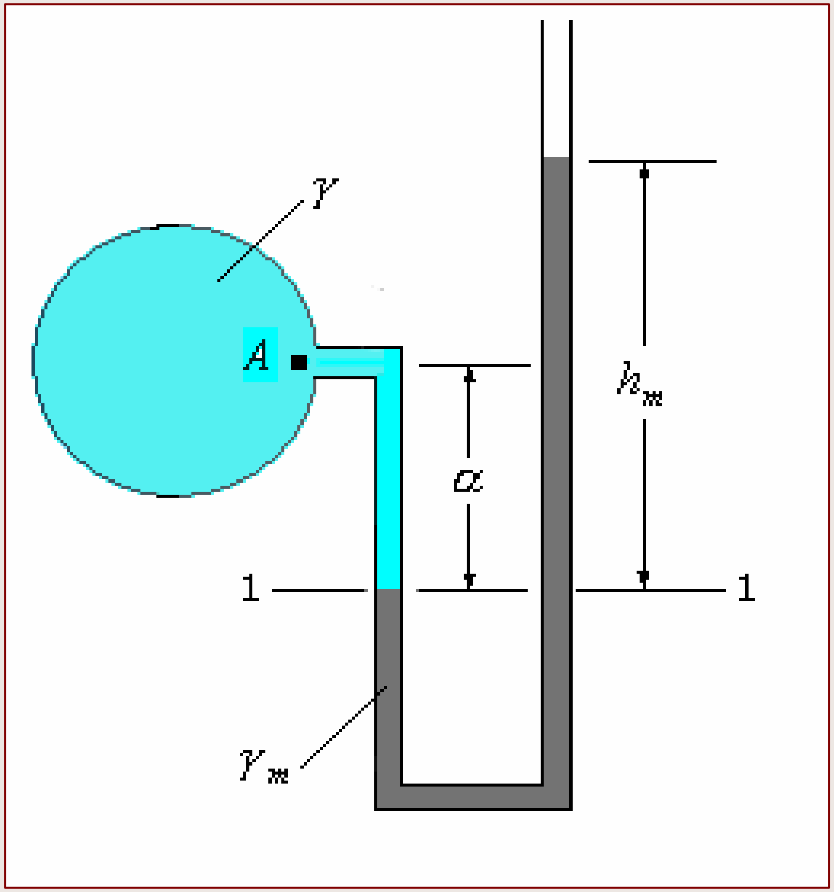
$$p_A = \gamma h_A$$

- 敞口容器和封口容器接上测压管后的情况如图



如果连通的静止液体区域包括多种液体，则须在它们的分界面处作过渡。

$$p_A = \gamma_m h_m - \gamma a$$



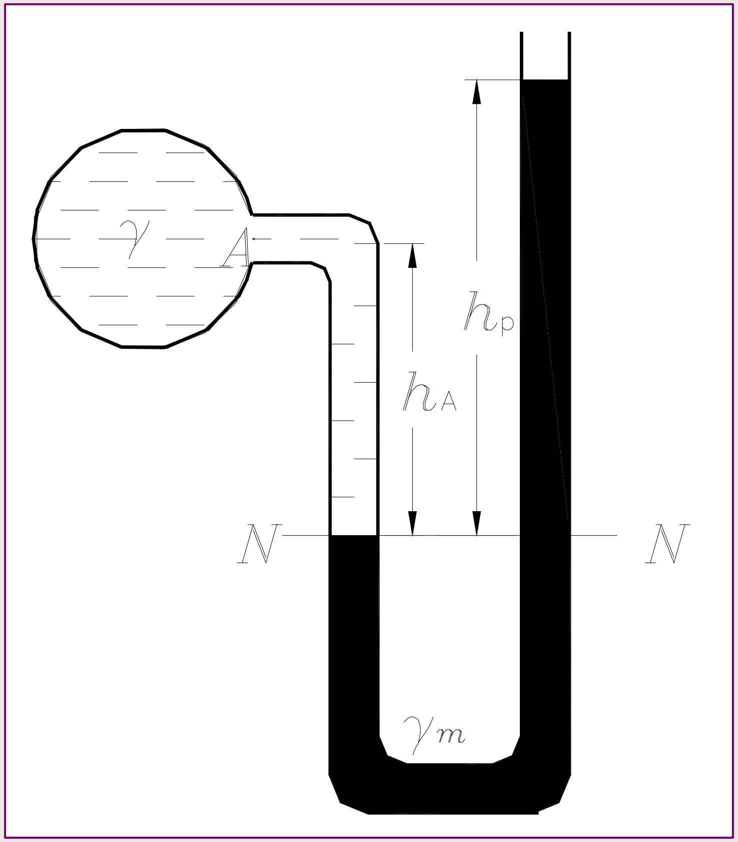
2. U形压力计

➢ 测量的压强较大时，采用重度大的液体作为量测介质；

- A点压强：

$$p_A + \gamma h_A = \gamma_m h_p$$

$$p_A = \gamma_m h_p - \gamma h_A$$



3. 压差计（比压计）

➢ 用于测量任意两点的测压管水头差或压强差;

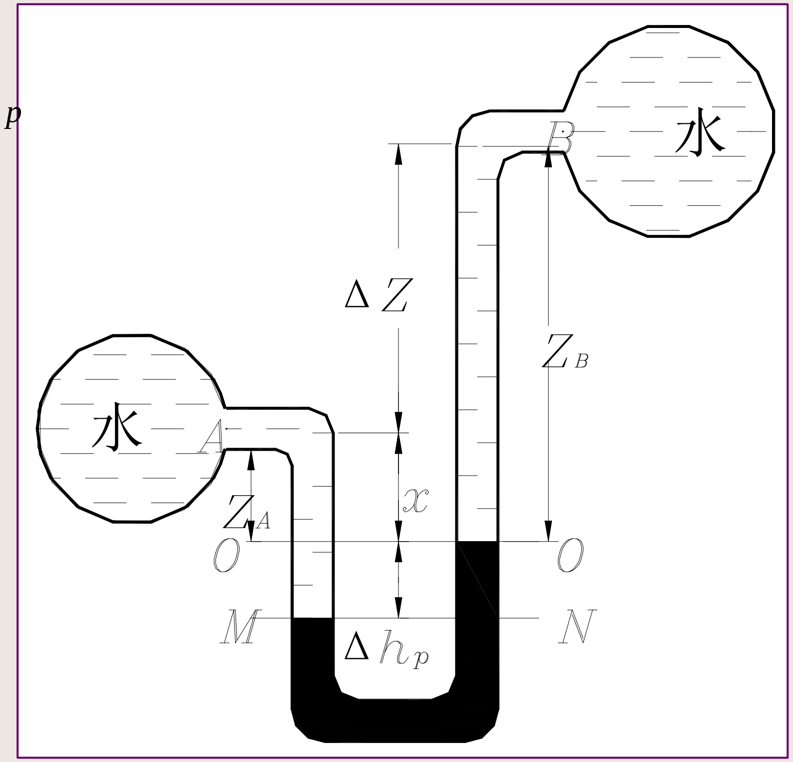
$$p_A+\gamma(z_A+\Delta h_p)=p_B+\gamma z_B+\gamma_m\Delta h_p$$

$$(z_A+\frac{p_A}{\gamma})+\Delta h_p=(z_B+\frac{p_B}{\gamma})+\frac{\gamma_m}{\gamma}\Delta h_p$$

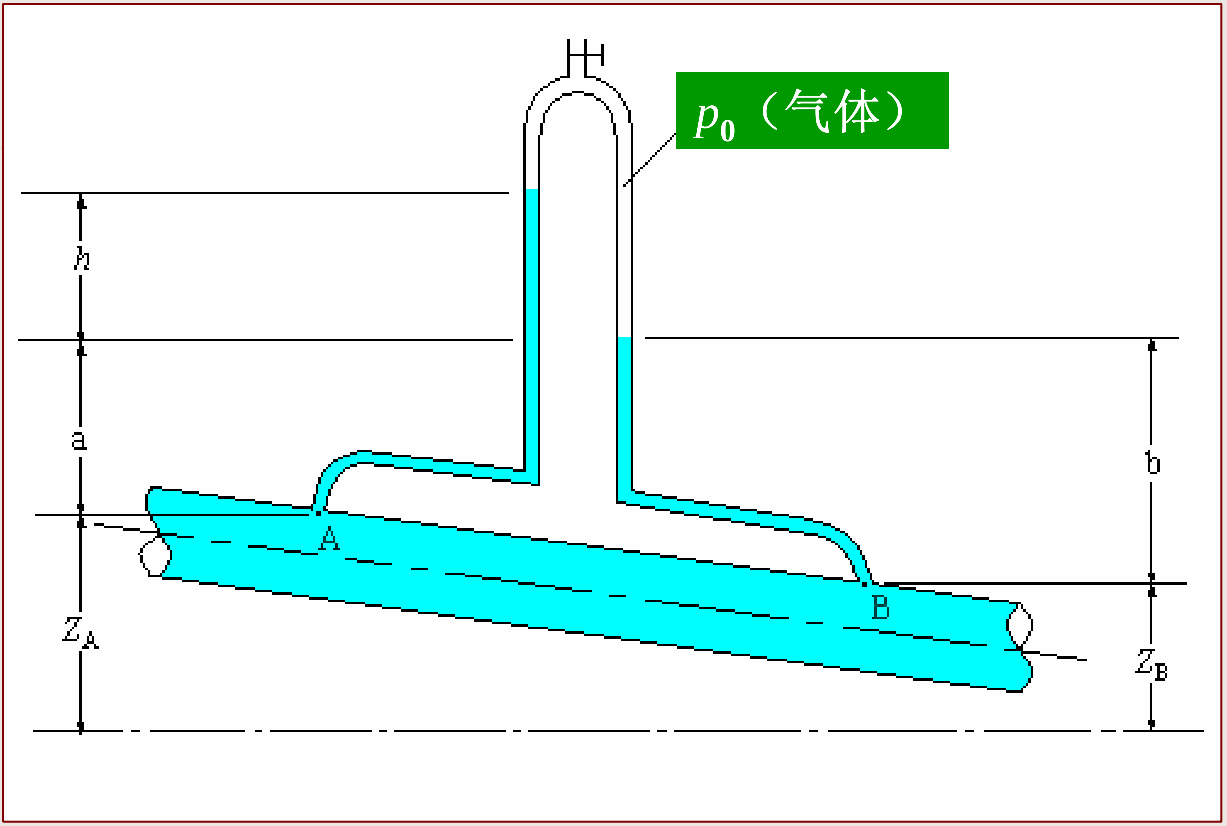
$$(z_A+\frac{p_A}{\gamma})-(z_B+\frac{p_B}{\gamma})$$

$$=\frac{\gamma_m}{\gamma}\Delta h_p-\Delta h_p=12.6\Delta h_p$$

$$p_A-p_B=\gamma(12.6\Delta h_p+\Delta z)$$

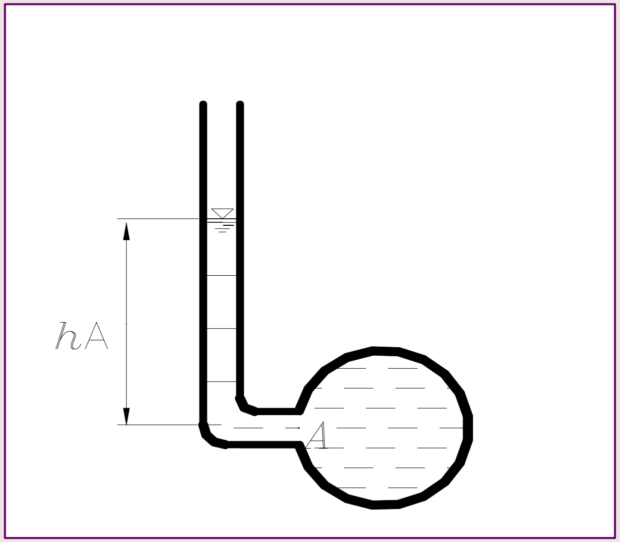


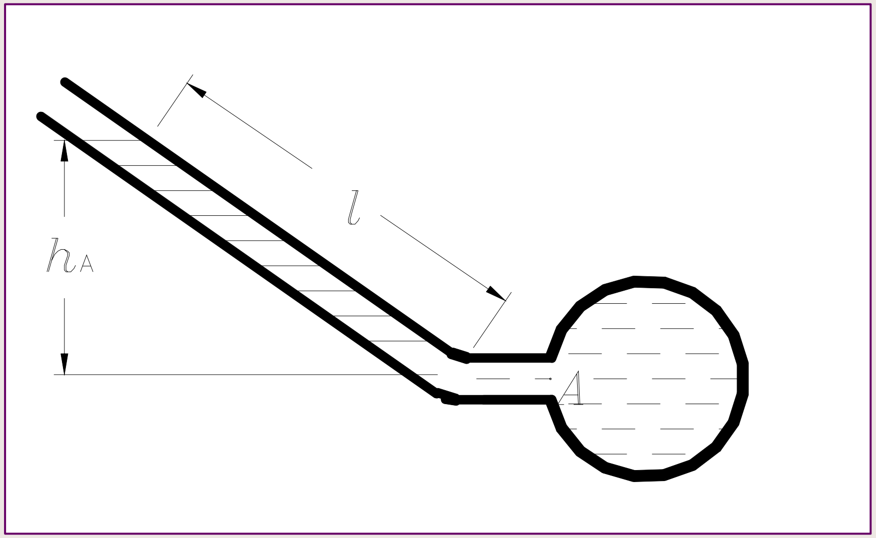
测压管不只可以测量静压，还可以用到管道中去。（管道中的流体是流动的）



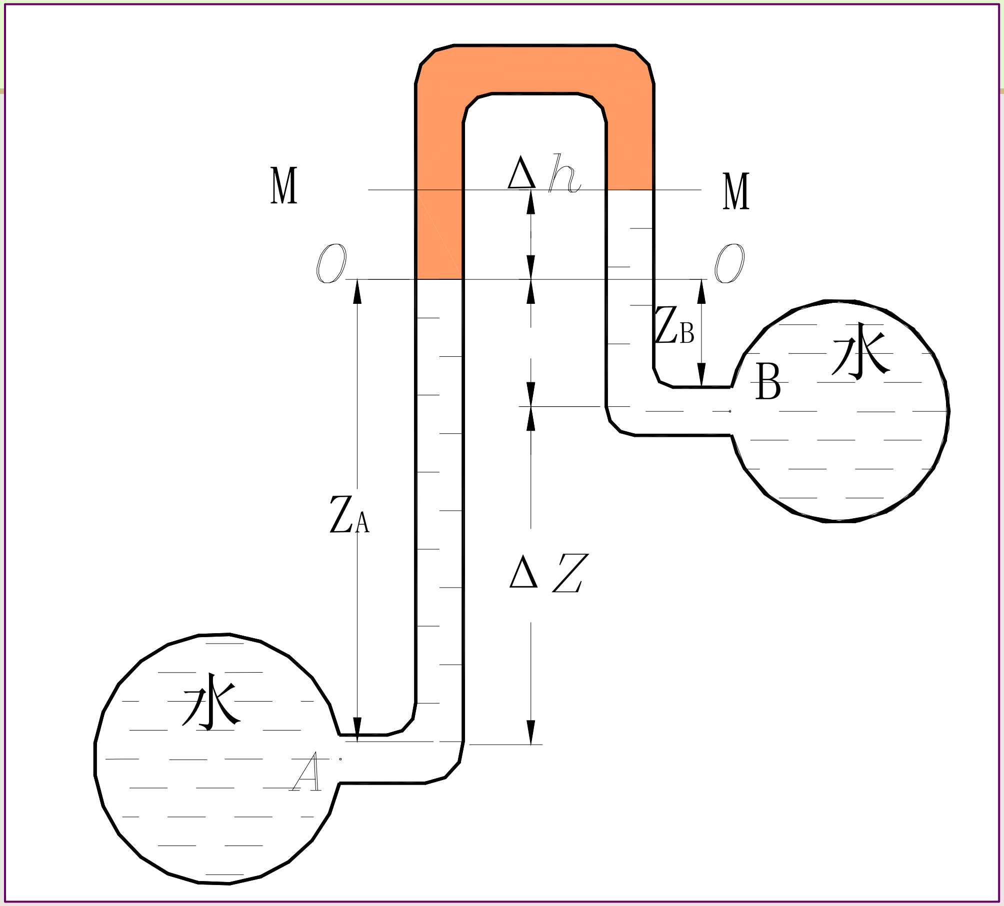
$$(z_A + \frac{p_A}{\rho g}) - (z_B + \frac{p_B}{\rho g}) = h$$

➢若所测压强很小，可以倾斜安置压差计.





- 若所测两点压强差很小，也可以采用较轻液体（煤油、空气等），但此时要将U形管倒置.



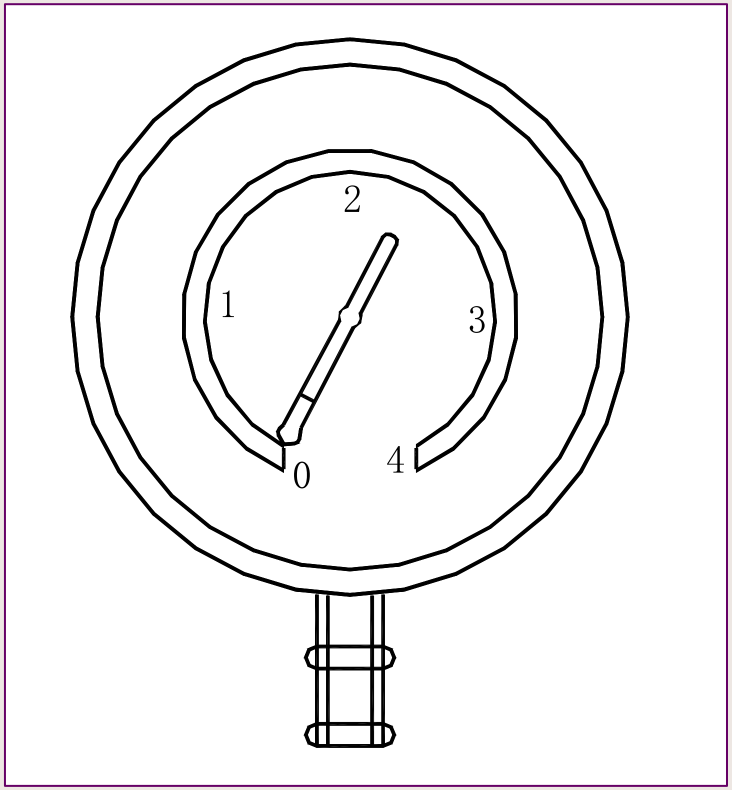
二. 金属压力表（压力表、真空表）

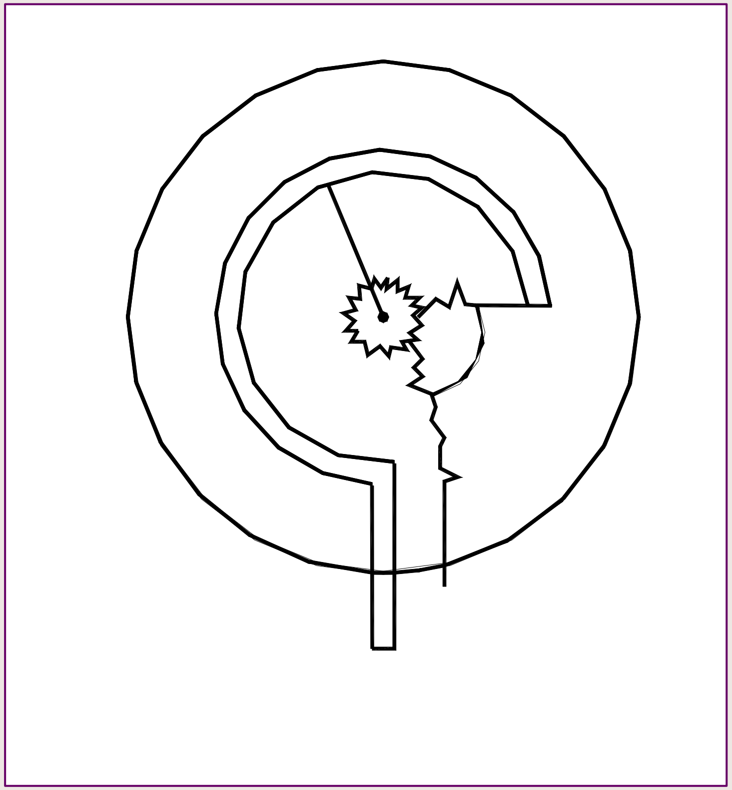
- 液柱式压力计：精度高，但量测范围小、携带不方便，主要用于实验室。

➢ 压力表：测相对压强.

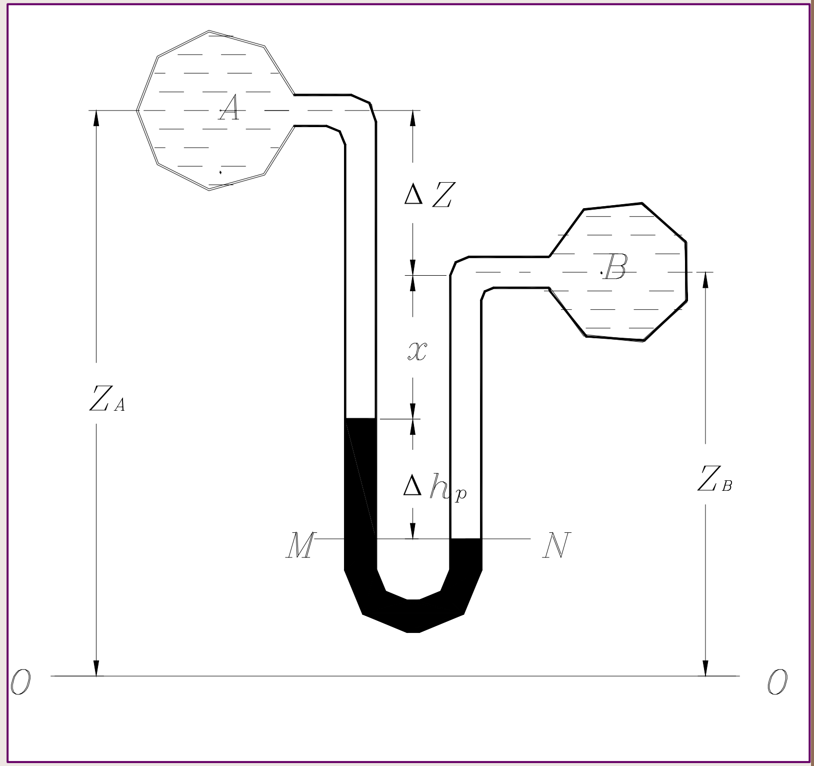
➢ 真空表：测真空压强.

金属压力表





例2-3 如图所示, 量测两水管中A与B的压强差.已知 $\Delta z = 1.0m$ ，$\Delta h_p = 1.0m$



解:应用等压面原理，M-N为等压面 .

$$p_M = p_A + \gamma(\Delta z + x) + \gamma_m \Delta h_p$$

$$p_N = p_B + \gamma(x + \Delta h_p)$$

$$p_N = p_M$$

$$p_B - p_A = -\gamma(x + \Delta h_p) + \gamma(\Delta z + x) + \gamma_m \Delta h_p$$

$$= -\gamma(\Delta h_p - \Delta z) + \gamma_m \Delta h_p$$

$$= 9.8 \times (1.0 - 1.0) + 133.28 \times 1$$

$$= 133.28 kN / m^2$$

例2-4 已知h=5m，求A点的绝对压强，相对压强及真空度.

解：1，2两点在同一等压面上，故

$$p_2 = p_1 = p_a$$

$$p_2 = p_3 + \gamma h$$

3点以上为气体，忽略其密度，故A点绝对压强为

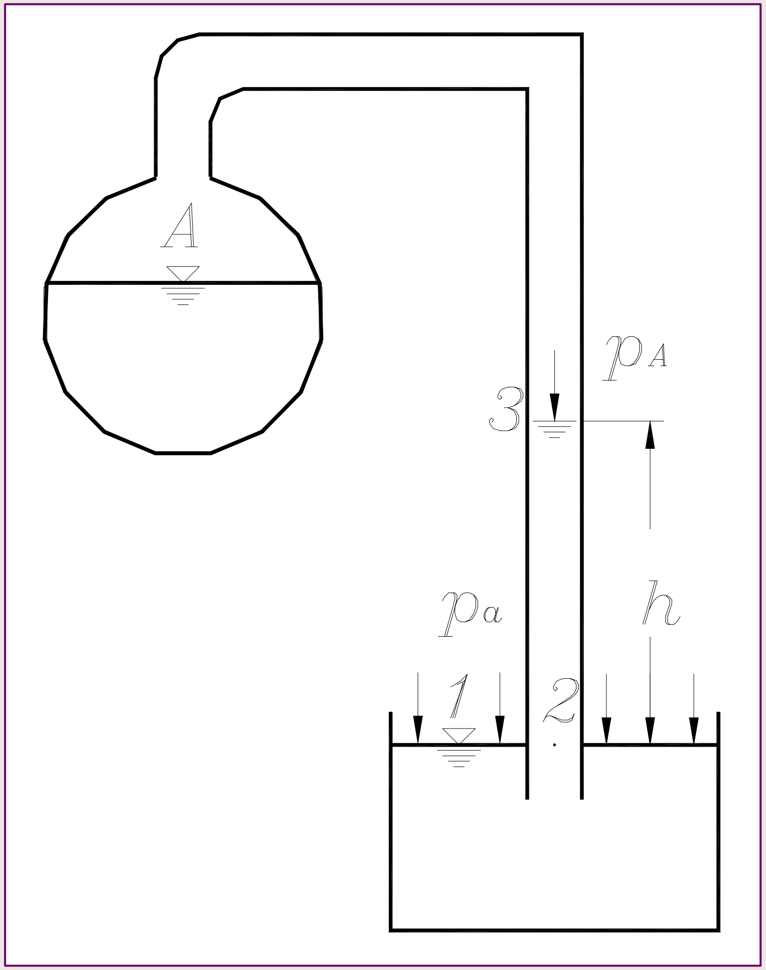
$$p_3 = p_A = p_2 - \gamma h = p_a - \gamma h$$

$$= 98 - 9.8 \times 5$$

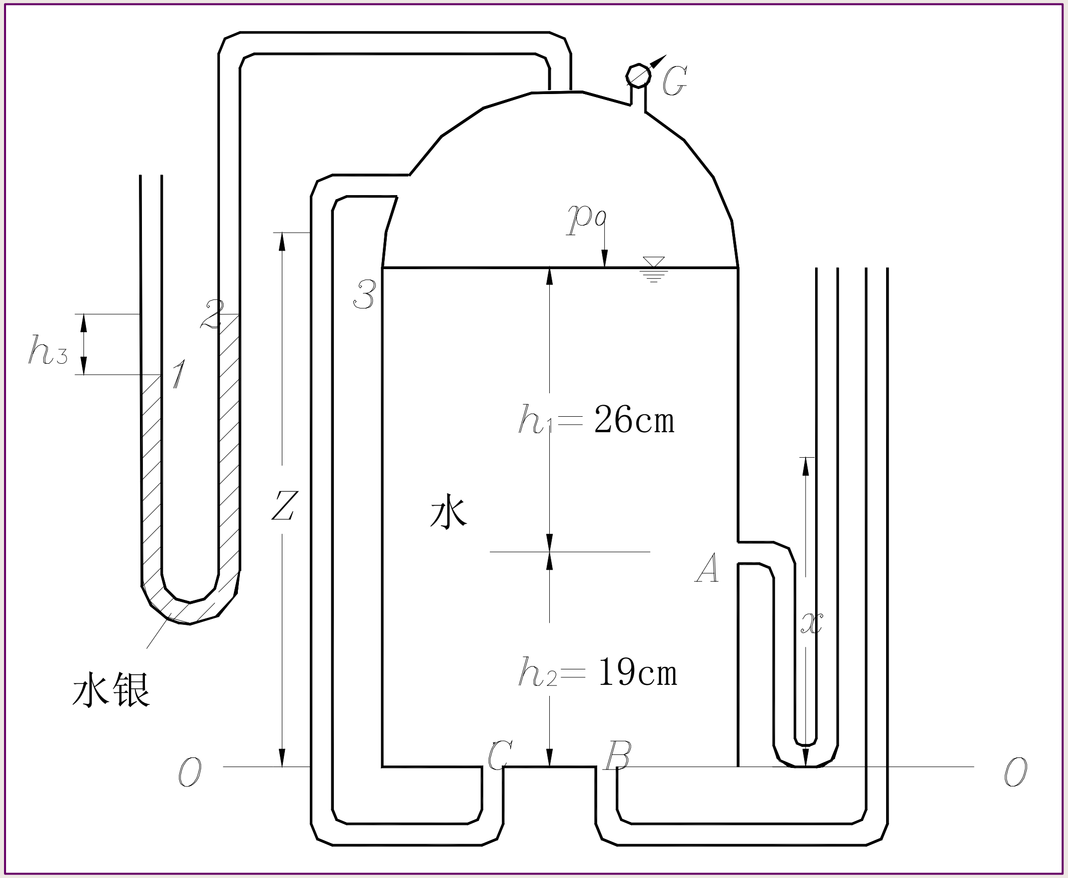
$$= 49kN/m^2$$

$$p_{IA} = 49 - 98 = -49kN/m^2$$

$$h_{vA} = \frac{98-49}{9.8} = 5m\text{水柱}$$



例2-5 已知压力计液面高差h_3=0.03m，其它如图。求(1)压力表读数；(2) A、B、C三点压强水头和测压管水头是否相等？为什么？(3) A、B、C三管水面位置如何？

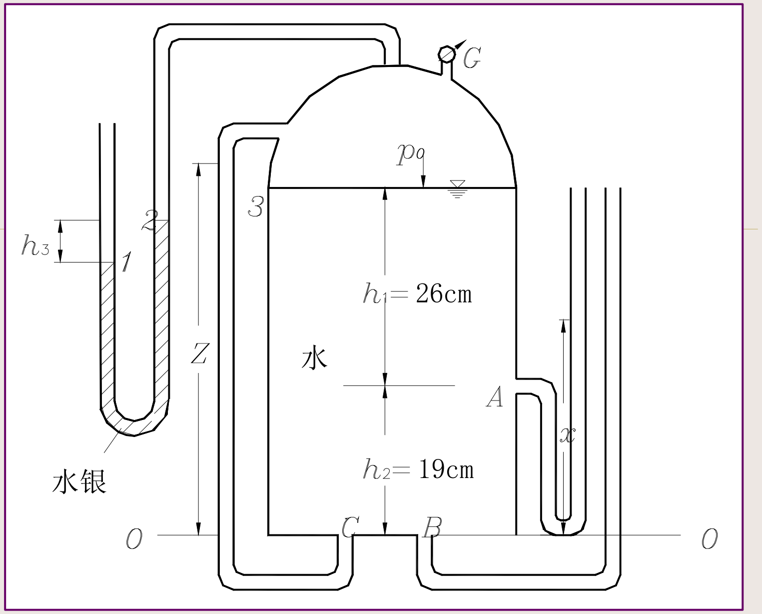


解:

（1）忽略气体密度，2、3点液面压强相等。

$$p_1 = p_2 + \gamma_m h_3$$

$$\boxed{p_2 = p_1 - \gamma_m h_3 = -3.998(KN/m^2)}$$



（2）

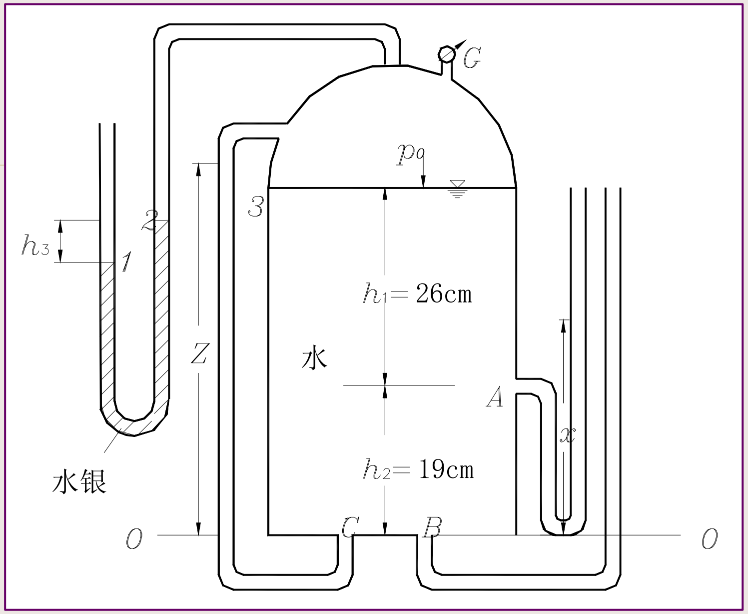
$$\boxed{\frac{p_A}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + h_1 = \frac{-3.998}{9.8} + 0.26 = -0.148(mH_2O)}$$

$$\boxed{\frac{p_B}{\gamma} = \frac{p_C}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + h_1 + h_2 = 0.042(mH_2O)}$$

解:

（2）

$$(z+\frac{p}{\gamma})_{A,B,C} = z_A + \frac{p_A}{\gamma}$$
$$= 0.19 - 0.148 = 0.042(m)$$



（3）A、B管与大气相通

$$h_A = h_B = 0.042(m)$$

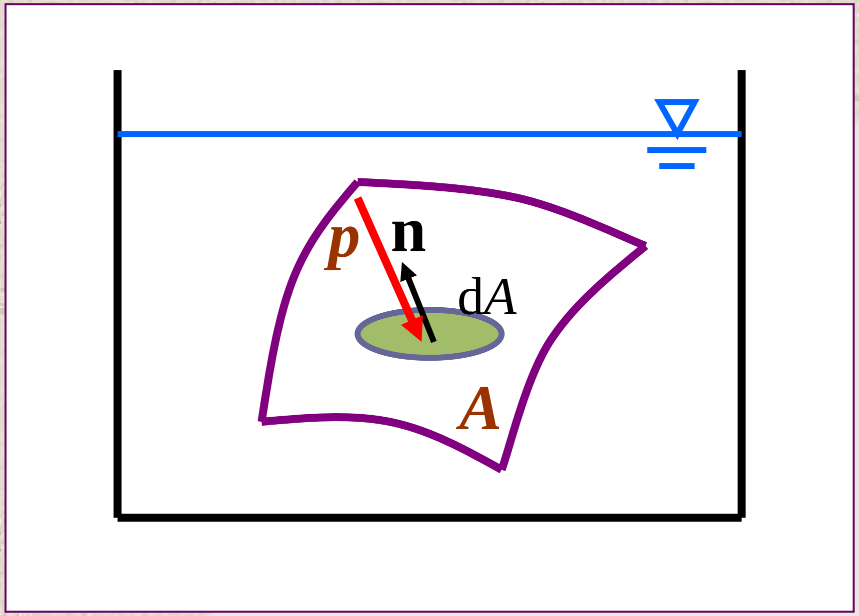
C管与容器相通

$$h_C = 0.45(m)$$

§2-5 作用在平面上的静水总压力

- 在已知静止液体中的压强分布后，通过求解物体表面 A 上的矢量积分

$$\mathbf{P}=\iint_A p\,\mathrm{d}A$$



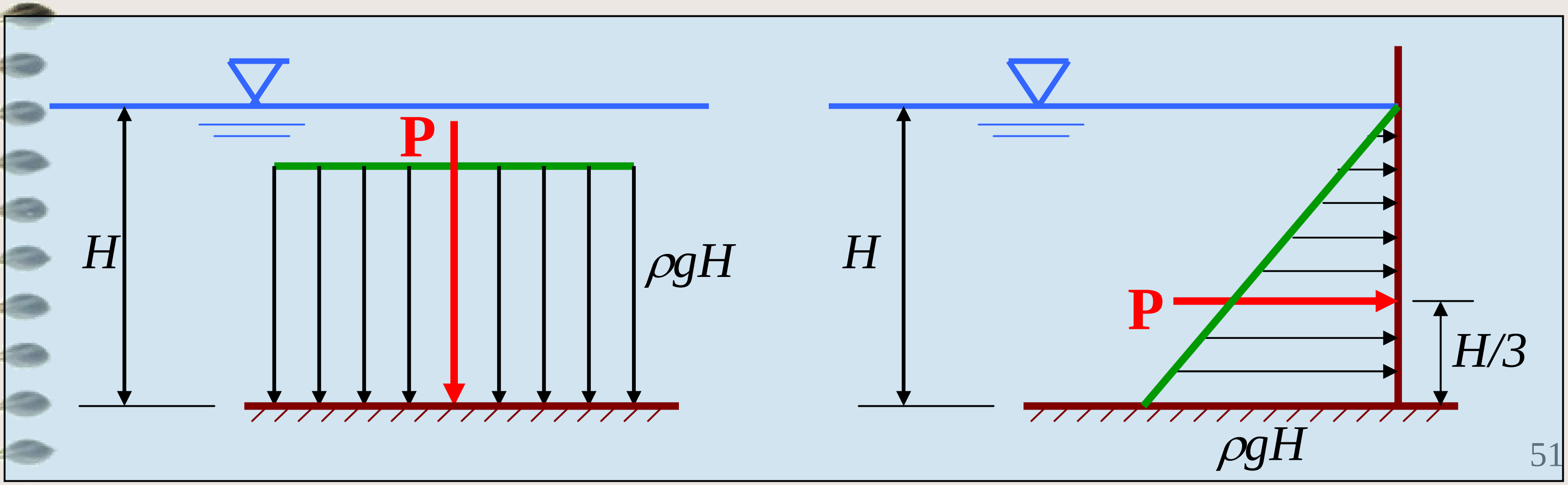
即可得到总压力，实际上这是一个数学问题。

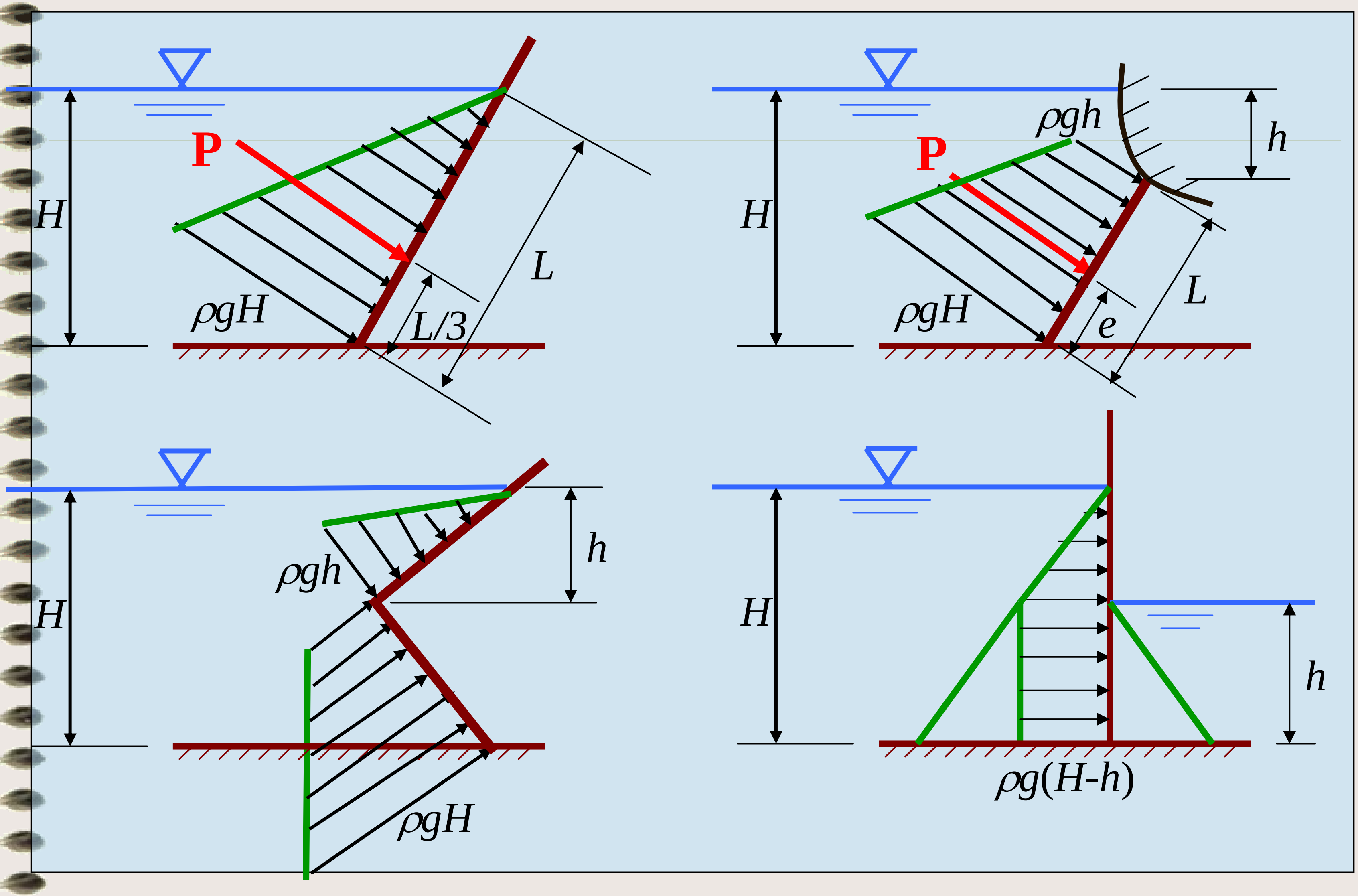
- 总压力求解包括其大小、方向 、作用点。

- 求解作用在平面上的静水总压力，实际是平行力系的合成，即 $\mathbf{P}=\iint_A p\,\mathrm{d}A$

作用力垂直于作用面。

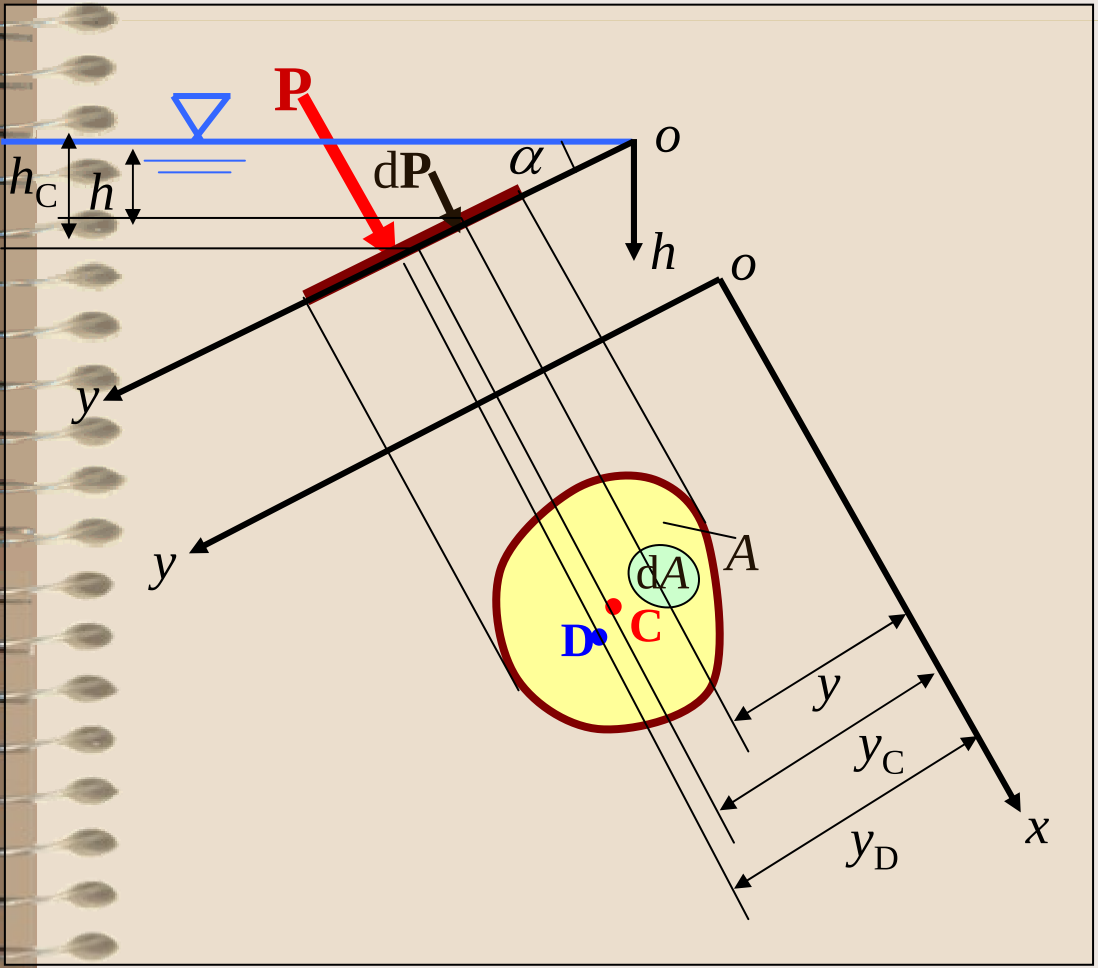
- 静水压强沿铅垂方向呈线性分布。





P
H
L
L/3
ρgH
P
H
ρgh
h
L
e
ρgH
H
h
ρgh
ρgH
H
h
ρg(H-h)

一．解析法求平面上的静水总压力



总压力的大小

$$P=\iint_A \rho g h \,\mathrm{d}A$$

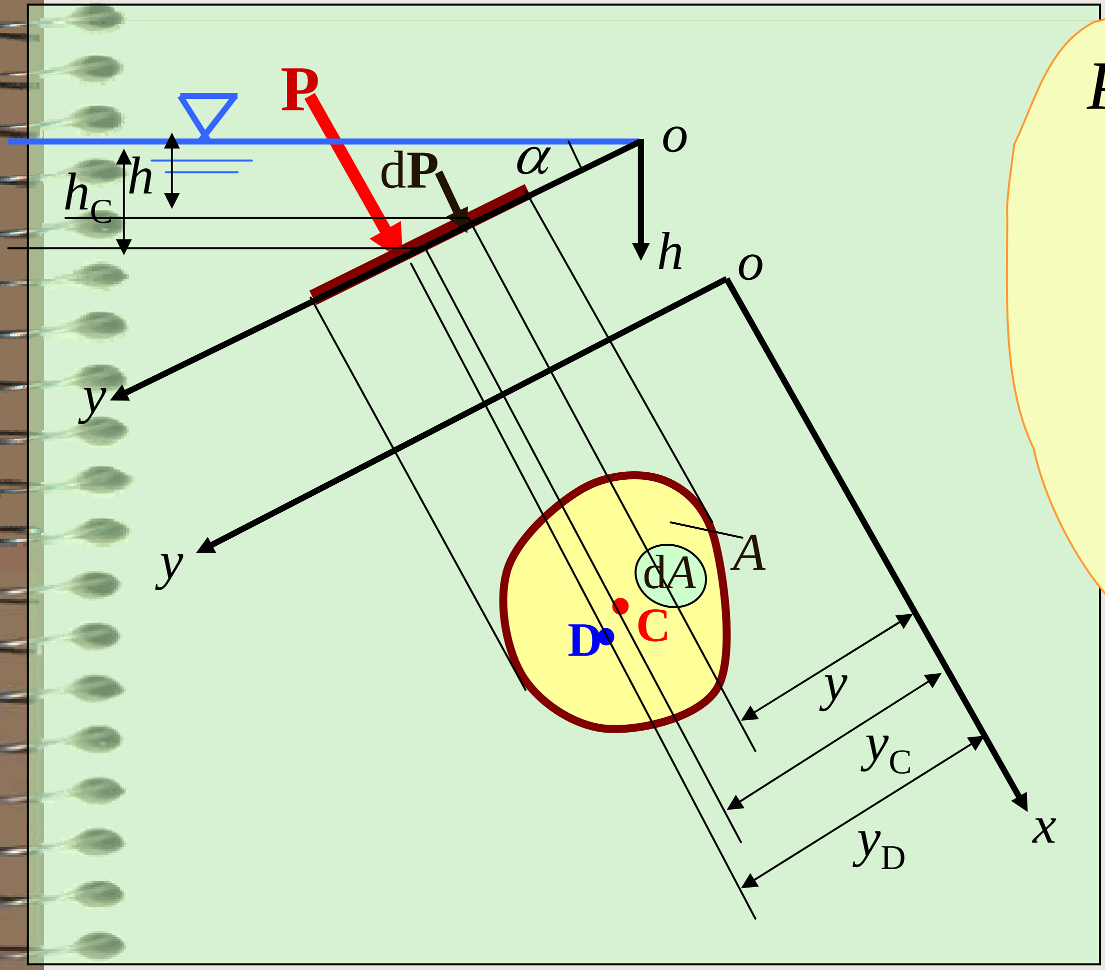
$$=\rho g \sin\alpha \cdot \iint_A y \,\mathrm{d}A$$

$$=\rho g \sin\alpha \cdot y_C \cdot A$$

$$=\rho g h_C \cdot A$$

$$=p_C \cdot A$$

➢ 总压力的作用点



$$P \cdot y_D = \iint_A \rho g h \cdot y \, \mathrm{d}A$$

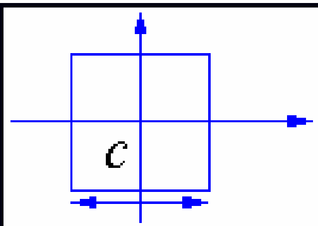
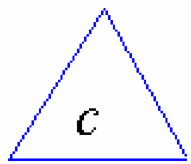
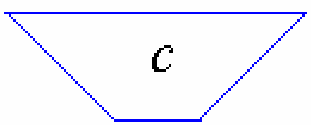
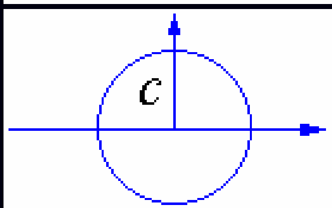
$$= \rho g \sin\alpha \cdot \iint_A y^2 \, \mathrm{d}A$$

$$= \rho g \sin\alpha \cdot I_0$$

$$= \rho g \sin\alpha \cdot (I_C + y_C^2 A)$$

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C A}$$

常见图形的A、y_c及I_c值

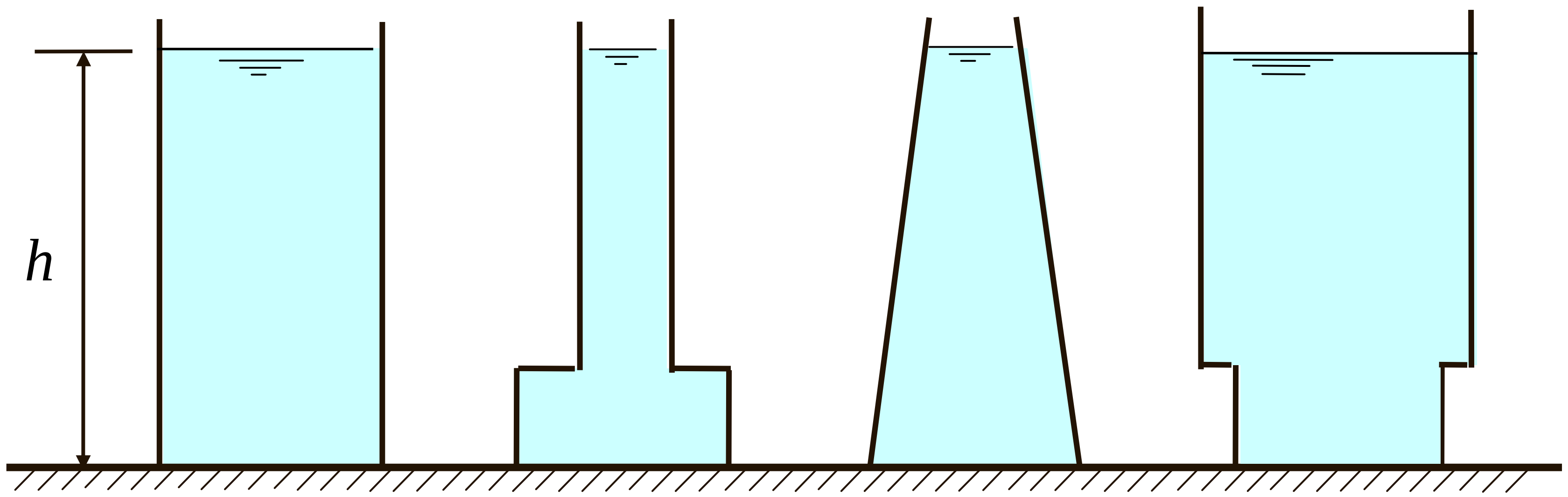
几何图形		面积	形心纵坐标	对形心横轴的惯性矩
矩形		bh	$\frac{1}{2}h$	$\frac{1}{12}bh^3$
三角形		$\frac{1}{2}bh$	$\frac{2}{3}h$	$\frac{1}{36}bh^3$
梯形		$\frac{1}{2}(a+b)h$	$\frac{h}{3}(\frac{a+2b}{a+b})$	$\frac{1}{36}h^3\left(\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}\right)$
圆形		πr^2	r	$\frac{1}{4}\pi r^4$

结论：

1. 平面上静水压强的平均值为作用面形心处的压强。总压力大小等于作用面形心 C 处压强 p_C 乘上作用面面积 A .

2. 平面上均匀分布力的合力作用点是其形心，而静压强分布是不均匀的，浸没在液面下越深处压强越大，所以总压力作用点位于作用面形心以下。

静力奇象



水深相同，通底面积相同，桶底所受水压力相同，整桶所受水的作用力(桶内水的重量）不同。

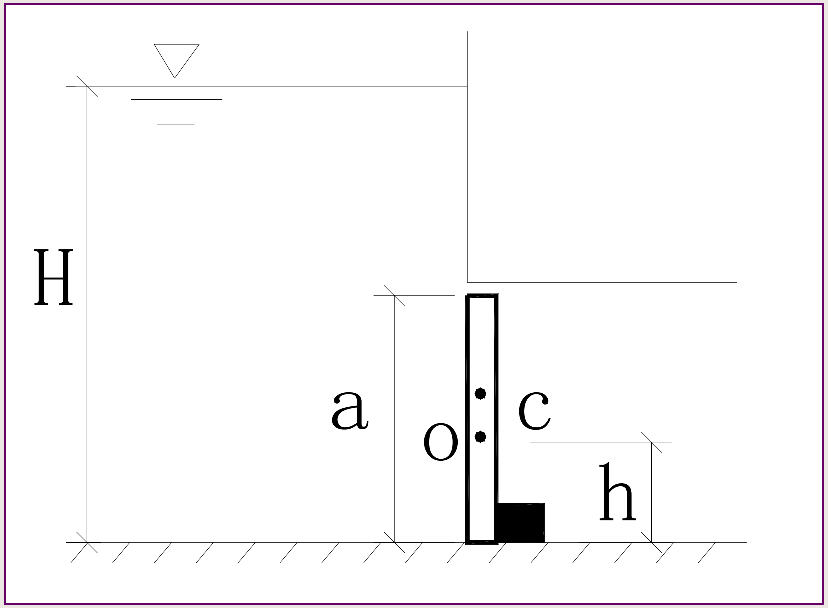
补充例题：水池侧面有一方形闸门，闸门每边长a=2m，转轴o距底边h=0.9m，求闸门刚好能自动开启的水池中的水深H.

解：

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C A}$$

$$= (H - \frac{a}{2}) + \frac{\frac{1}{12}a^4}{(H - \frac{a}{2})a^2}$$

$$= H - 1 + \frac{a^2}{12(H-1)}$$

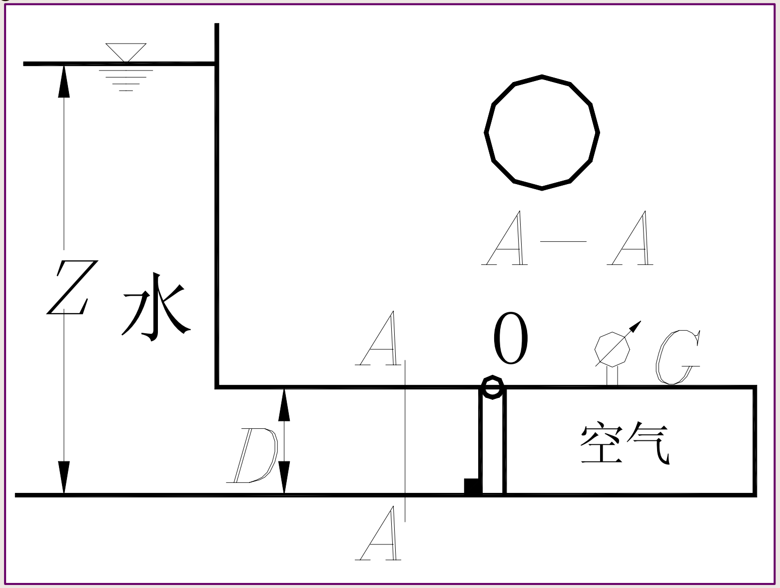


又 $y_D = H - h = H - 0.9$

$$\therefore H - 0.9 = H - 1 + \frac{4}{12(H-1)}$$

$$H = 4.33(m)$$

例2-7 求如图所示闸门逆时针打开时z的最小值。闸门为圆形，直径D=1m（压力计的读数为 $2.94N/cm^2$ ）。



解：$P_{水}=\gamma h_c A=9.8\times\left(z-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\pi}{4}D^2\times10^3$

$$=9.8\times\left(z-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\pi}{4}\times10^3$$

$$P_{气}=p_c A=2.94\times10^4\times\frac{\pi}{4}\times1^2$$

$$y_D=y_C+I_C/(y_C A)$$

$$=\left(z-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\Big/\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\pi}{4}\times1^2\right]$$

$$=\left(z-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^4\Big/\left(z-\frac{1}{2}\right)$$

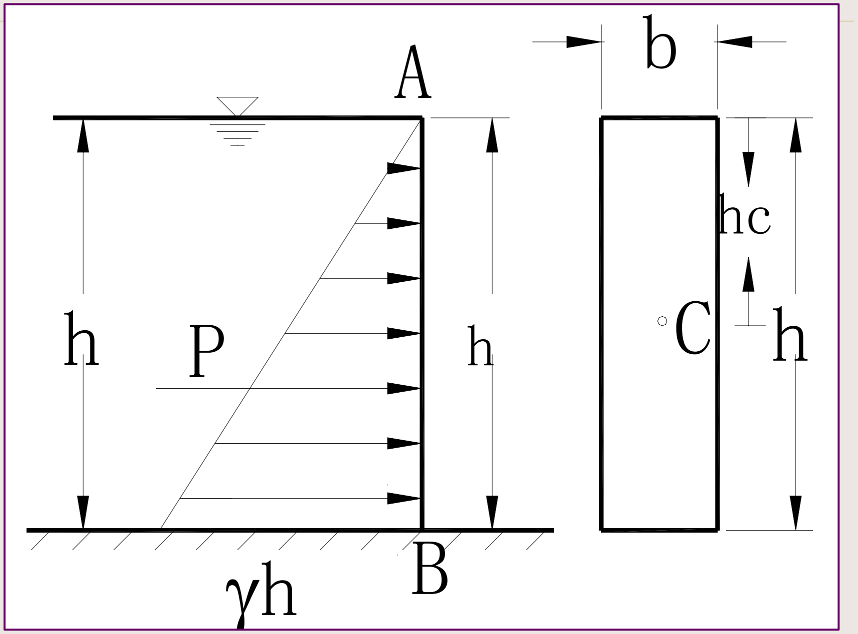
力对o取矩 $P_{右}\cdot\frac{1}{2}=P_{左}\cdot[y_D-(z-1)]$

得 $z=3.375m$

二. 图算法求矩形平面上的静水总压力

- 求解矩形平面的静水总压力，采用图算法更方便。

压强分布图→总压力



$$P = p_c A = \gamma h_c A = \gamma \frac{h}{2} bh$$

$$= \frac{1}{2}\gamma h^2 b = A_P b$$

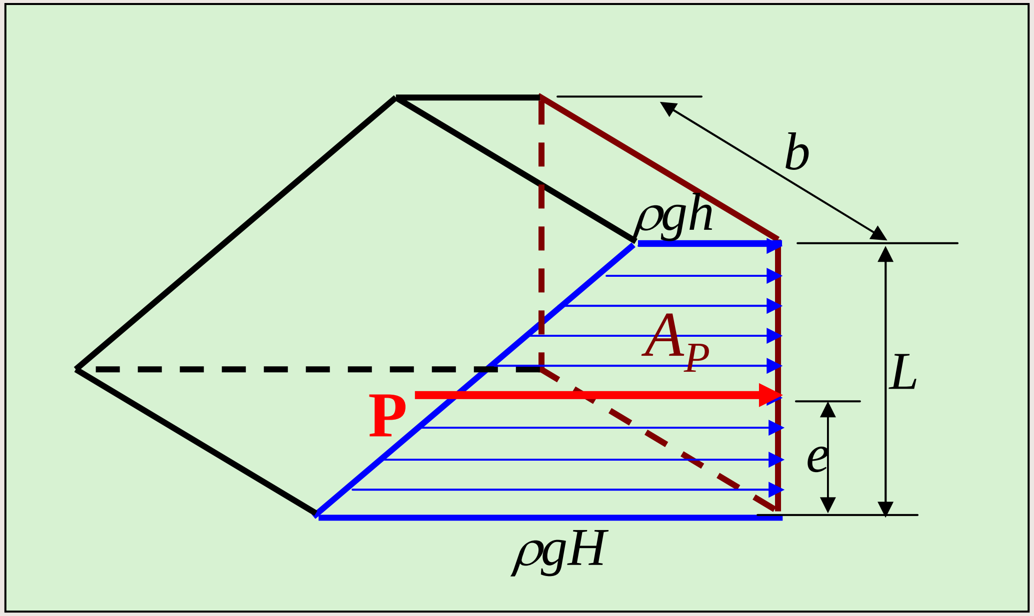
A_p: 压强分布图的面积

作用点的位置→由压强分布图的形心得到。

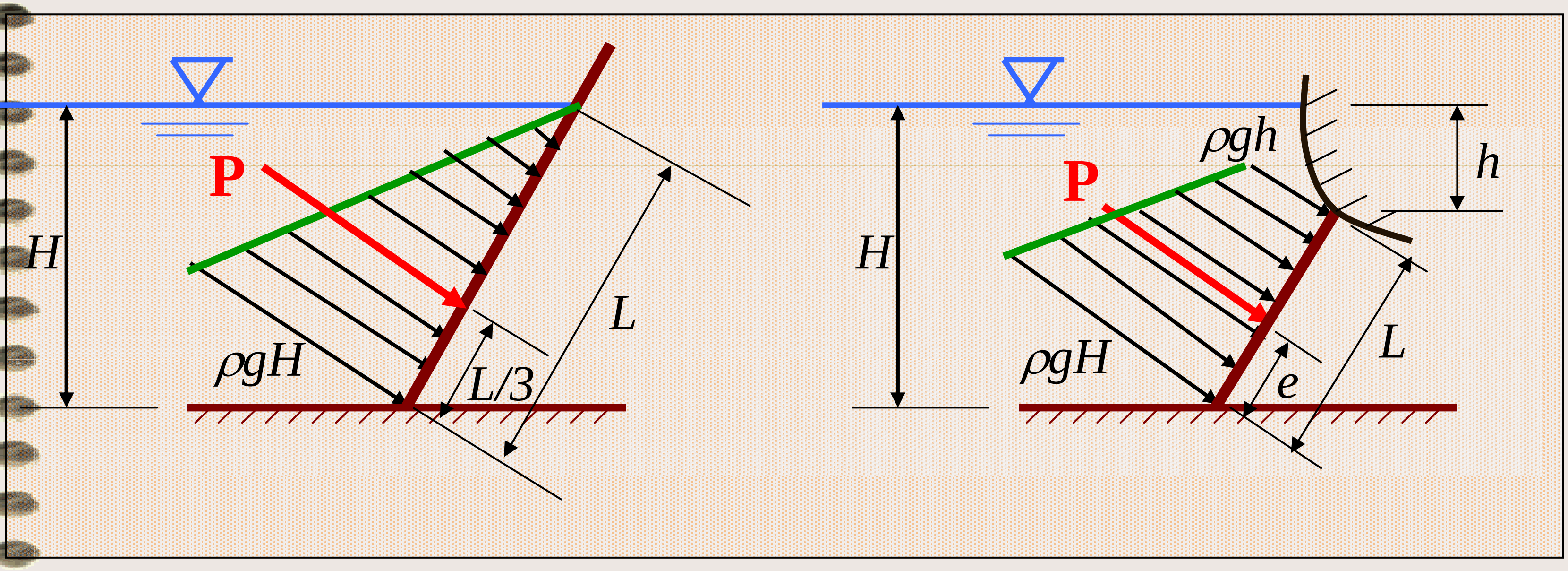
➢ 结论：

➢ 矩形平面单位宽度受到的静水总压力是压强分布图的面积A_P。

➢ 矩形平面受到的静水总压力通过压强分布图的形心。



◀ ▶ EXIT



> 三角形压强分布图的形心距底

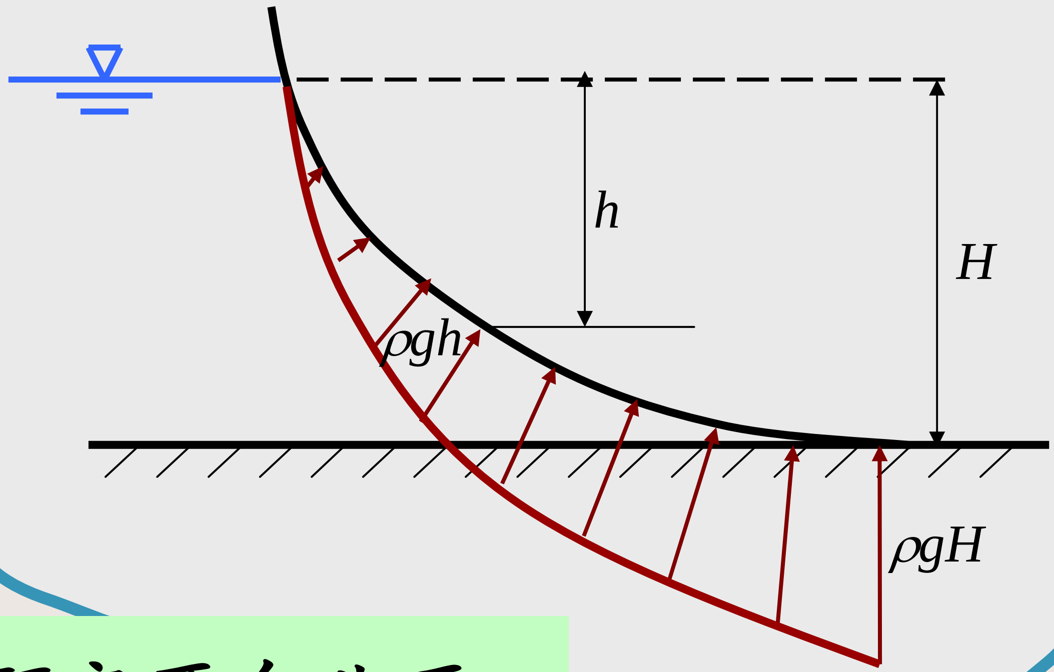
$$e=\frac{L}{3}$$

> 梯 形 压 强 分 布 图 的 形 心距底

$$e=\frac{L}{3}\cdot\frac{2h+H}{h+H}$$

§2–6 作用在曲面上的静水总压力

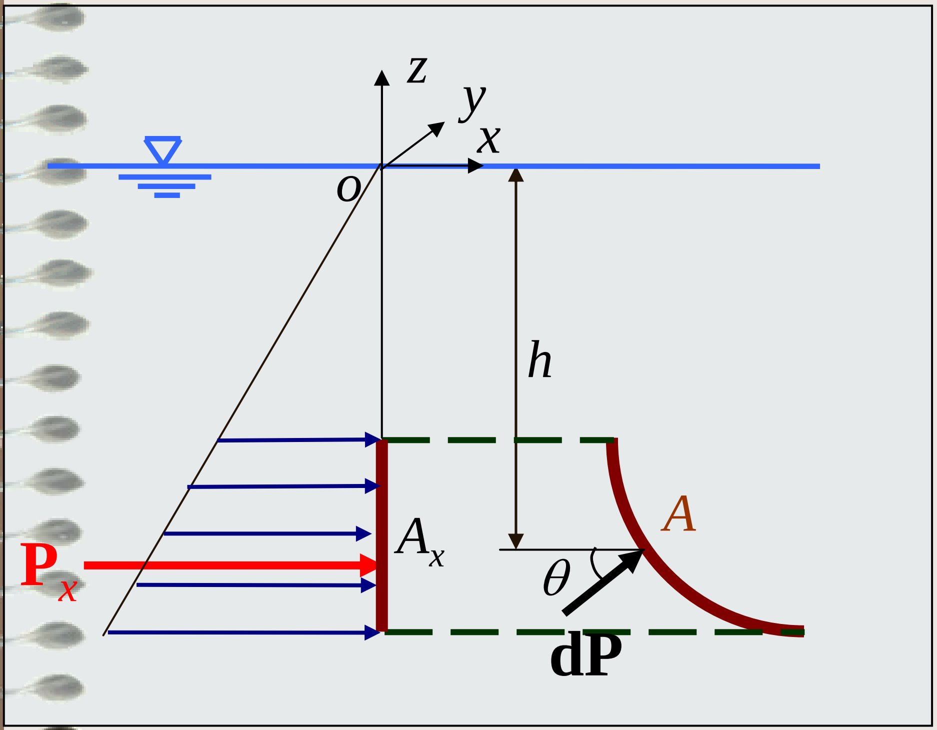
- 由于曲面上各点的法向不同，对曲面 ***A*** 求解总压力 $\iint_A p\mathrm{d}A$ 时，须先分解成各分量计算，然后再合成。



➢ 只研究两向曲面

• x 方向水平力的大小

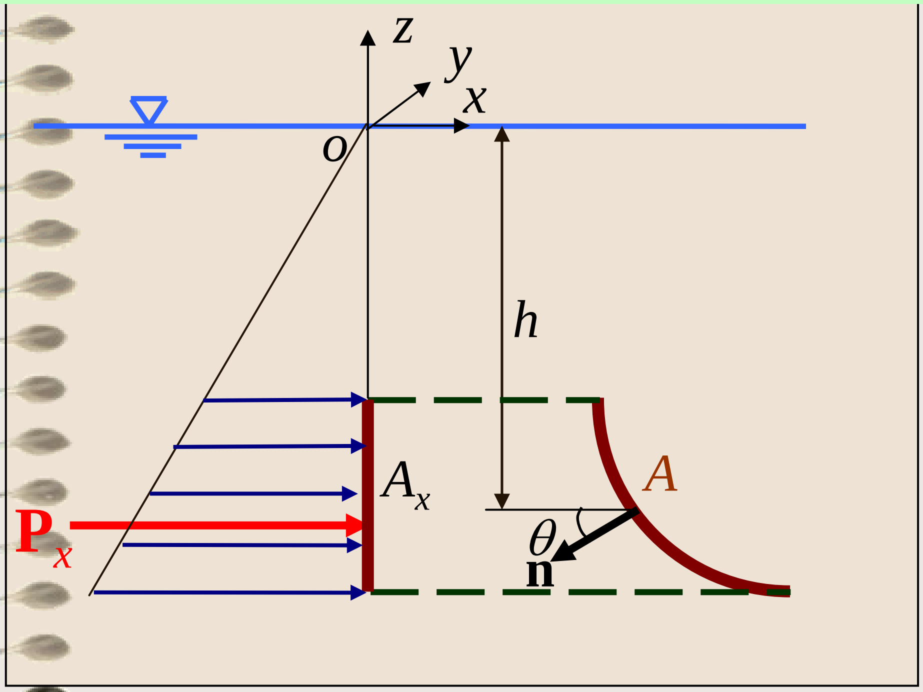
$$P_x=\iint_A dP\cos\theta=\iint_A \gamma h\,\mathrm{d}A\cos\theta=\gamma\iint_{A_x} h\cdot\mathrm{d}A_x=\gamma h_{xC}A_x$$



A_x 是曲面 A 沿 x 轴向 oyz 平面的投影，h_{xC} 是投影面 A_x 的形心在水面下的深度。

➢ 结论：

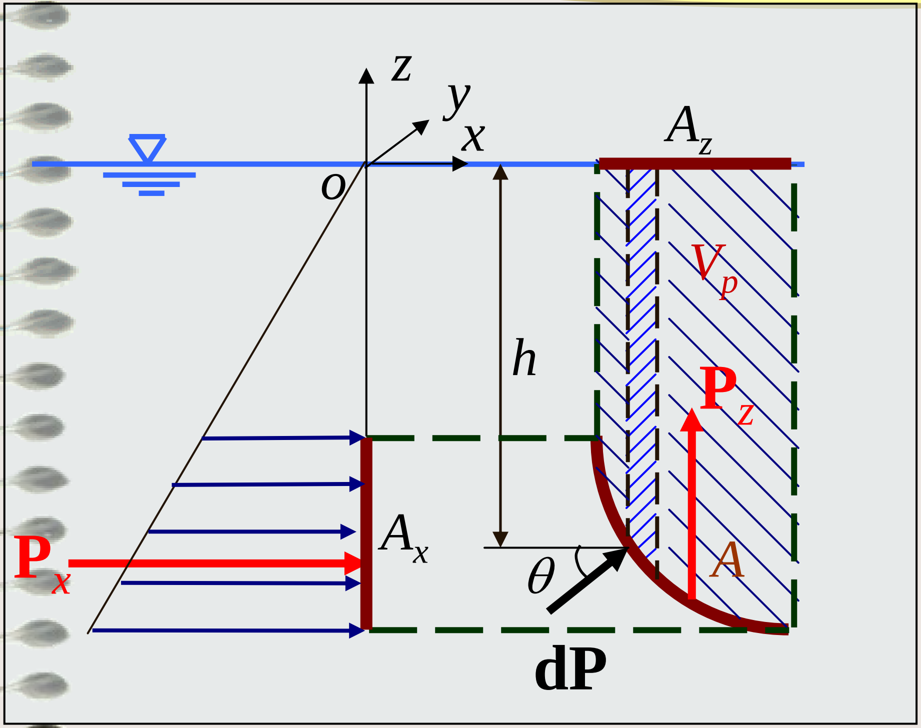
静止液体作用在曲面上的总压力在 x 方向分量的大小等于作用在曲面沿 x 轴方向的投影面(铅直投影面)上的总压力。



- y 方向水平力大小的算法与 x 方向相同。

• z 方向作用力的大小

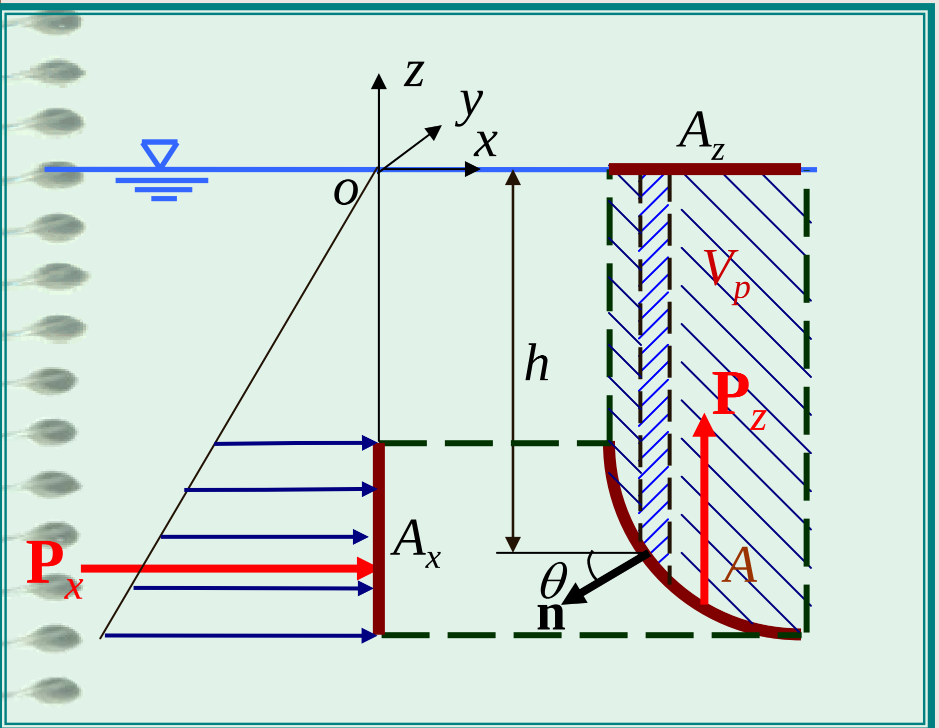
$$P_z=\iint_A dP\sin\theta=\iint_A \gamma h\mathrm{d}A\sin\theta=\gamma\iint_{A_z} h\cdot(\mathrm{d}A)_z=\gamma V_p$$



A_z 是曲面 **A** 沿 **z** 轴向 **oxy** 平面的投影，**V_p** 称为压力体，是曲面 **A** 与 **A_z** 之间的柱体体积。

➢ 结论：

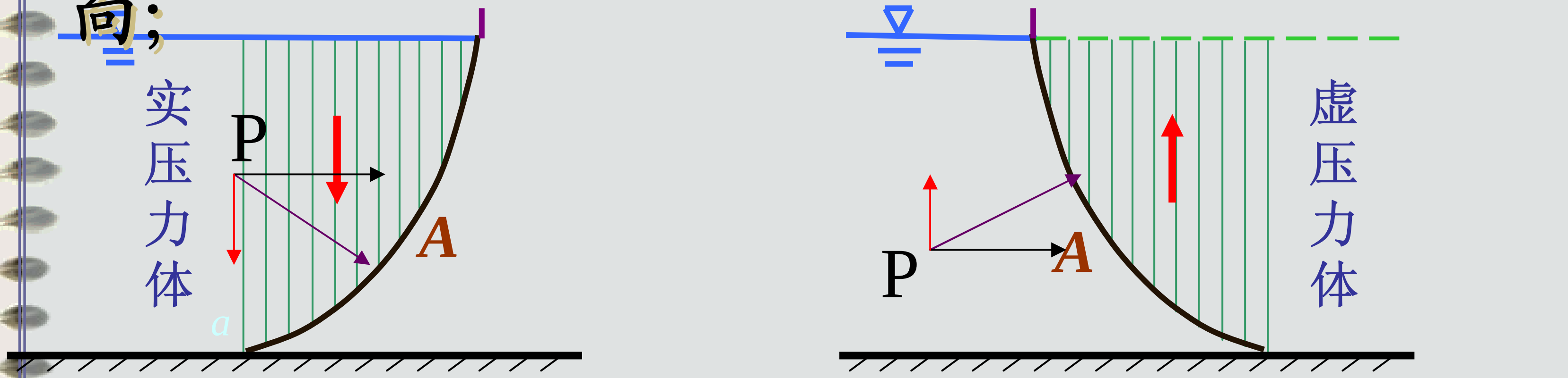
静止液体作用在曲面上的总压力的垂向分量的大小等于压力体中装满此种液体的重量。



总压力垂向分量的方向根据压力体判断。

➢ 压力体的组成：曲面A、曲面周界向自由水面所作的铅直面、自由水面或其延长面三部分。压力体中，不见得装满了液体。

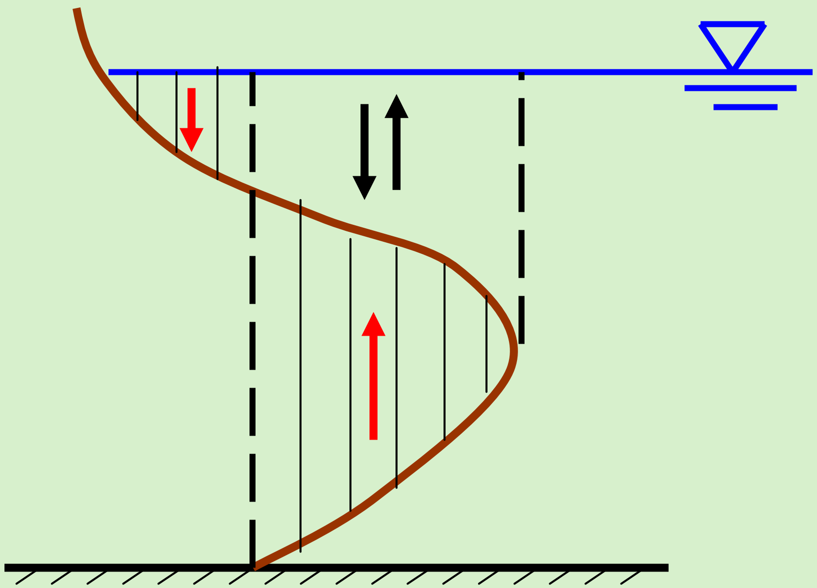
➢ 方向判断一：根据曲面受静水压力方向；



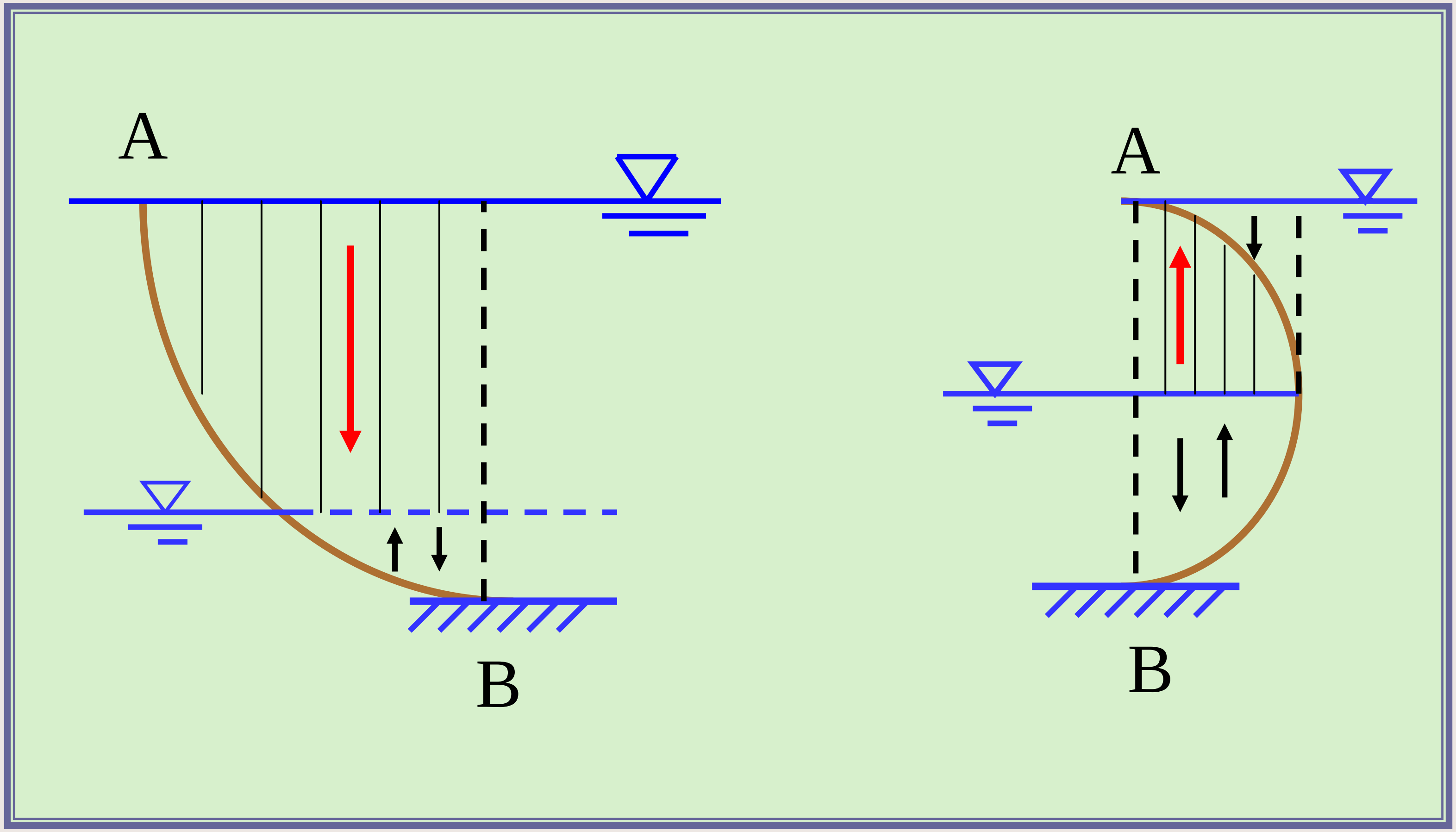
➢ 方向判断二：以曲面为界，压力体与水体同侧：实压力体，向下；异侧：虚压力体，向上。

➢ 复杂柱面的压力体

以切点为界，分别投影，再合成.



➢ 两侧均有水：



曲面上静水总压力的合成

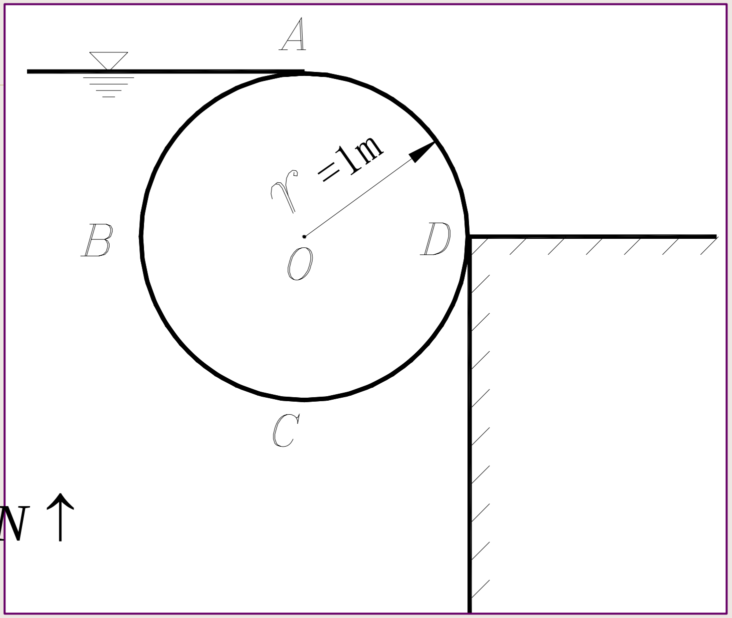
- 总压力各分量的大小、方向已知，这样总压力的大小和方向就确定了。

$$P=\sqrt{P_x^2+P_z^2} \qquad \alpha = arctg\frac{P_z}{P_x}$$

α —总压力作用线与水平线间的夹角。

- 特别地，当曲面是圆柱或球面的一部分时，总压力是汇交力系的合成，总压力必然通过圆心或球心。

例2-8　用一圆筒闸门挡水，圆筒与墙面之间光滑接触。圆筒长度为2m。试求：（1）圆筒的重量；（2）圆筒作用于墙上的力。



解法

(1)：$P_{zAB}=2\times\left[r^2-\frac{1}{4}\pi r^2\right]\gamma=$

$$2\times\left[1-\frac{1}{4}\pi\times1^2\right]\times9.8=4.21kN\downarrow$$

$$P_{zBCD}=2\times\left(\frac{1}{2}\pi r^2+r\times2r\right)\times9.8=69.99KN\uparrow$$

圆筒重量：$W=69.99-4.21=65.78kN$

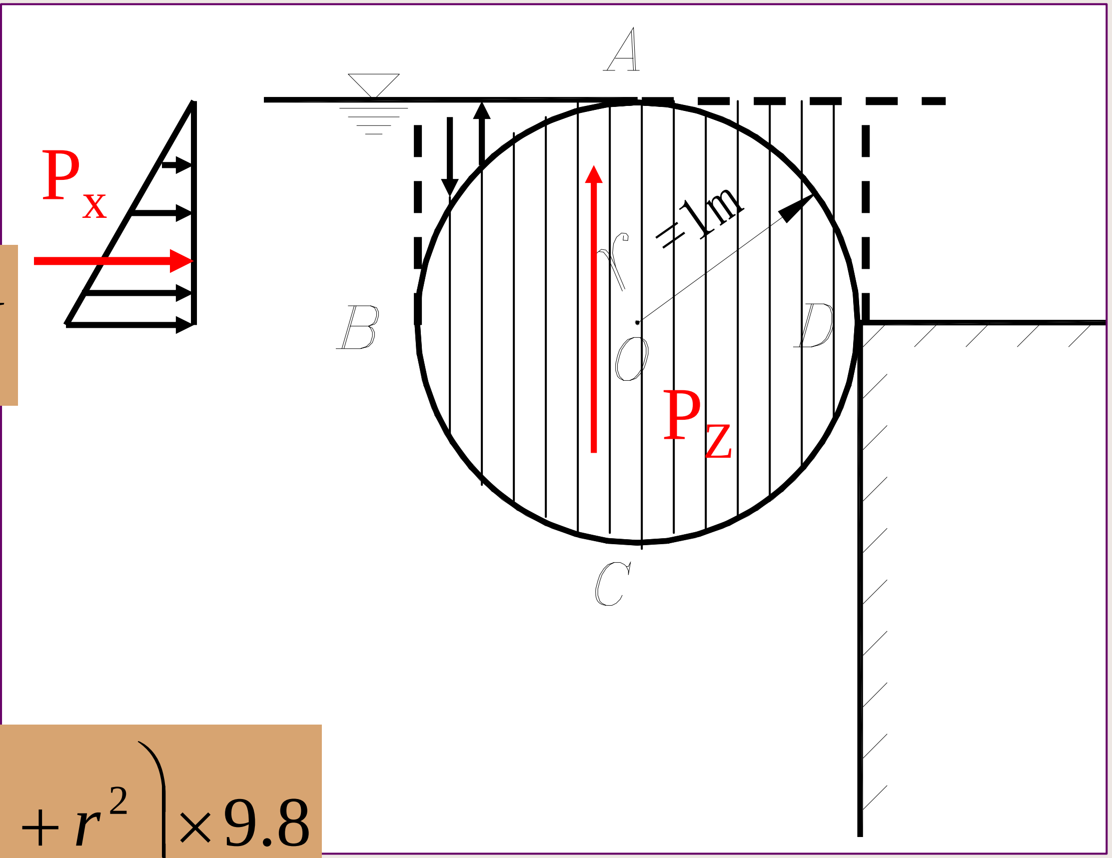
(2) 作用于CD与BC面上的水平分力互相抵消。

圆筒作用的水平力：$P_x=2\times\frac{\gamma}{2}r^2=2\times\frac{1}{2}\times9.8=9.8kN$

解法二：直接由压力体求合力.

水平力:

$$P_x = 2\times\frac{\gamma}{2}r^2 = 9.8kN$$



圆筒重:

$$P_z = 2\times\left(\frac{3}{4}\pi r^2 + r^2\right)\times 9.8$$

$$= 65.78KN \uparrow$$

§2–7 浮体的平衡与稳定

一. 浮体及物体的沉浮

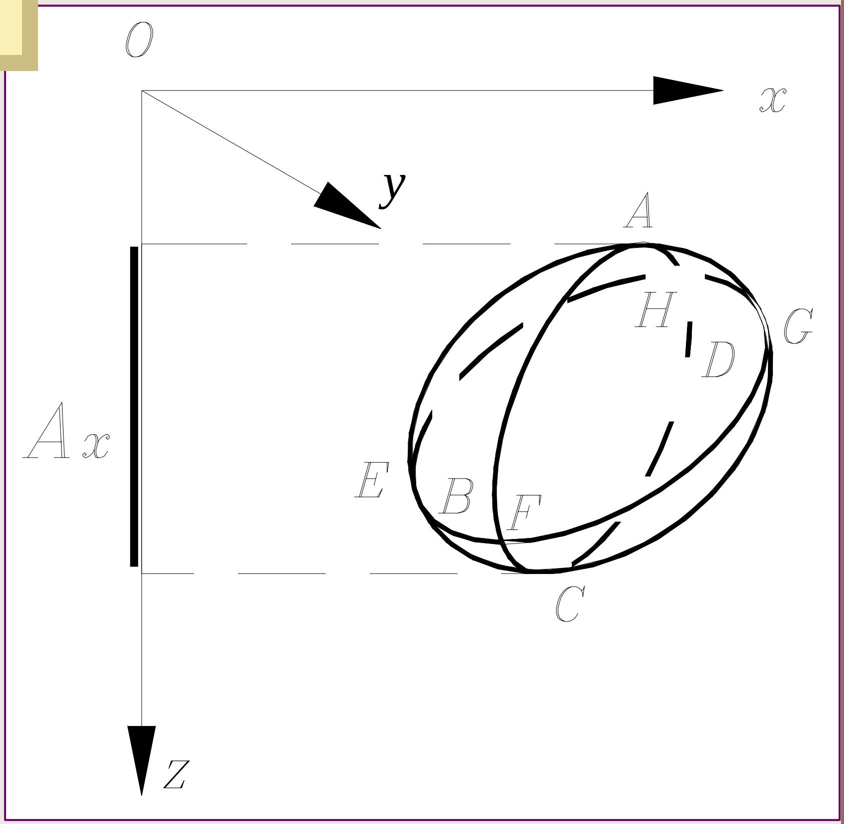
浮力：漂浮或浸没在静止液体中的物体受到液体向上的作用力，是液体压力的合力

$P_{x左}=P_{x右}(\because A_{x左}=A_{x右})$

同理 $P_{y前}=P_{y后}$

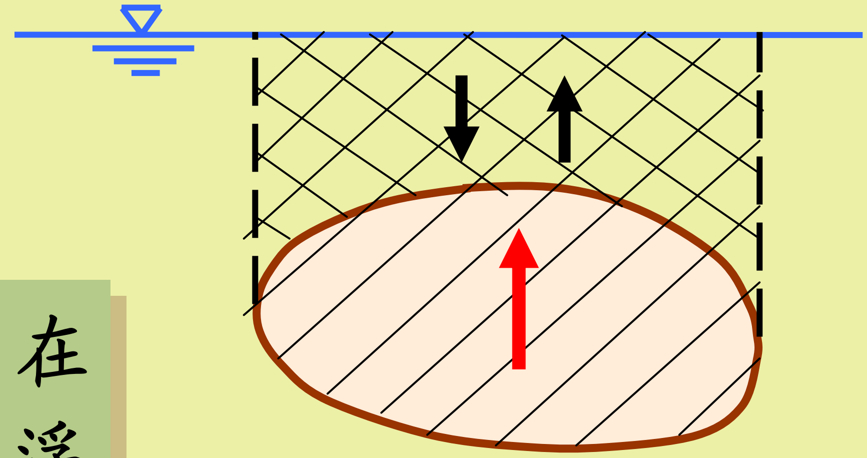
$P_z=P_{z下}-P_{z上}=\gamma V_p$

V_P为物体排开液体的体积



阿基米德定律

阿基米德定律



静止液体作用在物体上总压力 — 浮力的大小等于物体所排开液体的重量，方向铅垂向上。

浮力作用线通过物体被液体浸没部分体积的形心 — 浮心。

物体的浮力与表面总压力是一个现象、两个不同的名称

EXIT

浸没或漂浮在静止液体中的物体受到两个力的作用：浮力P_z、重力G.

- $G>P_z$:

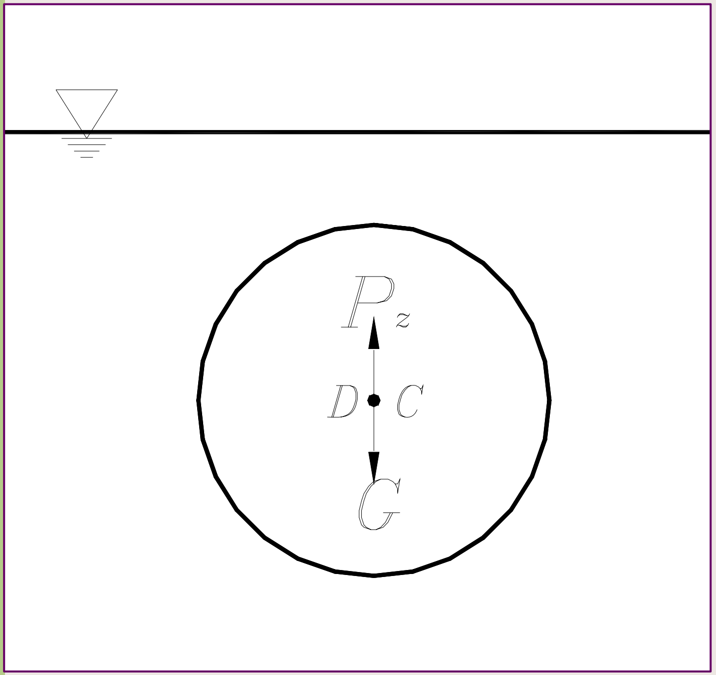
  下沉至底，称沉体;

- $G=P_z$:

  平衡在液体内任一处，称潜体;

- $G<P_z$:

  物体上浮，称浮体.



二. 潜体的平衡与稳定性

1.平衡条件:(状态)

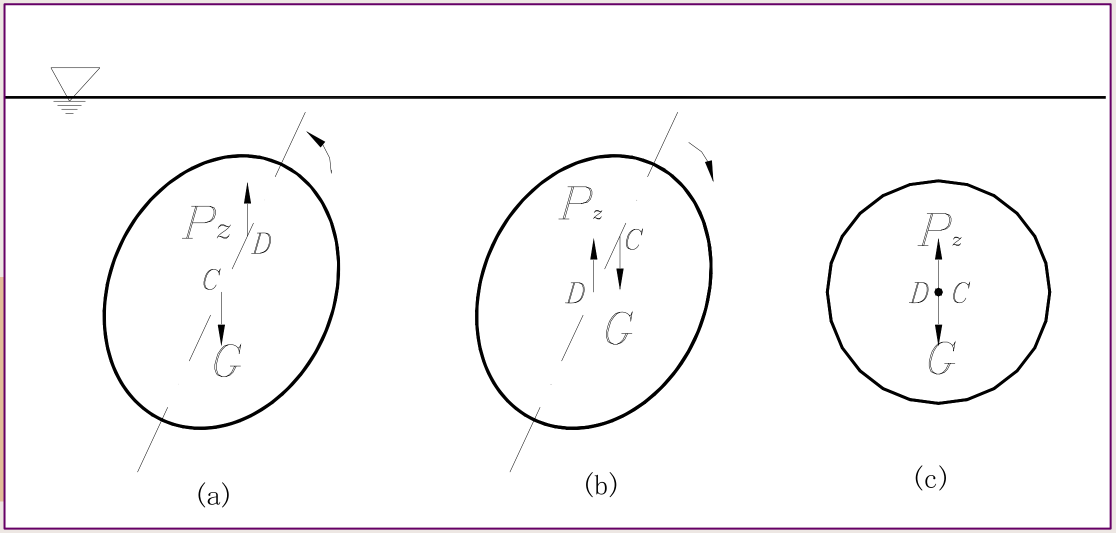
$$\begin{cases} P_z = G \\ \sum M_O = 0 \end{cases}$$

→ 要求重心、浮心在同一铅直线上.

2. 稳定性：平衡物体遇到外界干扰发生倾斜后，恢复到原平衡位置的能力。

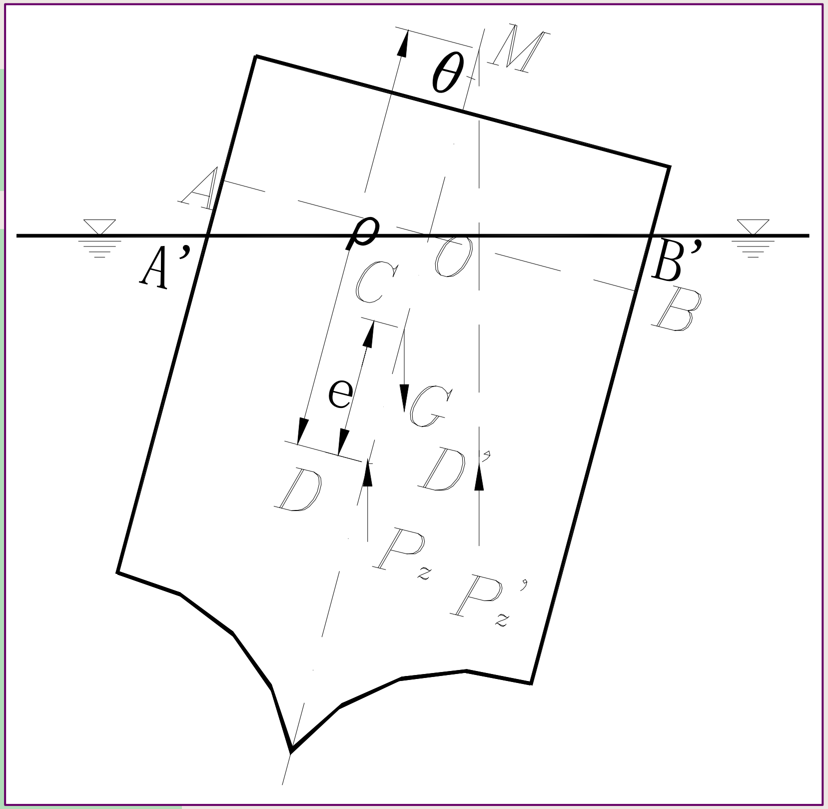
关键

重心C、浮心D的相对位置



三. 浮体的平衡与稳定性

- 浮体：只有部分体积浸没在液体中的物体.



1. 平衡条件：同潜体

2. 稳定性：

D在上、C在下-稳定；

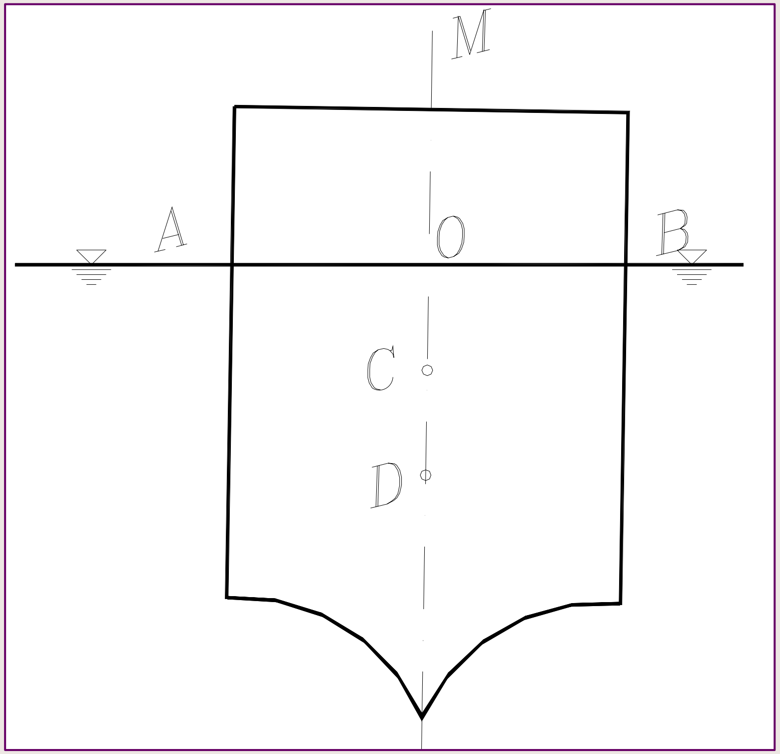
D、C重合-随遇平衡；

D在下、C在上-三种情况（稳定、随遇、不稳定平衡）

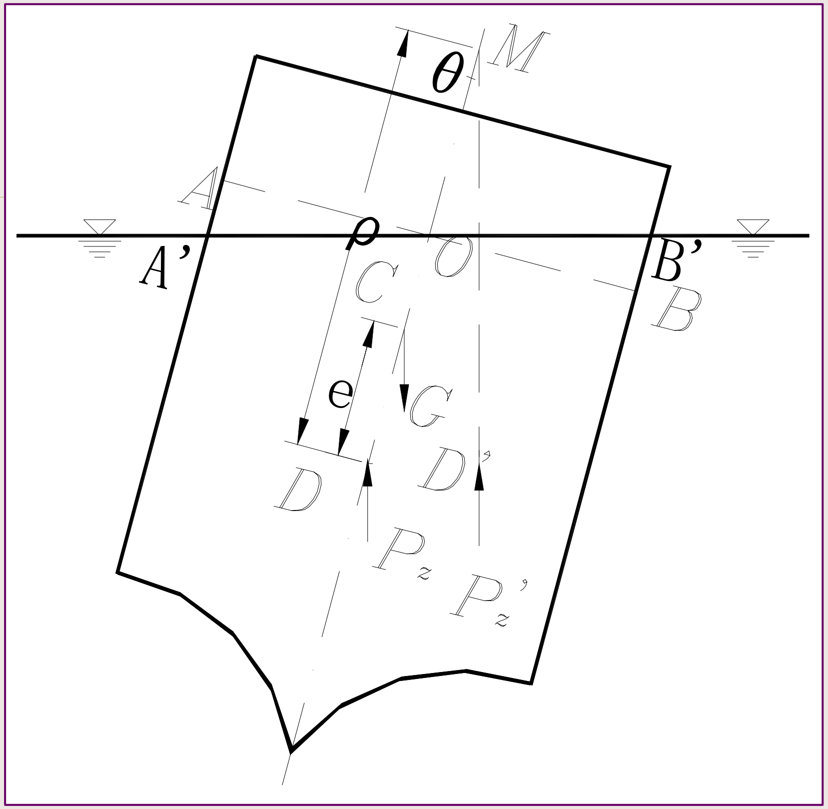
➢相关概念：

- 浮面：浮体正浮时，液面与浮体表面的交线所围成的平面。

- 浮轴：浮体处于平衡状态时，重心与浮心的连线。



•定倾中心：浮体倾斜时，浮轴与浮力作用线的交点M。

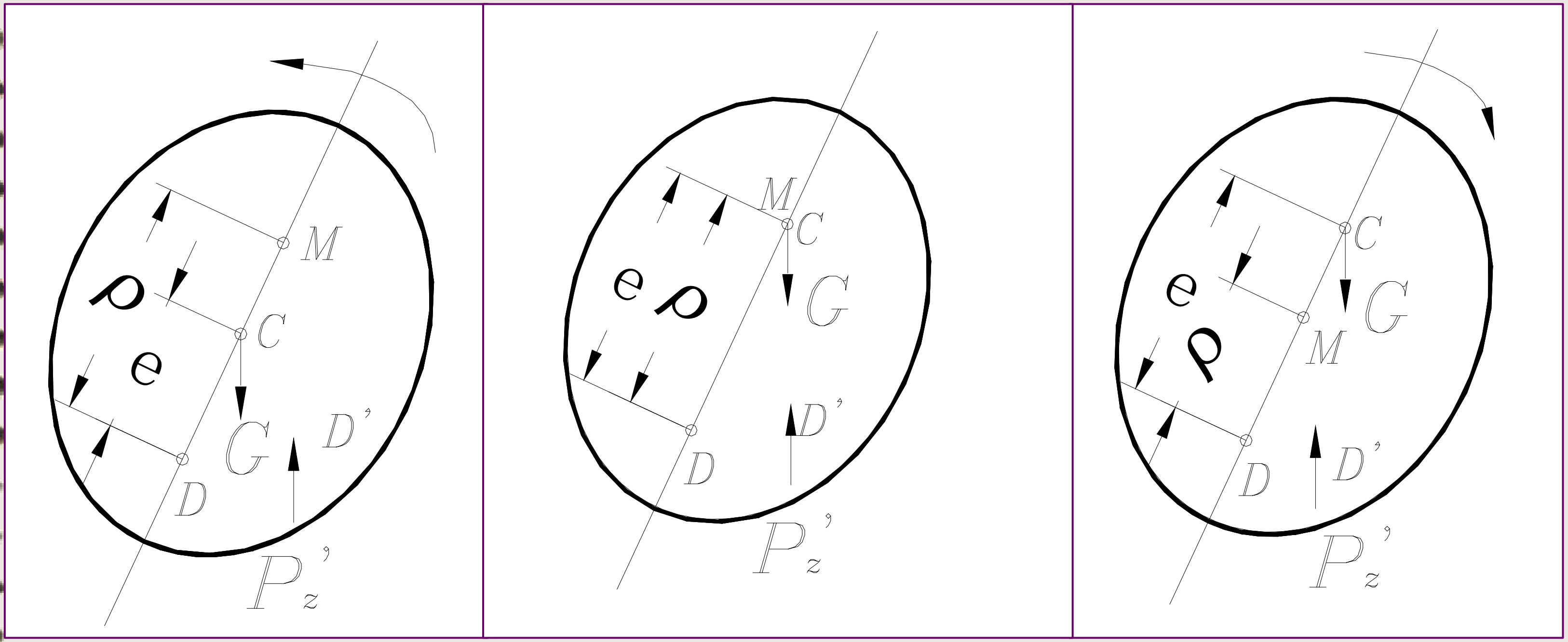


•偏心距：重心与浮心之间的距离e。

•定倾半径：定倾中心M与浮心D间的距离ρ。

•定倾高度：定倾中心与重心间的距离h_m，$h_m = \rho - e$。

➢浮体的稳定性取决于重心G与定倾中心M的相对位置。



ρ > e
稳定平衡

ρ = e
随遇平衡

ρ < e
不稳定平衡

3. 求定倾半径 ρ

$$\rho = \frac{l}{\sin\theta}$$

浮体倾斜后，C没变、浮力大小没变、D→D'

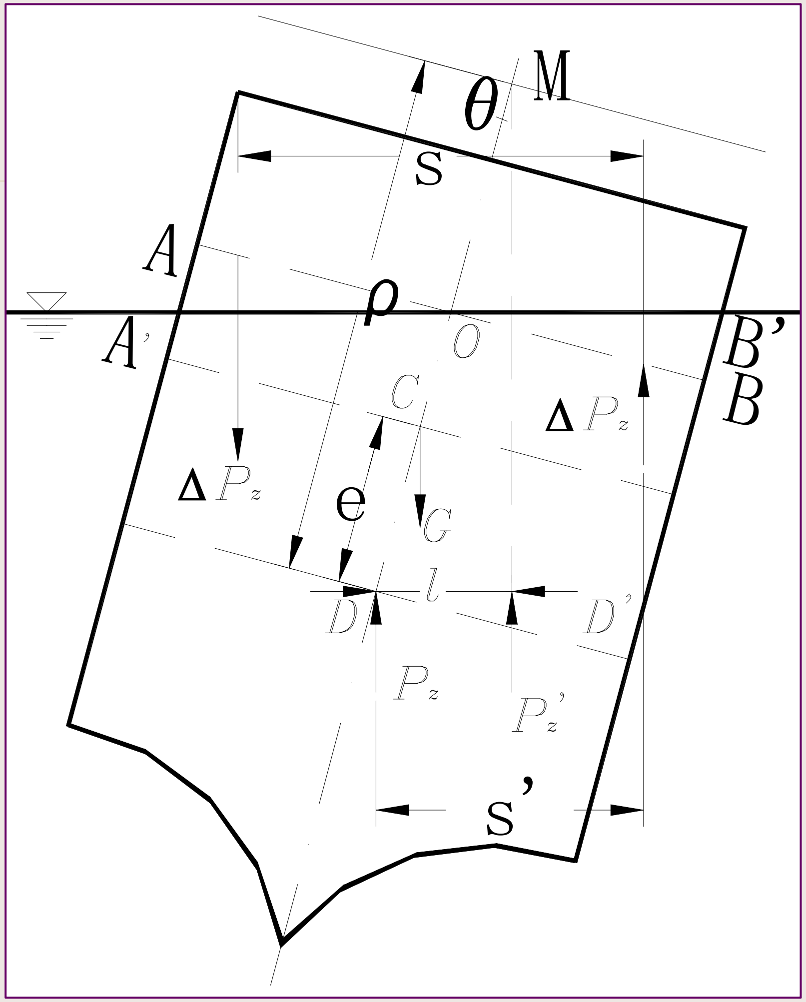
$$P_z' = P_z + \Delta P_z - \Delta P_z$$

对原浮心D取力矩，得

$$P_x' l = P_z \bullet 0 + \Delta P_z \bullet s' + \Delta P_z (s - s') = \Delta P_z s$$

$$l = \Delta P_z s / P_z'$$

$$P_Z' = \gamma V$$



关键 → $\Delta P_Z \cdot S = ?$

楔体OAA'上取微小体积dV，作用浮力为：

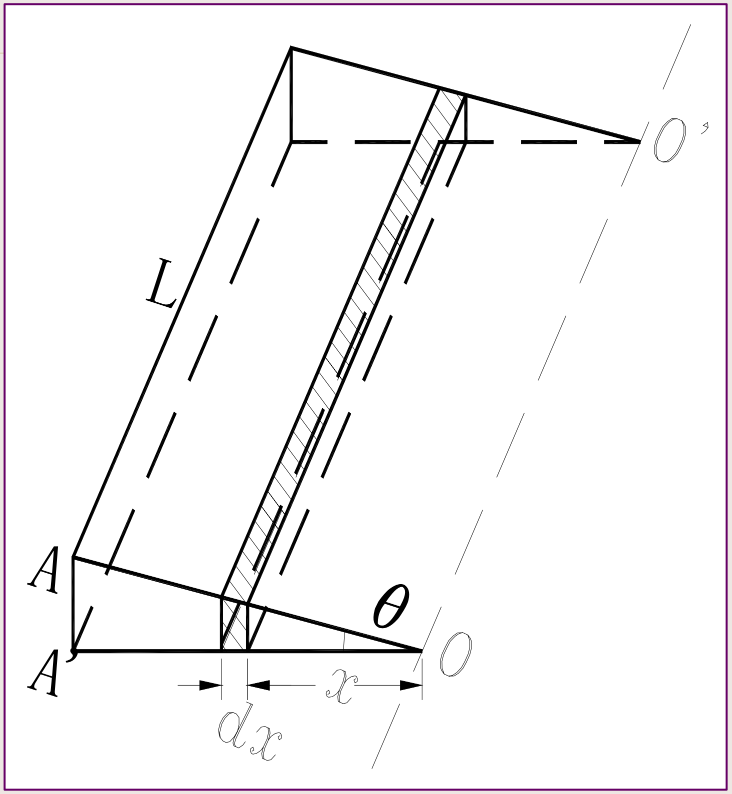
$$dP_z = \gamma dV = \gamma \cdot dx \cdot x\theta L$$

dP_Z对o–o'取矩得

$$dP_z \cdot x = \gamma \cdot dx \cdot x\theta L x = \gamma\theta x^2 dA$$

$$\Delta P_z \cdot s = 2\iint_0^{A/2} \gamma\theta x^2 dA$$

$$= 2\gamma\theta \iint_0^{A/2} x^2 dA = \gamma\theta I_y$$



式中I_y为全部浮面对中心纵轴o－o'的惯性矩。

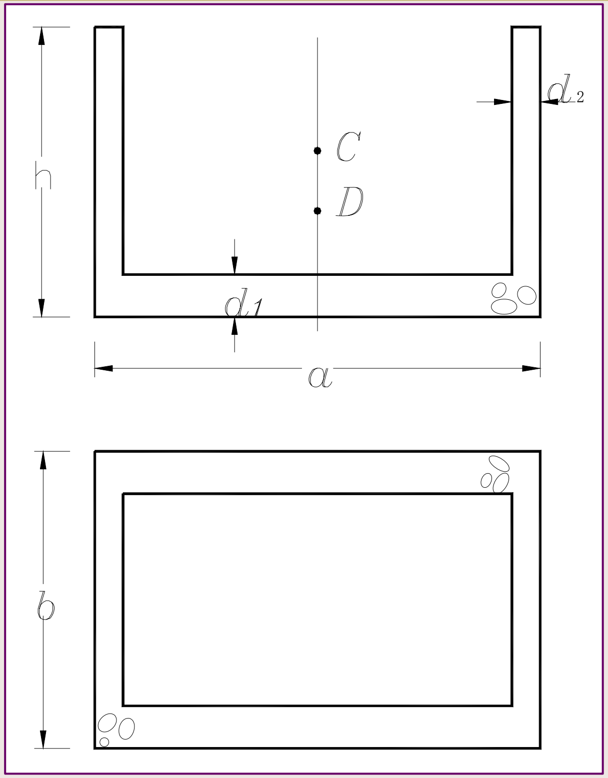
$$l = \frac{\gamma\theta I_y}{\gamma V} = \frac{\theta \cdot I_y}{V}$$

$$\rho = \frac{\theta I_y}{V\sin\theta} = \frac{I_y}{V}$$

例2-10 一长a=8m、宽b=6m、高h=5m的钢筋混凝土沉箱，d_1=0.5m，d_2=0.3m，$\gamma_{海水}$=10KN/m^3，$\gamma_{混凝土}$=24KN/m^3，试检查沉箱内无水时的稳定性。

➤ 关键 ⟹ 求三心。

$$h_c=\frac{V_{外}\times\dfrac{5}{2}-V_{内}\times\left(0.5+\dfrac{4.5}{2}\right)}{V_{混凝土}}=1.75m$$



设沉箱的吃水深度为y_D，由于浮体是平衡的,浮力=重力

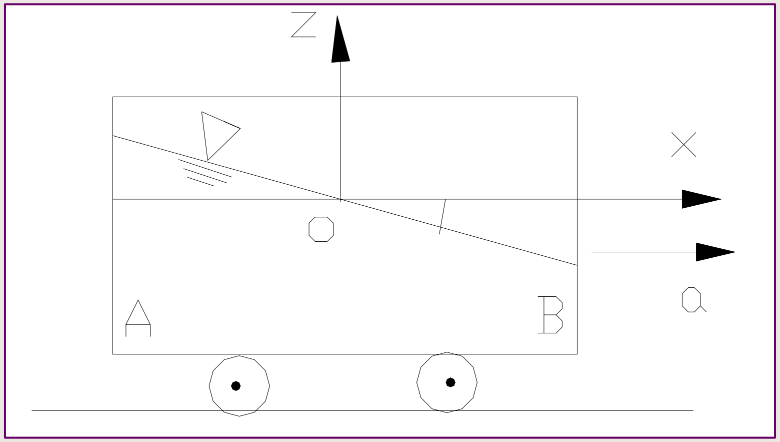
$$aby_D\gamma=\gamma' V_{混凝土}\Rightarrow y_D=3m$$

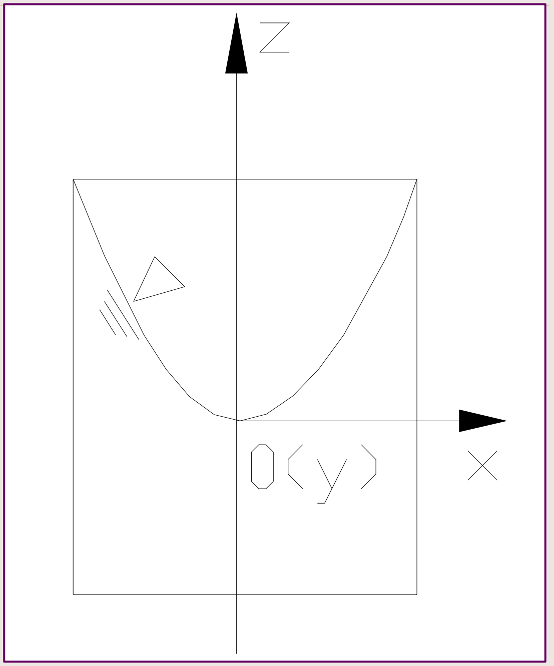
$$h_D=1.5m\Rightarrow e=h_c-h_D=0.25m$$

$$\rho=\frac{I_y}{V}=\frac{8\times6^3/12}{6\times8\times3}=1.0m,h_m=\rho-e=0.75m>0\Rightarrow$$ 沉箱稳定

§2－8重力与惯性力同时作用下液体的相对平衡

➢研究对象：匀加速直线运动、匀速圆周运动





➢解决问题：压强分布规律、自由表面形状

➢ 研究方法： $dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$

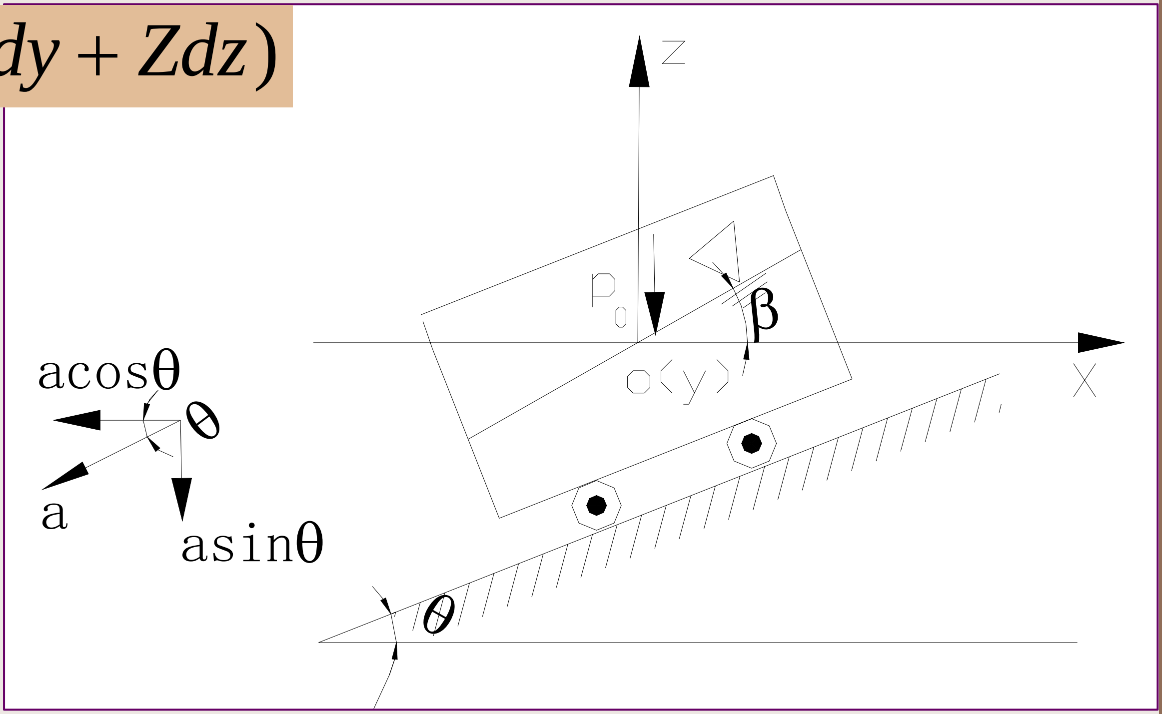
一. 匀加速直线运动容器中的静止液体

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

质量力:

重力、惯性力

$$\left.\begin{aligned} X &= a\cos\theta \\ Y &= 0 \\ Z &= a\sin\theta - g \end{aligned}\right\}$$



代入方程: $$dp = \rho\left[a\cos\theta dx + (a\sin\theta - g)dz\right]$$

积分，得:

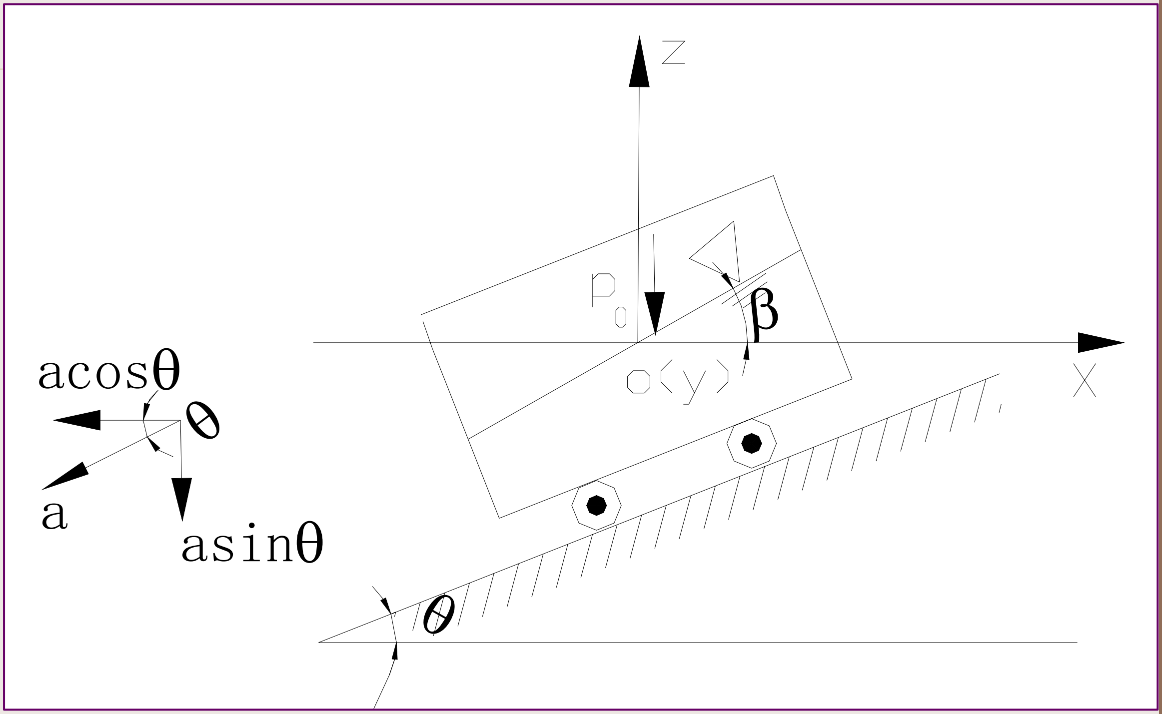
$$p = \rho\left[a\cos\theta \cdot x + (a\sin\theta - g)\cdot z\right] + C$$

式中C为常数，可利用下述边界条件确定。

$$p=\rho\left[a\cos\theta\cdot x+(a\sin\theta-g)\cdot z\right]+C$$

边界条件：

$$p\big|_{\substack{x=0\\z=0}}=p_0$$



$\Longrightarrow$ $C=p_0$

式中p_0为容器内液面压强

$$p=p_0+\rho a\cos\theta\cdot x+\rho(a\sin\theta-g)\cdot z$$

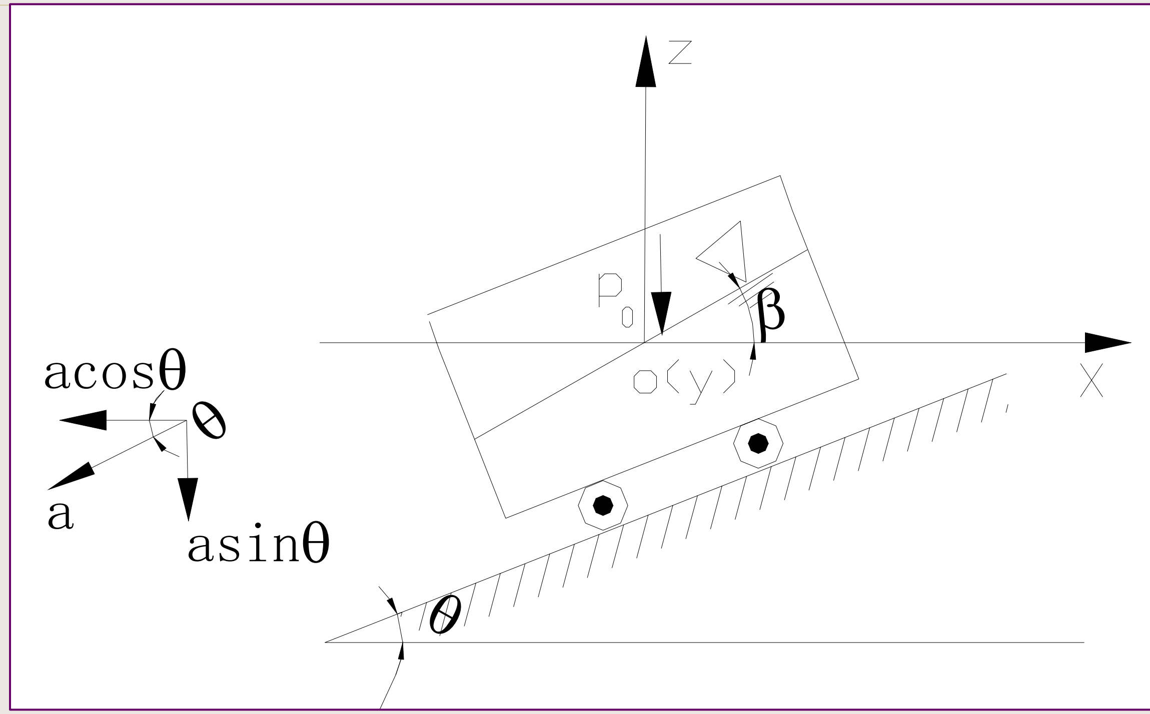
x为常数，p沿水深呈线性分布。(同一铅直线)

根据等压面方程：

$$Xdx+Ydy+Zdz=0$$

得等压面斜率方程：

$$tg\beta=\frac{dz}{dx}=-\frac{X}{Z}=-\frac{a\cos\theta}{a\sin\theta-g}$$



等压面是一族与水平面成β角的平行平面。

$$\begin{cases}\theta=0^{\circ},tg\beta=\dfrac{a}{g};\\ \theta=90^{\circ},tg\beta=0。\end{cases}$$

容器铅直方向作匀加速运动，等压面是水平面。

二. 绕中心轴作旋转运动的容器内的静止液体

质量力包括重力和惯性力：

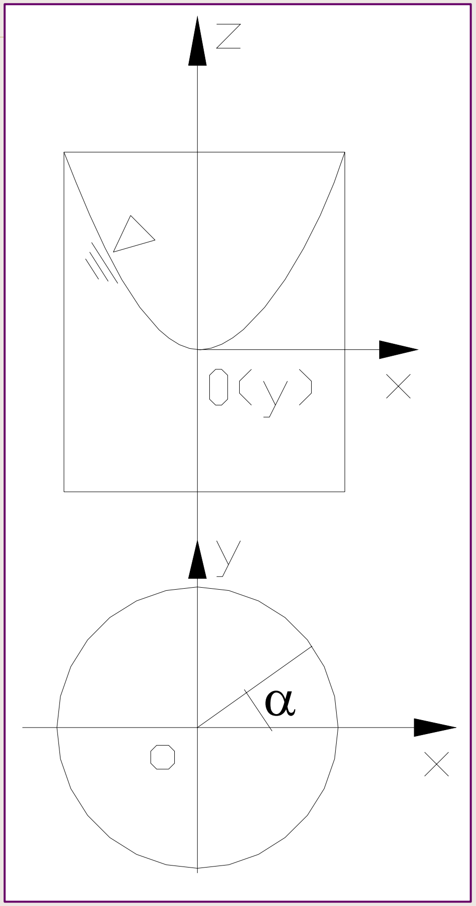
$$\left.\begin{aligned} X &= \omega^2 r\cos\alpha = \omega^2 x \\ Y &= \omega^2 r\sin\alpha = \omega^2 y \\ Z &= -g \end{aligned}\right\}$$

代入全微分方程：

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$= \rho(\omega^2 xdx + \omega^2 ydy - gdz)$$

$$\boxed{p = \rho g\left(\frac{\omega^2 x^2}{2g} + \frac{\omega^2 y^2}{2g} - z\right) + C = \rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right) + C}$$



式中 $r^2=x^2+y^2$，积分常数C可由边界条件确定。

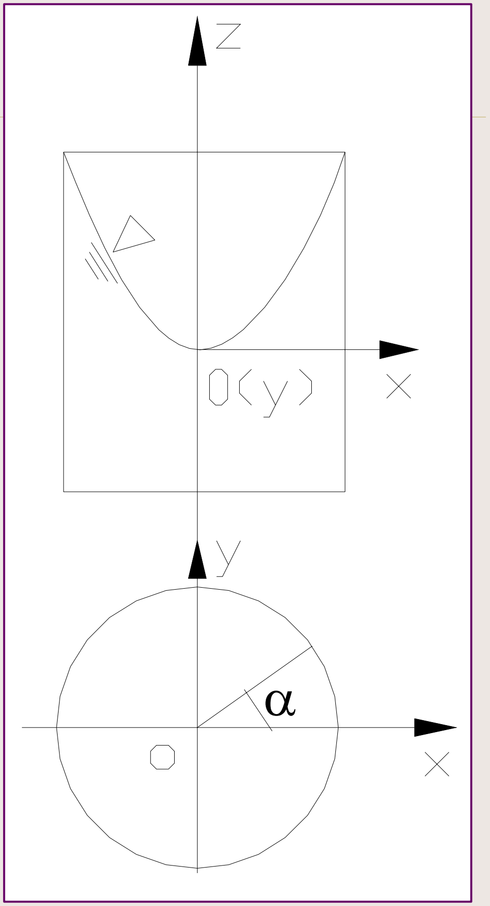
x=0, y=0, z=0处， $p=p_0$， 故 $C=p_0$

$$p = p_0 + \rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right)$$

r=const，同一圆柱面上的压强沿水深线性分布。

$$p = p_c \Rightarrow z = \frac{p_0 - p_c}{\rho g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

匀速圆周运动的等压面方程。



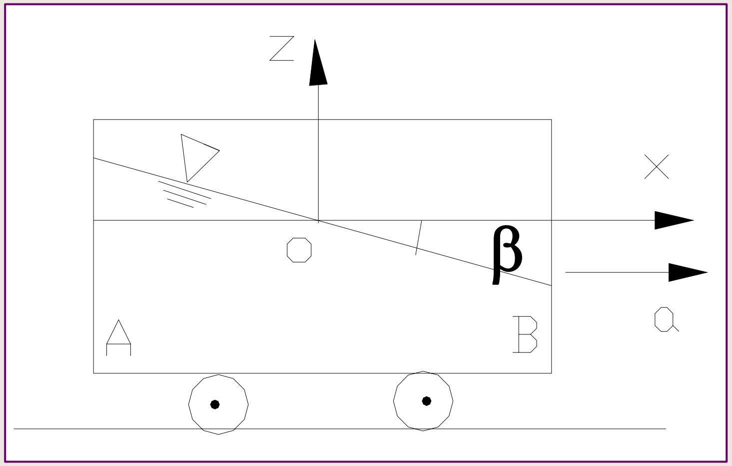
$$p_c = p_0 = p_a \Rightarrow z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

自由表面方程。

例2-11 一洒水车匀加速度行驶，车箱后缘A点的压强p_A=17.64KN/m^2 ，求此时车内水面的斜率与加速度a的大小。已知车长3.0m，宽1.5m，高2.0m，车未开动时车内水深为1.2m，车箱为开敞式。

解: $p_A = \rho g h_A = 9.8 \times h_A$ ⟹

$h_A = p_A/(\rho g) = 17.64/9.8 = 1.8m$



由几何关系:

$$th\beta = -\frac{1.8-1.2}{3/2} = -\frac{0.6}{1.5} = -0.4$$

又 $\left.\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz = 0 \\ X=-a, Y=0, Z=-g \end{aligned}\right\}$ ⟹ $th\beta = \frac{dz}{dx} = -\frac{a}{g}$

⟹ $a = 0.4g = 3.92m/s^2$

例2-12　圆柱形容器r_0=0.15m，当ω=21rad/s时，液面中心恰好触底，试求：（1）若使容器中水旋转时不会溢出，容器高度需要多少？（2）容器停止旋转后，容器中的水深为多少？

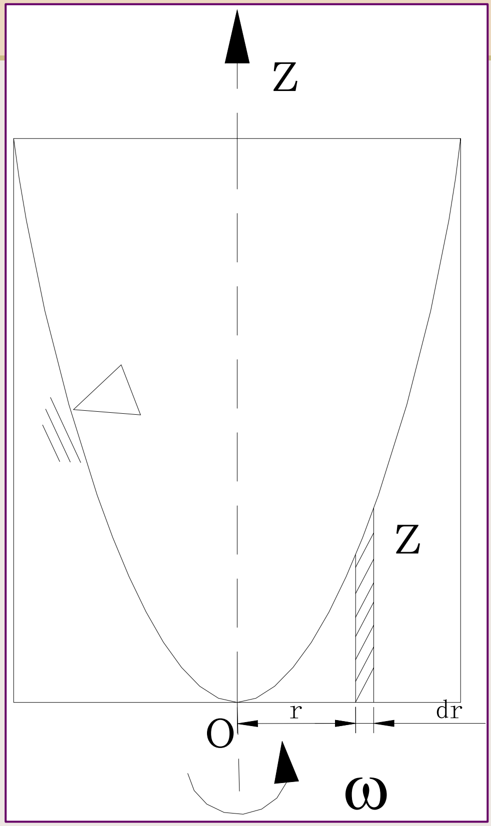
解：(1)自由表面方程 $z=\dfrac{\omega^2 r^2}{2g}$

$$z_{\min}=\frac{\omega^2 r^2{}_{\max}}{2g}=\frac{21^2\times 0.15^2}{19.6}=0.5m$$

(2)求容器内水深的问题，即是求旋转抛物体V的体积问题。

$$V=\int_0^r 2\pi r\cdot z dr=\int_0^r 2\pi r\frac{\omega^2 r^2}{2g}dr=\frac{\pi\omega^2}{g}\int_0^r r^3 dr=\frac{\pi\omega^2}{4g}r^4$$

$$h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{\pi\omega^2}{4g}r^4/(\pi r^2)=21^2\times 0.15^2/(4\times 9.8)=0.25m$$



第二章 小节

一. 静水压强的特性

1. 沿受压面的内法线;

2. 作用在同一点各方向的静水压强大小相等.

二. 液体平衡微分方程

$$\left.\begin{aligned} X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \\ Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0 \\ Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\}$$

综合式 → $dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$

积分式 → $p=\rho\Omega+C$

等压面方程 → $Xdx + Ydy + Zdz = 0$

等压面的性质
（1）等压面也是等势面;
（2）等压面与质量力正

三. 重力作用下静水压强的分布规律

1.水静力学基本方程

$$\begin{cases} z + \dfrac{p}{\gamma} = C \\ p = p_0 + \gamma h \\ p = \gamma h \end{cases}$$

2. 基本概念

位置水头、压强水头、测压管水头 、绝对压强、相对压强、真空压强、真空度

3. 静水压强的图示

依据 →

1. 水静力学基本方程 $p=\gamma h$;

2. 静水压强特性（大小、方向）

四. 压强的量测

➢ 关键：等压面原理

1. 测压管；2. U形压力计；3. 压差计（比压计）；

4. 压力表；5. 真空表。

五. 作用在平面上的静水总压力

➢ 解析法： $P = p_c A$ $y_D = y_C + \dfrac{I_C}{y_C A}$

➢ 图解法： $P = A_p \cdot b$ y_D：压强分布图形心

矩形断面

六. 作用在曲面上的静水总压力

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \gamma h_c A_x \\ P_z &= \gamma V_p \end{aligned}\right\}$$

$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$ $\alpha = arctg\dfrac{P_z}{P_x}$

➤ 关键：压力体

七. 浮体的平衡与稳定

1.潜体的平衡与稳定性 $\begin{cases} \text{平衡条件} \\ \text{稳定性} \end{cases}$

2.浮体的平衡与稳定

➢关键：求三心

（1）基本概念：定倾中心M、偏心距e、定倾半径ρ、定倾高度$h_m = \rho - e$

（2）稳定性：D在上、C在下–稳定；D、C重合–随遇平衡；D在下、C在上（三种情况）

$\rho > e$	$\rho = e$	$\rho < e$
稳定平衡	随遇平衡	不稳定平衡

$$\rho = \frac{I_y}{V}$$

I_y为全部浮面对中心纵轴0–0的惯性矩；V为浮体排开液体的体积.

八. 相对平衡

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

1. 匀加速直线运动容器中的静止液体

$$tg\beta = \frac{dz}{dx} = -\frac{X}{Z} = -\frac{a\cos\theta}{a\sin\theta - g}$$

注意：条件

2.匀速圆周运动容器中的静止液体

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

自由表面方程。