



第五章 材料加工力学基础

材料加工原理

2005年春季学期



本章内容

5.1 概述

5.2 应力状态分析

5.3 应变状态分析

5.4 屈服准则

5.5 塑性变形时的应力应变关系

5.6 主应力法及其应用

5.1 概述

材料加工的目的：将材料加工成为具有一定形状和性能的零件或构件。

实现方式：

- (1) 冷加工：只改变形状，基本上不影响材料组织与性能。
- (2) 热加工：既改变形状，又对组织和性能有影响

材料加工原理围绕影响性能的各个因素（成分、组织、应力状态、缺陷或缺欠）介绍其物理冶金、化学冶金与力学现象，其基本的传热、传质和流动以及力学行为的基本规律。



具体内容

- (1) 液态金属的性质及其改性
- (2) 传热、传质与流动
- (3) 金属的凝固（各种条件下的凝固规律）
- (4) 力学行为与基础
- (5) 化学冶金过程
- (6) 冶金质量

要求掌握

- ◆ 材料加工过程中材料的成分、组织和形状会发生什么变化
- ◆ 这些变化对性能有何影响
- ◆ 哪些因素影响这些变化
- ◆ 如何控制这些过程、控制材料的成形和性能
- ◆ 举例：高强度级别、大壁厚钢管焊接时出现气孔、夹渣、裂纹和低温冲击韧性分散等问题；铝合金焊接时裂纹、气孔、成形等问题；超低碳不锈钢焊条碳、硫、磷以及合金元素的控制
- ◆ 思维能力的训练 - - 实际问题的分析方法 - 一定假设条件下的理论



5.1.1 材料加工中的力学问题

不可避免，必要条件和派生，影响成形结果和缺陷的产生以及结构的性能；

基本过程和重要的研究分支；

铸造、焊接以及表面改性和热处理都有力学过程分析，而塑性加工（或压力加工）中涉及的力学问题更为复杂



主要包括

塑性变形的力学规律：涉及理论力学、材料力学、弹塑性力学以及塑性变形力学规律。

变形力的计算：需要施加多大的力才能实现所需的变形。

变形极限的力学分析：如何保证不出缺陷和保证性能，与构件的变形能力有关，而变形能力又与材料和应力状态有关，变形能力不足，可能出现开裂等问题。



为什么
会出现
这种情况？！



5.1.2 热加工的力学特点

材料非线性：温度变化范围大，材料性能变化显著；

变形非线性：大变形时，力与变形非线性；

存在多种变形形式：弹性、塑性、粘性等。



5.1.3 本章内容

5.1 概述

5.2 应力状态分析

5.3 应变状态分析

5.4 屈服准则

5.5 塑性变形时的应力应变关系

5.6 主应力法及其应用

5.2 应力状态分析

5.2.1 基本概念

(1) **外力**：面力和体力

面力：作用在物体表面上的外力

体力：作用在物体每个质量上的力（重力、磁力、惯性力等）

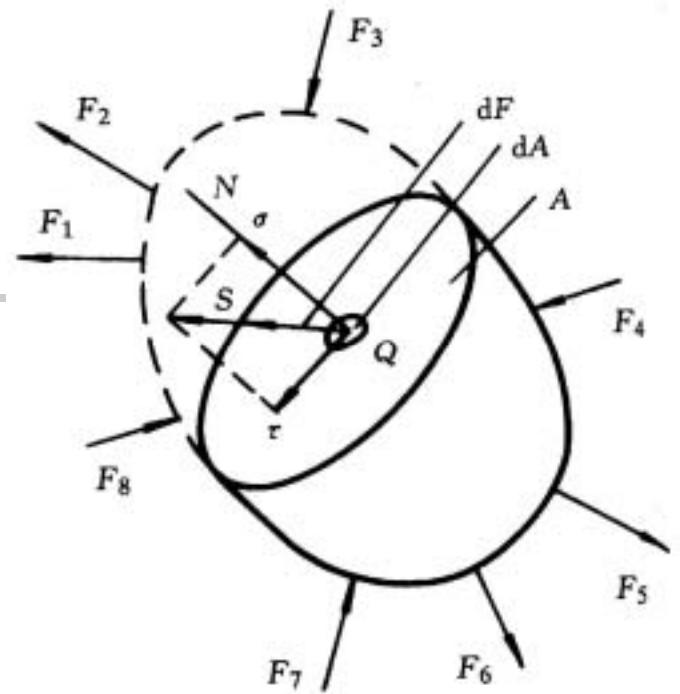
(2) **内力**：物质内部各质点之间的相互作用力

(3) **应力**：单位面积上的内力，表示内力的强度，与位置和方向有关

(4) 应力状态：任意一点处各个方向面上应力的集合。

(5) 应力状态分析：不同截面方向的应力之间的关系。

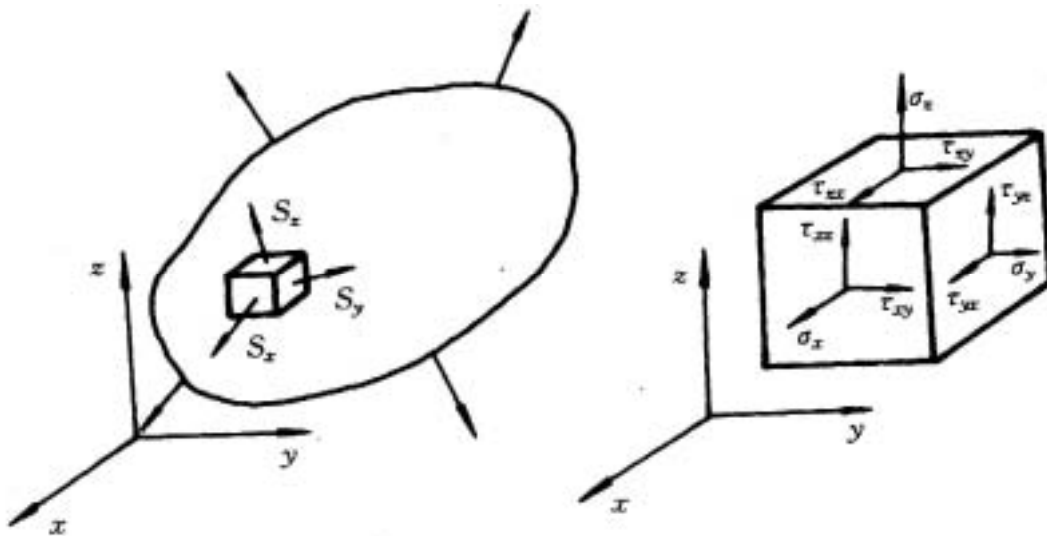
(6) 应力的数学定义：大小和方向，可以分解为正应力和剪应力



$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

5.2.2 坐标面上的应力

- 任意点Q的应力状态可以用单元体的三个相互垂直的坐标平面上的九个应力分量来表示。
- 正负号约定，剪应力成对定理，9个分量6个独立



一点的应力状态 σ_{ij} ，为二阶对称应力张量
(九个分量，六个独立)

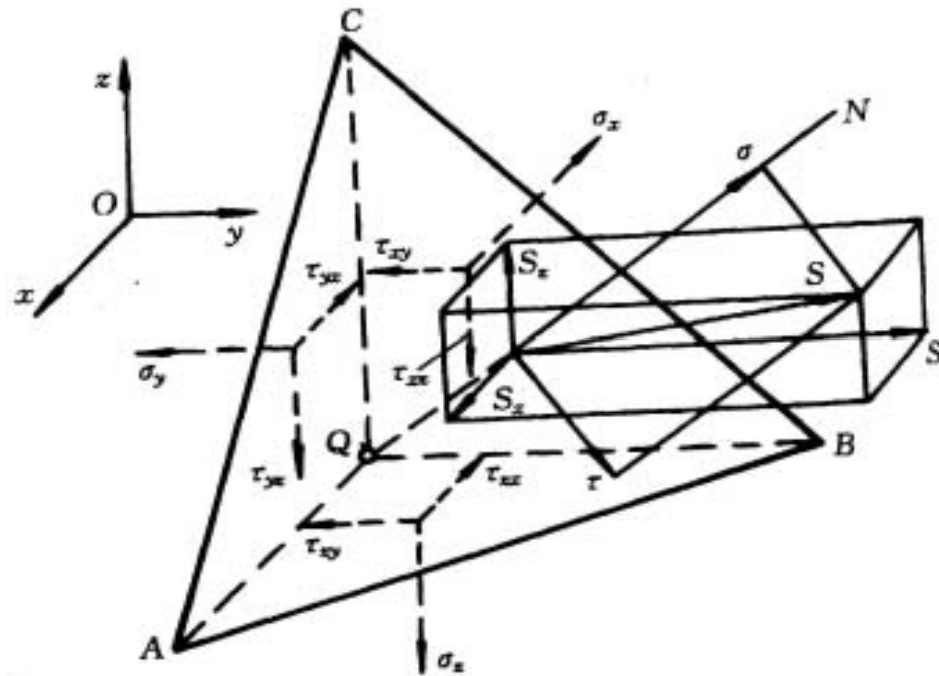
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

5.2.3 任意斜面上的应力



5.2.3 任意斜面上的应力

设斜面法线 \vec{N} 的方向余弦：

$$l = \cos(\vec{N}, x), \quad m = \cos(\vec{N}, y), \quad n = \cos(\vec{N}, z)$$

斜面面积 A ，全应力 $\vec{\sigma}$ 在 x, y, z 方向上的分量为 S_x, S_y, S_z ，则由静力平衡条件 $\sum F_z = 0$ 可以得到：

$$S_x dA - \sigma_x dA \cdot l - \tau_{yx} dA \cdot m - \tau_{zx} dA \cdot n = 0$$

$$S_y dA - \tau_{xy} dA \cdot l - \sigma_y dA \cdot m - \tau_{zy} dA \cdot n = 0$$

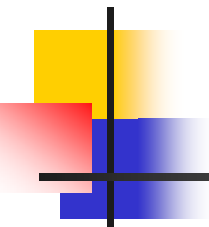
$$S_z dA - \tau_{xz} dA \cdot l - \tau_{yz} dA \cdot m - \sigma_z dA \cdot n = 0$$



$$S_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$

$$S_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n$$

$$S_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

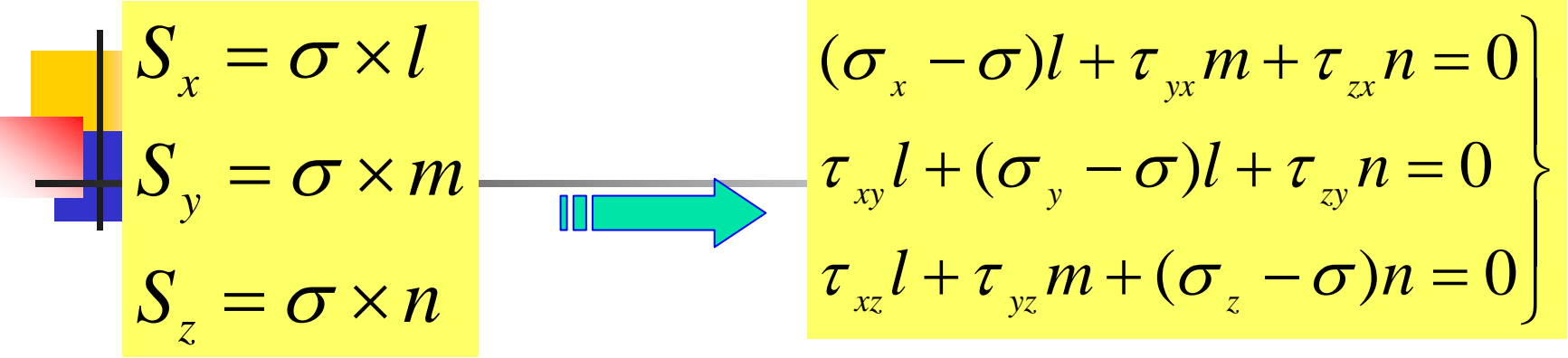

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

$$S^2 = \tau^2 + \sigma^2$$

$$\begin{aligned}\sigma &= |\vec{S}| \cdot |\vec{N}| = |\vec{S}| \cdot \cos(\vec{S}, \vec{N}) = S_x l + S_y m + S_z n \\ &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} lm + \tau_{yz} mn + \tau_{zx} nl)\end{aligned}$$

5.2.4 主应力及应力张量不变量

- 主平面： $\tau=0$
- 主应力：作用在主平面上的正应力
- 主方向：主平面法线方向（主应力轴）
- 对于任一点，一定存在三个主方向、三个主应力、三个主平面；
- 如果已知 σ_{ij} ，则可求出该点的主应力；



$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$\begin{vmatrix}
 (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\
 \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\
 \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma)
 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + [\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]\sigma - [\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)] = 0$$

设：

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)$$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

I_1 — 应力张量第一不变量

I_2 — 应力张量第二不变量

I_3 — 应力张量第三不变量

如果两个应力状态的三个应力张量不变量相等，则这两个应力状态相同。

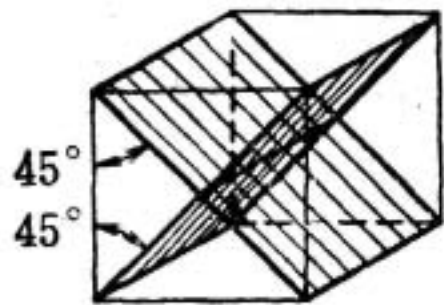


几种特殊的应力状态

- 单向应力状态：两个主应力为零
- 平面应力状态：只有一个主应力为零
- 三向应力状态：三个主应力都不为零

5.2.5 主剪应力（最大剪应力）与主轴的关系

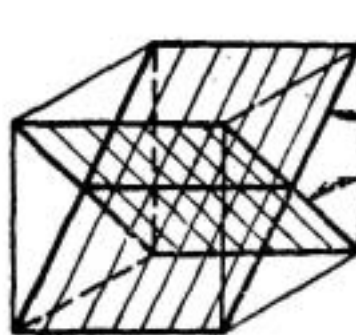
- 主剪应力平面：剪应力有极值的切面。
- 主剪应力：主剪应力平面上的剪应力。
- 最大剪应力：主剪应力中最大的那个剪应力，也是所有剪应力中最大的。
- 主剪应力达某一临界值时，塑性材料开始屈服。（屈服准则）



$$l = 0$$

$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

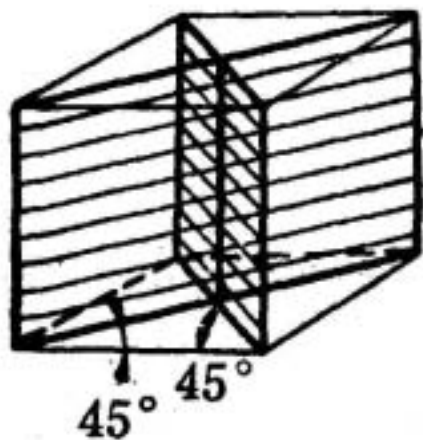
$$n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$m = 0$$

$$n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

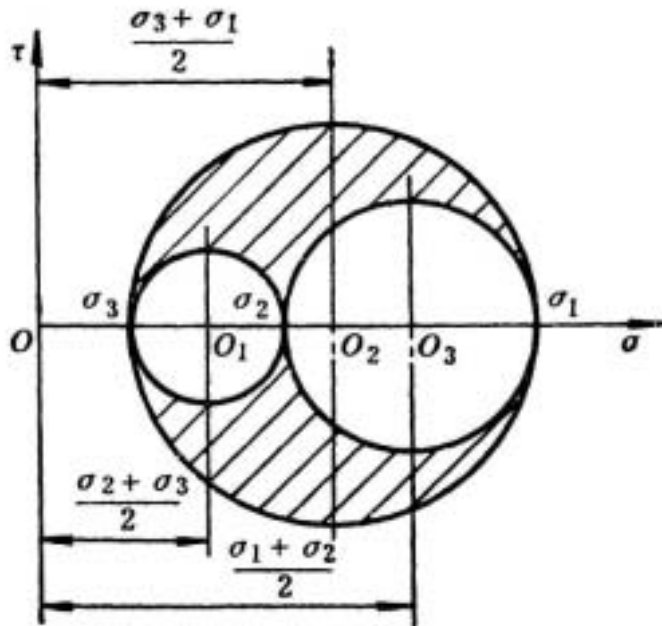
$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{23} &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_{31} &= \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \\ \tau_{12} &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned} \right\}$$

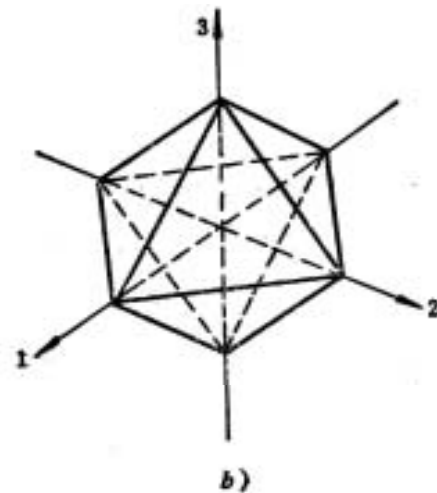
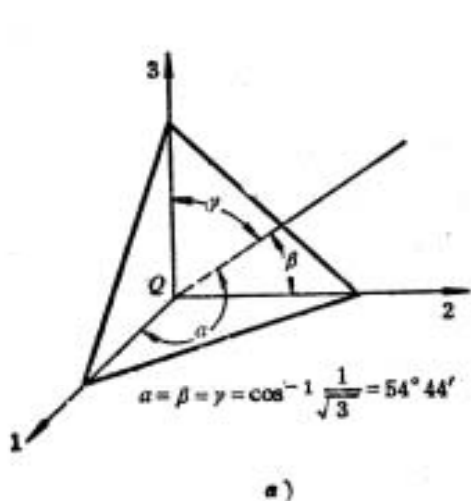
5.2.6 应力莫尔圆


- 在主应力确定情况下，任意方向面正应力和剪应力的取值范围



5.2.7 八面体上的正应力和剪应力

- 等倾面
- 平均正应力
- 应力强度
- 等效应力





$$\begin{aligned}\sigma_8 &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} I_1 \\ &\quad \text{令} \\ &= \sigma_m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_8^2 &= \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{1}{9} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]\end{aligned}$$

$$\tau_8 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2}$$

$$\tau_8 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

等效应力、广义应力、应力强度

$$\bar{\sigma} = \frac{3}{\sqrt{2}} |\tau_8| = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}$$

$$\begin{cases} d\bar{\sigma} > 0 \Leftrightarrow \text{增载} \\ d\bar{\sigma} < 0 \Leftrightarrow \text{减载} \\ d\bar{\sigma} = 0 \Leftrightarrow \text{卸载} \end{cases}$$

5.2.8 应力球张量和应力偏张量

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ * & \sigma_y & \tau_{yz} \\ * & * & \sigma_z \end{bmatrix}$$

平均应力： $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}I_1 = const$

又叫静水压力，是不变量，是单值的。

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}}_{\text{应力偏张量}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}}_{\text{应力球张量}}$$

应力偏张量：平均应力为零，不引起体积变化，只引起形状变化

应力球张量：只引起体积变化，不引起形状变化。

应力偏张量的不变量

- 应力偏张量同样有三个不变量，可用 I'_1 , I'_2 , 和 I'_3 表示：

$$I'_1 = (\sigma_x - \sigma_m) + (\sigma_y - \sigma_m) + (\sigma_z - \sigma_m) = 0$$

$$I'_2 = -\frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

$$I'_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{vmatrix}$$

$$= \sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - (\sigma'_x \tau_{yz}^2 + \sigma'_y \tau_{zx}^2 + \sigma'_z \tau_{xy}^2)$$

其中： $\sigma'_x = \sigma_x - \sigma_m$, $\sigma'_y = \sigma_y - \sigma_m$, $\sigma'_z = \sigma_z - \sigma_m$

应力偏张量的不变量（续）

当用主应力形式表示时：

$$I'_1 = 0$$

$$I'_2 = -\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$I'_3 = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$$

其中： $\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m$ ， $\sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_m$ ， $\sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_m$

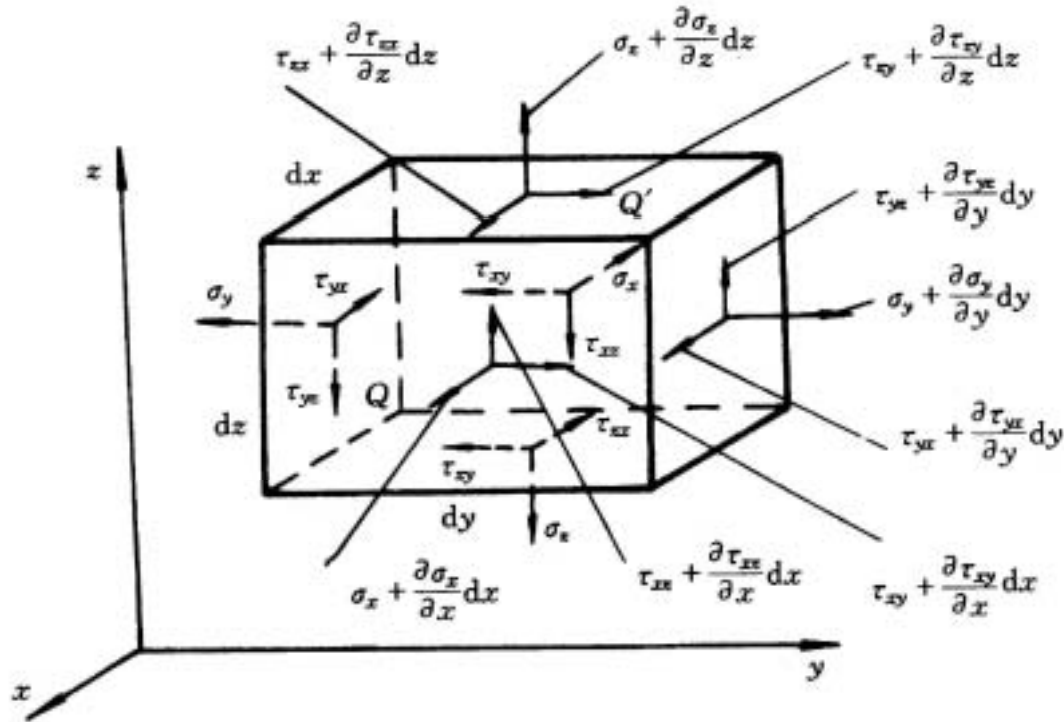
- 主应力偏量第二不变量 I'_2 ，十分重要，它将被作为塑性变形的判据。它还可以使八面体（等倾面）剪应力的表达式简化。

5.2.9 应力平衡微分方程

- 讨论相邻各点之间的应力变化关系
- 设物体内有一点Q，其坐标为x、y、z。以Q为顶点切取一个边长为dx、dy、dz的直角平行微六面体，其另一个顶点Q'的坐标为x+dx、y+dy、z+dz。由于物体是连续的，应力的变化也是坐标的连续函数。
- 现设Q点的应力状态为 σ_{ij} ，其x面上有正应力分量为：
$$\sigma_x = f(x, y, z)$$
- 在Q'点的x面上，因坐标变化了dx，其正应力分量为：
$$\sigma_{x+dx} = f(x + dx, y, z) \approx f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

应力平衡微分方程的推导 (续1)

Q'点的其余8个应力分量可用同样方法推出。



应力平衡微分方程的推导（续2）

当该微元体处于静力平衡状态，且不考虑体积力，则由力的平衡条件 $\sum F_x = 0$ ，有：

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dzdx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy - \sigma_x dydz - \tau_{yx} dzdx - \tau_{zx} dxdy = 0$$

整理后得：
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

根据 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum F_z = 0$ 还可推得另两个公式，最后可得微元体应力平衡微分方程为：

应力平衡微分方程的推导（续3）

是求解塑性成形问题的基本方程。但该方程组包含有6个未知数，是超静定的。为使方程能解，还应寻找补充方程，或对方程作适当简化。

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

- 对于平面应力状态和平面应变状态，前者

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \text{ 后者}$$

$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ， σ_z 和 z 轴无关，故可简化成：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

5.3 应变状态分析

- 当一个连续体中任意两个质点间的相对位置发生改变时，认为这个物体已发生变形或其中有应变产生。
- 刚体：任意两点间的距离保持常数
- 应变分析基本上是几何问题，不涉及材料的性质

5.3.1 应变的概念

5.3.2 应变与位移的关系

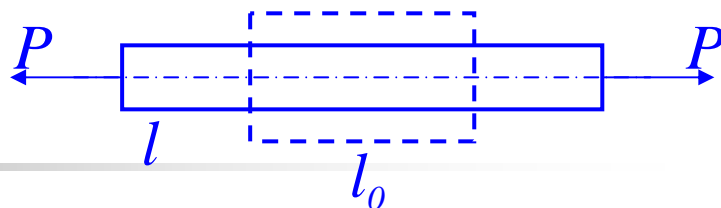
5.3.3 应变张量分析

5.3.4 应变协调方程

5.3.1 应变的概念

5.3.1.1 定义

(以单向均匀拉伸为例)



工程应变 (相对应变/条件应变)

$$\text{工程应变: } \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} (\%), \text{ 每单位原长的伸长量}$$

对数应变 (自然应变/真实应变)

物理意义: 无限小增量与该变形瞬时尺寸比值的积分。

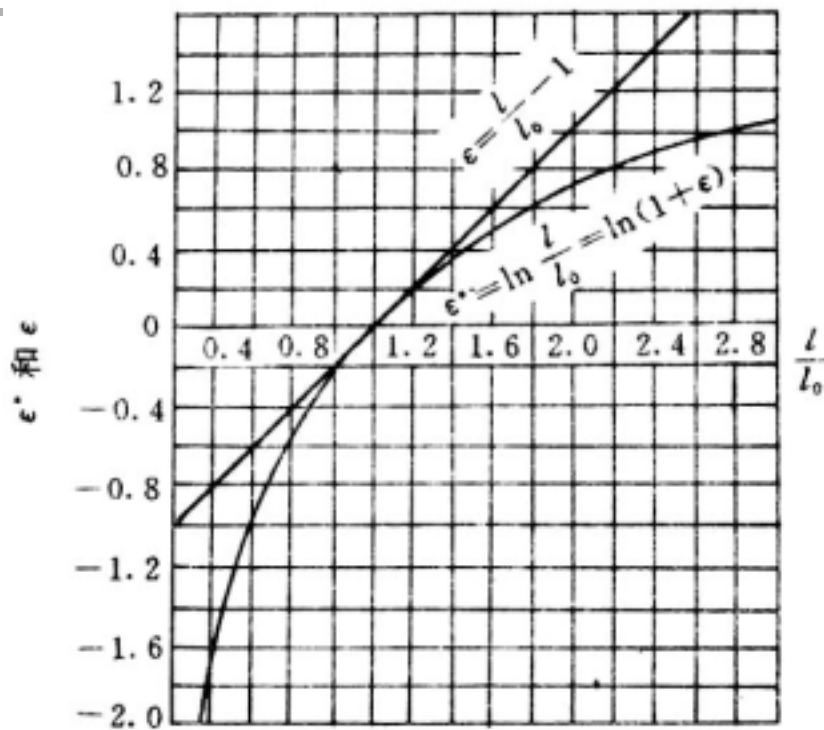
$$\text{对数应变: } \varepsilon^* = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \left(\frac{l - l_0}{l_0} + 1 \right) = \ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \dots$$

$$\text{级数展开: } \begin{cases} -1 < \varepsilon \leq 1 & \text{时收敛} \\ |\varepsilon| > 1 & \text{时发散} \end{cases}$$

$$\text{可见微小应变时: } \varepsilon^* \approx \varepsilon$$

5.3.1.2 工程应变与对数应变的比较

1. 工程应变不能表示变形的真实情况，而且变形愈大，误差也愈大。当变形程度小于10%，与 ϵ^* 的数值比较接近；当变形程度大于10%，误差逐渐增加。



条件应变和对数应变

工程应变与对数应变的比较（续1）

2. 对数应变为可加应变，工程应变为不可加应变。

$$\text{已知：} l_0 \xrightarrow{\varepsilon_1} l_1 \xrightarrow{\varepsilon_2} l_2 \xrightarrow{\varepsilon_3} l_3$$

$$\text{则：} \varepsilon = \frac{l_3 - l_0}{l_0} \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{l_1 - l_0}{l_0} + \frac{l_2 - l_1}{l_1} + \frac{l_3 - l_2}{l_2}$$

$$\varepsilon^* = \ln \frac{l_3}{l_0} = \ln \frac{l_3 \cdot l_2 \cdot l_1}{l_2 \cdot l_1 \cdot l_0} = \ln \frac{l_3}{l_2} + \ln \frac{l_2}{l_1} + \ln \frac{l_1}{l_0} = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*$$

3. 对数应变为可比应变，工程应变为不可比应变。

如：伸长一倍 \Rightarrow $= 100\% \Rightarrow$ $^* = 69\%$ ；
缩短一半 \Rightarrow $= -50\% \Rightarrow$ $^* = -69\%$ 。

工程应变与对数应变的比较（续2）

4. 体积不变时， $\varepsilon_i^* = 0 (i = x, y, z)$ ，而 $\varepsilon_i = 0$
5. 工程应变的无限小增量表示直线单元长度的变化与它原来长度 l_0 之比；对数应变的无限小增量表示直线单元长度的变化与它的瞬时长度 l 之比。对于微小应变，用这两种量度求出来的应变（和应变增量）值几乎是一样的。

$$d\varepsilon = d\left(\frac{l - l_0}{l_0}\right) = \frac{dl}{l_0}$$
$$d\varepsilon^* = d\left(\ln \frac{l}{l_0}\right) = \frac{dl}{l} = d[\ln(1 + \varepsilon)] = \frac{d\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

5.3.2 应变与位移的关系（几何方程）

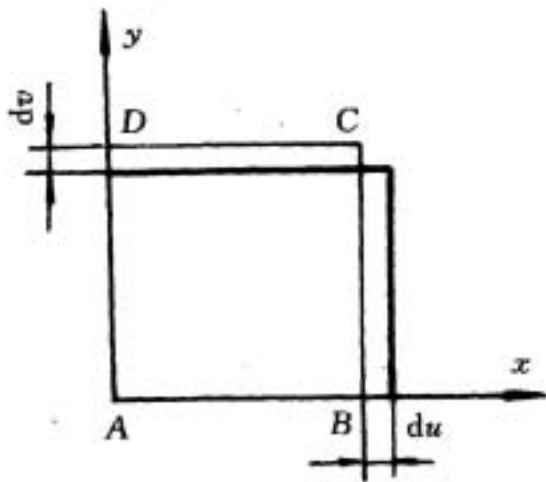
ε - 正应变， γ - 剪应变

应变可以用位移的相对变化来表示

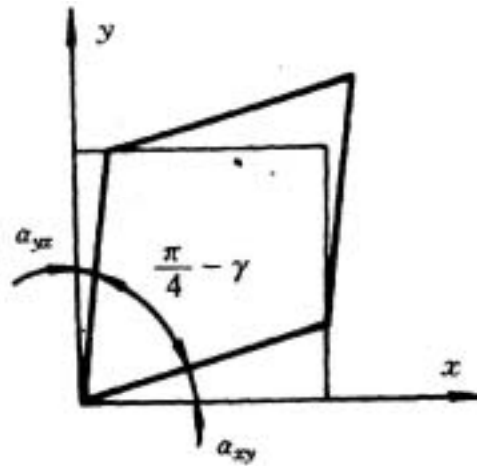
位移矢量： $\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

位移分量： $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z)$

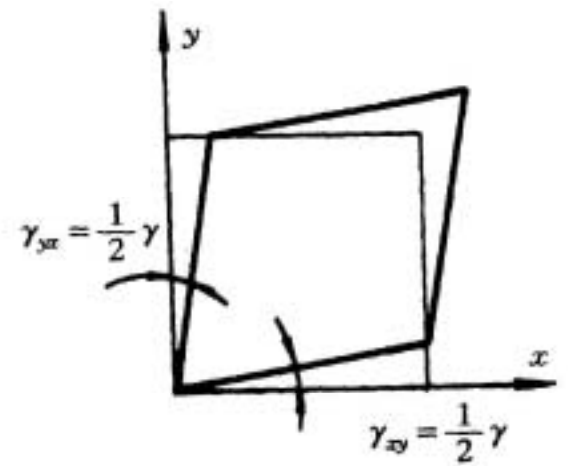
- 在材料力学以及一般弹、塑性理论中所讨论的变形大多不超过 $10^{-3} \sim 10^{-2}$ 数量级，这种很小的变形统称小变形。



(a)



(b)



(c)

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{dv}{dy}$$

$$\gamma = \alpha_{xy} + \alpha_{yx}$$

点的应变状态与柯西方程

小变形几何方程（柯西方程）

$$\text{应变张量：} \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \bullet & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \bullet & \bullet & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \text{小变形几何方程，也叫柯西方程}$$

5.3.3 应变张量分析

1. 主应变($\sigma=0$)、应变张量不变量、主剪应变(剪应变有极值的平面上的剪应变)、最大剪应变

应变张量特征方程： $\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0$ (求主应变)

$$\text{应变张量不变量} \begin{cases} I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ I_2 = (\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x) - (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = (\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1) \\ I_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + 2\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - (\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \end{cases}$$

塑性变形时：体积不变，忽略了弹性变形，故 $\varepsilon_1 = 0$

$$\text{主剪应变} \begin{cases} \gamma_3 = \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ \gamma_1 = \pm(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ \gamma_2 = \pm(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \end{cases}, \text{最大剪应变 } \gamma_{\max} = \max(\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31})$$

主应变、应变主方向、主剪应变

- 通过一点，存在着三个相互垂直的应变主方向和主轴。在主方向上的线元没有角度偏转，只有正应变，该正应变称为主应变，一般以 ϵ_1 、 ϵ_2 和 ϵ_3 表示，它们是唯一的。对于小变形而言，可认为应变主轴和应力主轴对应重合，且如果主应力中 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ，则主应变的次序亦为 $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$ 。
- 在与应变主方向成 $\pm 45^\circ$ 角的方向上，存在三对各自相互垂直的线元，它们的剪应变有极值，叫做主剪应变。

应变张量分析（续）

2. 应变偏张量和应变球张量、八面体应变和等效应变

引入平均应变： $\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{3}I_1$

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix}}_{\text{应变偏张量}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix}}_{\text{应变球张量}}$$

$$= \varepsilon'_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_m$$

在塑性变形时，体积不变， $\varepsilon_m = 0$ ，应变球张量为0

∴ 应变偏张量也就是应变张量。

八面体应变和等效应变

以应变主轴为坐标轴作八面体，

八面体平面法线方向的线元的应变叫做八面体应变：

$$\varepsilon_8 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \varepsilon_m$$

$$\begin{aligned}\gamma_8 &= \pm \frac{1}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 6(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \\ &= \pm \frac{1}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}\end{aligned}$$

八面体剪应变乘以系数 $\sqrt{2}$ ，所得参量叫做等效应变，

也称广义应变或应变强度，表示变形体中的应变程度的一个参量：

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \sqrt{2}\gamma_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 6(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}\end{aligned}$$

5.3.4 应变协调方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \text{柯西方程}$$

由柯西方程可知，六个应变分量取决于三个位移分量对x、y、z的偏导数，所以六个应变分量不能是相互无关的函数，它们之间应有一定的关系，才能保证物体中的所有单元体在变形之后仍然可以连续地组合起来，这样的关系就叫变形连续方程或应变协调方程。

应变协调方程（续）

对柯西方程再次求偏导

在每个坐标平面内，两个正应变分量一经确定，则剪应变分量也即确定；在空间内三个剪应变分量一经确定，则正应变分量也即确定。

- 由位移确定应变时，应变协调方程自然满足；由应变确定位移时，要加协调方程才能求解。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^3 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^3 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^3 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\}$$

推导：柯西方程→应变协调方程

- 将柯西方程（几何方程）中的 ϵ_x 对 y 求两次偏导数；将 ϵ_y 对 x 求两次偏导数，可得如下两式：

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

❄ 将上两式相加，得：
$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

❄ 用同样的方法还可以得到其他两个式子，连同上式共三个等式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\}$$



❄ 表明：每个坐标平面内，两个正应变分量一经确定，则剪应变分量也即确定。

推导：柯西方程 → 应变协调方程

- 将柯西方程中的 ϵ_x 对 y 及 z 求偏导数， γ_{xy} 对 x 及 z 求偏导数， γ_{zx} 对 x 及 y 求偏导数， γ_{yz} 对 x 求两次偏导数，可得下列四个式子：

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

❄ 式2+式3-式4-式1得下式：



$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 \epsilon_x}{\partial y \partial z}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^3 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^3 \epsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^3 \epsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\}$$



❄ 表明：在空间内三个剪应变分量一经确定，则正应变分量也即确定。

应力应变本构方程-广义胡克定律

位移场 → 应变 → 应力

位移场 $\xrightarrow{\text{柯西方程}}$ 应变 $\xrightarrow{\text{应力应变本构方程 (} \sigma = E\varepsilon; \tau = G\gamma \text{)}}$ 应力

广义胡克定律

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \end{aligned} \right\}$$

同种各向同性材料，
弹性模量 E 、
剪切模量 G 、
泊松比 $\mu(0 \sim 0.5)$
满足：

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

5.4 屈服准则

- 材料进入塑性状态时各应力分量满足一定的关系，这种关系称为屈服准则，也称塑性条件或塑性方程。

$$f(\sigma_{ij}) = C$$

- 屈服准则的数学表达式：
左边是应力分量的函数；右边 C 为与材料在给定变形条件下的力学性能有关的常数。
- 对各项同性材料：
 - 5.4.1 *Tresca*屈服准则（第三强度理论）
 - 5.4.2 *Mises*屈服准则（第四强度理论）

5.4.1 Tresca屈服准则

- 特雷斯卡准则（法国人，于1864年提出），也叫最大剪应力准则。
- 设 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ，则 **Tresca准则**： $\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_3$
- 在事先不知道主应力大小次序时，*Tresca*屈服准则的普遍表达式为：

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &= \sigma_s \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &= \sigma_s \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &= \sigma_s \end{aligned} \right\}$$

只要其中任何一式得到满足，材料即屈服。

- 未反应出中间主应力对变形的影响，有时会产生误差。

5.4.2 *Mises*屈服准则

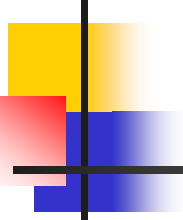
- 米泽斯准则，也叫弹性形状变化能准则

$$\text{Mises 准则： } \sigma_s = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

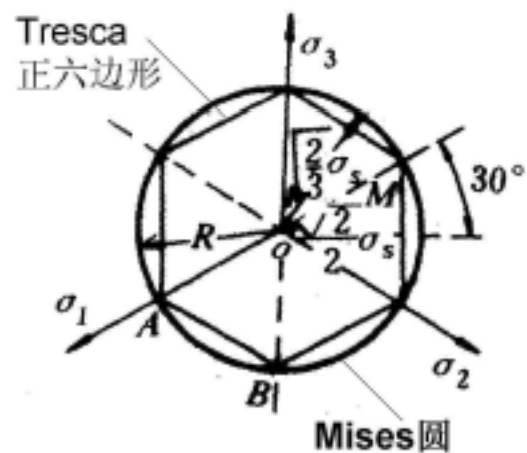
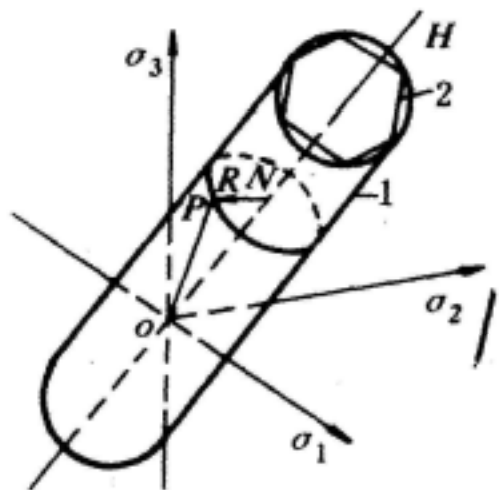
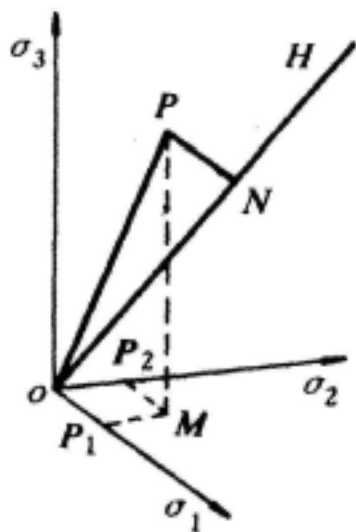
- 为了说明*Mises*屈服准则的物理意义，*H.Hencky*（汉基，1924）将上式两边各乘以 $\frac{1+\mu}{6E}$ ，其中*E*为弹性模量， μ 为泊松比，于是得：

$$\frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_s^2$$

- 可以证明，上式等号左边项即为材料单位体积弹性形状变化能（歪形能），而右边项即为单向拉伸屈服时，单位体积的形状变化能。

- 
- 按照 *Hencky* 的上述分析，*Mises* 屈服准则又可以表述为：材料质点屈服的条件是其单位体积的弹性形状变化能达到某个临界值；该临界值只取决于材料在变形条件下的性质，而与应力状态无关。

屈服准则的几何表示



例题

例：一应力张量 $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 750 & 150 & 0 \\ 150 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$ ，施加于某物体上。

若在此应力张量作用下刚好引起屈服，问：

(1) 根据 *Tresca* 准则；(2) 根据 *Mises* 准则， σ_s 各为多少？

解：平面应力状态： $\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$

求得： $\sigma_1 = 785.41 MPa$ ， $\sigma_2 = 114.59 MPa$ ， $\sigma_3 = 0$

(1): $\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_3 = 785.41 MPa$

(2): $\sigma_s = 734.85 MPa$

5.5 塑性变形时的应力应变关系（本构方程）

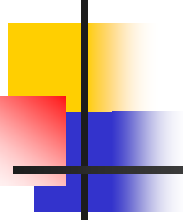
- 本构方程：应力状态和应变状态之间的关系的数学表达式，也称物理方程。
- 本构方程也是求解弹性或塑性问题的补充方程。
 - 5.5.1 塑性变形时应力应变关系的特点
 - 5.5.2 弹性应力应变关系
 - 5.5.3 塑性变形的增量理论

5.5.1 塑性应力应变关系的特点： 与弹性变形的比较

	弹性	塑性
1	应力应变线性关系	应力应变非线性关系
2	变形可逆，加载卸载规律相同	不可逆，加载卸载规律不同，非单值
3	应力球张量使物体产生体积变化 $\epsilon_m \neq 0$	塑性变形时认为体积不变，塑性应变球张量为 0， $\rho_m=0$
4	应力主轴与应变主轴重合	全量应变主轴与应力主轴一般不重合

塑性变形理论

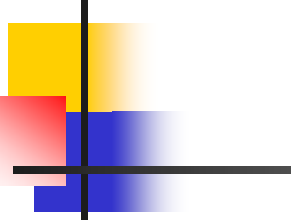
- 到目前为止，所有描述塑性应力应变关系的理论可分为两大类：
 - 增量理论——描述材料在塑性状态下应力和应变增量（或应变速度）之间的关系：如 *Levy-Mises*理论和*Prandtl-Reuss*理论。
 - 全量理论——描述材料在塑性状态下应力和应变全量之间的关系：如*Hencky*方程和 *H*（伊留辛）理论。

- 
- 一般而言，全量理论在数学上比较简单，便于实际应用，但其应用范围有限，主要适用于简单加载及小塑性变形（弹、塑性变形处于同一量级）的情况；而增量理论则不受加载方式限制，然而由于它所描述的是应力和应变速度之间的关系，故在实际应用中需沿加载过程中的变形路径进行积分，计算相当复杂。
 - 早在1870年*B.Saint-Venant*就提出应力主轴与应变增量主轴相重合，而不是与全量应变主轴重合。

简单加载状态

- 加载过程中各应力分量始终保持比例关系且主轴的方向、顺序不变，则塑性应变分量也按比例增加，这时塑性应变全量与应力状态就有相对应的函数关系。

5.5.2 弹性应力应变关系


$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{广义胡克定律} \\ \text{(for 各向同性材料)} \end{array}$$

E - 弹性模量 ; G - 剪切模量 ; μ - 泊松比 ; $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$

广义胡克定律的张量表达式为 :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma'_{ij} + \frac{1-2\mu}{E} \sigma_m \delta_{ij}$$

式中 : δ_{ij} - 克氏符号(Kronecker delta)

$$i = j \text{ 时 } , \delta_{ij} = 1 ; i \neq j \text{ 时 } , \delta_i = 0$$

- 
- 而以应力偏量和应变偏量来表达时，广义虎克定律的表达式为

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma'_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma'_{ij}$$



5.5.3 塑性变形的增量理论

- 5.5.3.1 *Levy-Mises*理论
- 5.5.3.2 *Prandtl-Reuss*理论

5.5.3.1 *Levy-Mises*理论要点

材料为理想刚塑性材料，即弹性应变增量为零，塑性应变增量就是总应变增量； $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^p$

材料服从*Mises*屈服准则，即：

$$\bar{\sigma} = \sigma_s$$

塑性变形时体积不变，即：

$$d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0$$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon'_{ij}$$

应变增量的主轴与应力主轴相重合应变增量与应力偏量成正比

$$\frac{d\varepsilon_x}{\sigma'_x} = \frac{d\varepsilon_y}{\sigma'_y} = \frac{d\varepsilon_z}{\sigma'_z} = \frac{d\gamma_{yz}}{\tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}}{\tau_{zx}} = d\lambda$$

简记为 $d\varepsilon_{ij} = \sigma'_{ij} \cdot d\lambda$

式中：
 σ'_{ij} — 应力偏张量；
 d — 正的瞬时比例系数。

表明：

应变增量主轴与应力主轴（即应力主轴）重合；
应变增量与应力偏张量成正比。

Levy-Mises理论张量表示式

利用上述应力应变关系式并对照等效应力和等效应变的关系式可得：

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}$$

式中： $d\bar{\varepsilon}$ - 增量形式的等效应变，称为等效应变增量；

$\bar{\sigma}$ - 等效应力，由Mises屈服准则知 $\bar{\sigma} = \sigma_s$ 。

$$\text{于是，} d\varepsilon_{ij} = \sigma'_{ij} d\lambda \Rightarrow d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij}$$

这就是Levy - Mises理论的张量表达式。展开得：

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right]; & d\gamma_{xy} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{xy} \\ d\varepsilon_y &= \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \right]; & d\gamma_{yz} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{yz} \\ d\varepsilon_z &= \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right]; & d\gamma_{zx} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{zx} \end{aligned} \right\}$$

5.5.3.2 Prandtl-Reuss理论

- 该理论与Levy-Mises理论的区别在于考虑了总应变增量中的弹性应变增量，即：
$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^e$$

- 其中，塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 与应力之间的关系和Levy-Mises理论相同即：
$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \sigma'_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij}$$

- 而弹性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^e$ 则可由广义虎克定律张量式微分得到，即：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma'_{ij} + \frac{1-2\mu}{E} \sigma_m \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij} + \frac{1-2\mu}{E} d\sigma_m \delta_{ij}$$

- 由以上三式得到Prandtl-Reuss方程如下：

$$d\varepsilon_{ij} = \left(\frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \right) \sigma'_{ij} + \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij} + \frac{1-2\mu}{E} d\sigma_m \delta_{ij}$$

Prandtl-Reuss方程

$$d\varepsilon_{ij} = \left(\frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\right) \sigma'_{ij} + \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij} + \frac{1-2\mu}{E} d\sigma_m \delta_{ij}$$

- 由上式可知，如 $d\varepsilon_{ij}$ 为已知，则应力张量 σ_{ij} 是确定的，但对于理想塑性材料，仍然不能由 $d\varepsilon_{ij}$ 求得确定的 $d\sigma_{ij}$ 值。对于硬化材料，变形过程每瞬时的 $d\bar{\varepsilon}^p$ 是定值，因此Prandtl-Reuss方程中的 $d\bar{\varepsilon}^p$ 和 $d\sigma_{ij}$ 之间完全是单值关系。
- 显然Prandtl-Reuss理论要比Levy-Mises理论复杂得多，必须借助计算机来求解。



5.6 主应力法及其应用

主应力法又称切块法（Slab method）、平截面法、初等解析法或工程法。

5.6.1 主应力法的概念

5.6.2 长矩形板镦粗时的变形力和平均压力

5.6.1 主应力法的概念

- 这是一种近似的解析法，它通过对物体应力状态所做的一些简化假设，建立以主应力表示的简化平衡方程和塑性条件，然后联立求解，求得该接触面上的应力大小和分布。
- 主应力法的基本要点如下：
 1. 把问题简化为轴对称问题或平面问题。对于形状复杂得变形体，必须将其分为几块，在每一块上可以按平面问题或轴对称问题处理。
 2. 根据金属流动方向，沿变形体整个截面切取单元体，切面上的正应力假定为主应力，且均匀分布，由此建立的该基元体的平衡方程为一常微分方程。
 3. 在列出该基元体的塑性条件时，通常假设接触面上的正应力为主应力，即忽略了摩擦应力的影响，从而使塑性条件简化。

主应力法的适用范围和特点

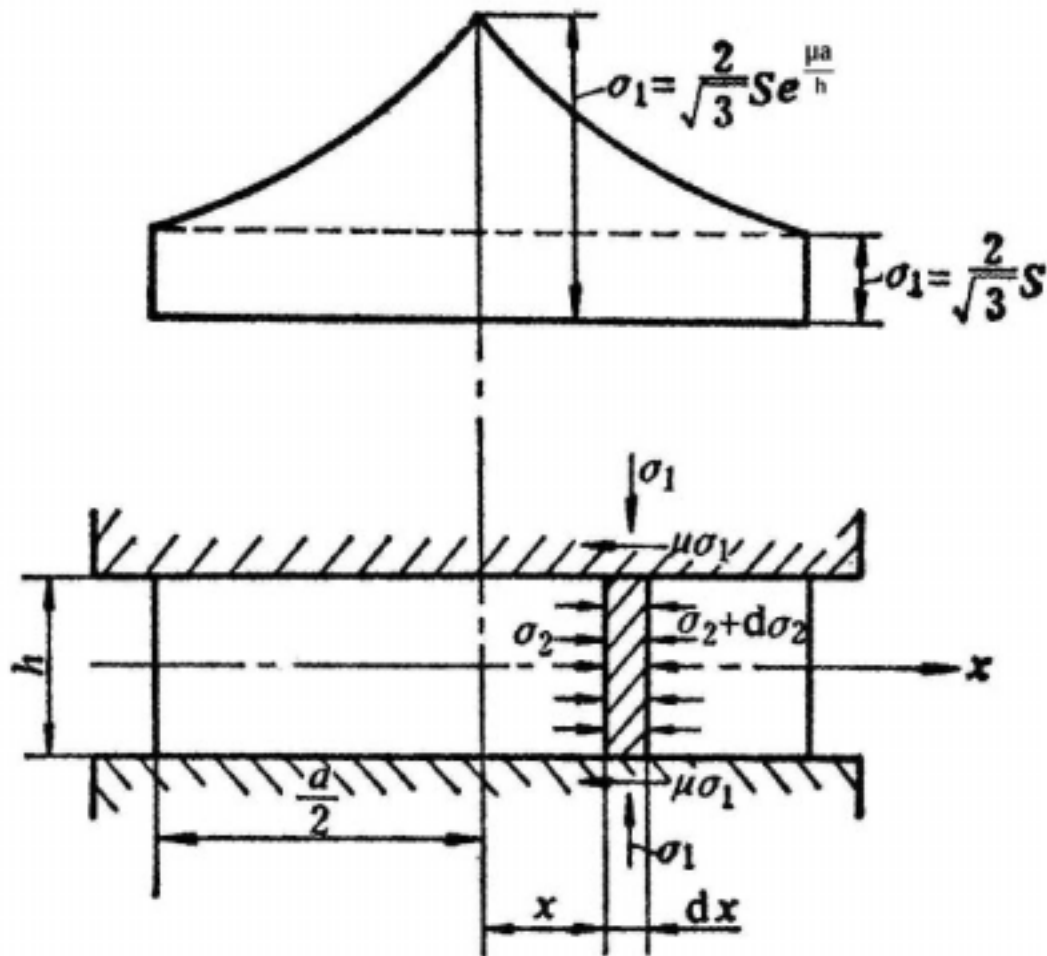
- 主应力法的数学演算比较简单。主应力法除用于计算变形力外，还可用来解决某些变形问题，如计算环形毛坯镦粗时和垫环间镦粗时的中性层位置等。从所得的数学表达式中，可以看出各有关参数（如摩擦系数、变形体几何尺寸、模孔角度等）的影响。
- 但主应力法只能确定接触面上的应力大小和分布。计算结果的准确性和所作假设与实际情况的接近程度有关。

5.6.2 长矩形板墩粗时的变形力和平均压力

假设矩形板长度 l 远大于高度 h 和宽度 a ，故可近似地认为坯料沿长度方向的变形为零，即当作平面应变问题处理。

平面墩粗时作用在基元体上的应力分量如图示。

1. 在垂直于 x 轴方向上切取一基元体，厚度为 dx 。假定两个切面上分别作用着均布的主应力 σ_2 和 $\sigma_2 + d\sigma_2$ ，与工具的接触面上作用着主应力 σ_1 。



主应力法应用举例

2. 假定接触面上的剪应力 服从库仑摩擦定律，即 $\tau = \mu \sigma_1$ 。

3. 列出基元体的静力平衡方程式：

$$\sum P_x = \sigma_2 lh - (\sigma_2 + d\sigma_2)lh - 2\mu\sigma_1 l dx = 0 \Rightarrow d\sigma_2 = -2\mu\sigma_1 \frac{dx}{h}$$

4. 列出塑性条件。按 *Mises* 屈服准则微分后得：

$$d\sigma_2 = d\sigma_1$$

5. 联立解平衡方程式和塑性条件，得：

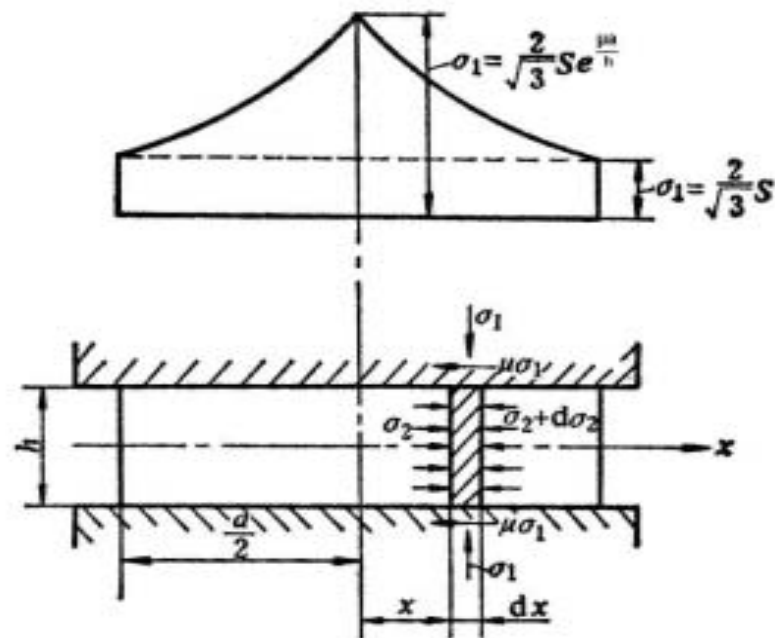
$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = -\frac{2\mu}{h} dx$$

积分得：

$$\ln \sigma_1 = -\frac{2\mu}{n} x + \ln C$$

或：

$$\sigma_1 = C e^{-\frac{2\mu}{n} x}$$



主应力法应用举例（续）

利用边界条件确定积分常数C：

当 $x = a/2$ 时， $\sigma_2 = 0$ （自由表面），

故：
$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} S$$

于是得常数：
$$C = \frac{2}{\sqrt{3}} S e^{\frac{\mu a}{h}}$$

从而，
$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} S e^{\frac{2\mu}{n}(\frac{a}{2}-x)}$$

接触面上压应力 σ_1 的分布如图所示。

6. 求变形力P和平均压力p

$$P = \int_F \sigma_1 dF \quad p = \frac{P}{F} = \frac{1}{la} \int_F \sigma_1 dF$$

上述求解过程采用的是库仑摩擦条件。但实际塑性墩粗时，接触面上的摩擦情况较为复杂，通常存在几种摩擦条件，因此求接触面上的压力分布时需分区考虑。

