

岩土力学参数随机场的空间变异性分析 及单元体力学参数赋值研究*

胡小荣 唐春安

(东北大学岩石破裂与失稳研究中心 沈阳 110006)

摘要 岩土类力学介质通常为非均质体,其力学参数具有空间变异性,宜将它们视为随机场加以研究。应用地质统计学方法对岩土力学参数随机场的空间变异性作了分析以及有限元单元体的力学参数赋值作了探讨。

关键词 岩土力学参数,随机场,有限元,地质统计学

分类号 TU 451

1 引言

工程岩土体通常都属于非均质体,在用有限元方法对一个岩土工程进行力学分析时,可以通过赋予单元体不同的力学参数值来反映^[1]。目前,常用的方法是先对工程岩土体进行分类,在此基础上再根据单元体的位置及相应的岩土种类确定单元体的力学参数值,不同种类的岩土所对应的单元体赋予不同的力学参数值,相同种类的岩土所对应的单元体则赋予相同的力学参数值,从而将非均质工程岩土体看成是由几种不同种类的均质岩土所组成的复合体。然而,事实上即使是同一类岩土,由于局部之间在细观结构、构造上存在差异,在宏观上仍呈现一定的非均质性^[2],其力学参数仍存在空间变异性。但这种空间变异性并不是纯随机的,而是具有随机性和结构性双重特征^[3],应看成是一个空间随机场。基于上述分析,本文认为,要较好地解决岩土工程有限元计算中的单元体力学参数赋值问题,除需要对工程岩土体进行分类外,还需要在此基础上对各类岩土的力学参数随机场进行空间变异性分析以及对随机场作合理离散。本文应用地质统计学方法对此作了一些探讨。

2 岩土力学参数随机场的空间变异性分析方法

1998年7月10日收到初稿,1998年12月28日收到修改稿。

* 国家杰出青年科学基金(59525408)资助项目。

作者 胡小荣 简介:男,35岁,博士,毕业于东北大学采矿系采矿专业,现任副教授,主要从事岩石力学、爆破工程等方面的教学与科研工作。

地质统计学^[4]是以区域化变量理论为基础,以变异函数为工具来分析那些具有空间变异二重性特征的自然现象。从地质统计学的角度来看,具有空间变异二重性特征的岩土力学参数随机场 $Z(X)$ 可以看成是一个区域化变量。

为一般起见,假定岩土体 V 内的岩土力学参数随机场是一非平稳随机场。则 $Z(X)$ 可表达为

$$Z(X) = m(X) + R(X) \quad (1)$$

式中: $m(X)$ 为 $Z(X)$ 在 V 内的漂移,它可以表征 $Z(X)$ 在较大尺度上的变化情况; $R(X)$ 为 $Z(X)$ 在 V 内的涨落,它可以表征 $Z(X)$ 在较小尺度上的变化,且 $E[R(X)] = 0$ 。通常 $m(X)$ 可采用以下多项式表达式:

$$m(X) = \sum_{i=0}^K \alpha_i f_i(X) \quad (2)$$

式中: α_i 为漂移多项式系数; $f_i(X)$ 为漂移多项式, $f_i(X) = X^i$; K 为漂移阶数, K 一般不超过 2。由式(1)可知,若 $m(X)$ 为一常数,则 $Z(X)$ 就是一个平稳随机场。因此,平稳随机场仅是其中的一个特例。

通常,随机场 $Z(X)$ 在 V 内两点 X_1, X_2 处的随机变量 $Z(X_1), Z(X_2)$ 有以下性质^[3]:

(1) 均值 $E[Z(X_1)] = m(X_1), E[Z(X_2)] = m(X_2)$;

(2) 协方差 $Cov[Z(X_1), Z(X_2)] = E\{[Z(X_1) - m(X_1)][Z(X_2) - m(X_2)]\} = C(X_1, X_2) = C(X_1 - X_2) = C(h)$;

(3) 变异函数 $2r(X_1, X_2) = \text{Var}[Z(X_1) - Z(X_2)] = 2r(X_1 - X_2) = 2r(h)$;

(4) 方差 $\text{Var}[Z(X_1)] = \text{Var}[Z(X_2)] = C(0)$;

(5) $r(h) = C(0) - C(h)$, $C(h) = C(0) - r(h)$, $C(h) = C(-h)$, $r(h) = r(-h)$ 。

变异函数 $r(h)$ 可用来定量表征 $Z(X)$ 在 V 内的空间变异性特征。

若在所研究的工程岩土 V 内取有 s 个支撑为 v 、中心点位置分别为 X_α 的岩样并测出其力学参数值 $Z(X_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$)，则可以通过以下的步骤得到 $r(h)$ ：

(1) 根据岩样的力学参数值求出 $r(h)$ 的估计量 $r^*(h)$ 为

$$r^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(X_i) - Z(X_i+h)]^2 \quad (3a)$$

式中： $N(h)$ 为被向量 h 分隔的数据对数。如果不同 h 方向求出的 $r^*(h)$ 有较大差异，说明 $Z(X)$ 的空间变异具有方向性，称为各向异性，否则为各向同性。各向同性时可以采用下式求变异函数 $r(h)$ 的估计量 $r^*(h)$ ：

$$r^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(X_i) - Z(X_i+h)]^2 \quad (3b)$$

式中： $h = |h|$ 。

(2) 可采用理论变异函数模型或其套合结构对 $r^*(h)$ 或 $r^*(h)$ 进行拟合。常用的理论变异函数模型为有基台的球状模型。球状模型为

$$r(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ C_0 + C \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^3}{a^3} \right) & 0 < h \leq a \\ C_0 + C & h > a \end{cases} \quad (4)$$

式中： C_0 为块金效应； $C_0 + C$ 为基台值； a 为变程。

(3) 各向异性套合。由于地质统计学所采用的空间变异分析方法能够通过变异函数来定量描述随机场的空间变异性，因此比较适合对岩土力学参数随机场作空间变异性分析。

3 岩土力学参数随机场的离散方法

单元体力学参数的赋值取决于岩土力学参数随机场的离散方法。常用的方法有：中心点离散法和局部平均离散法。

设所研究的工程岩土其空间几何域为 $V (V \in R^2 \text{ 或 } R^3)$ ， $Z(X)$ (X 为位置坐标， $X \in V$) 为定义在 V 上的某个岩土力学参数随机场，工程岩土 V 通过单元

体划分被分成 n 个子域分别为 V_i ，中心点分别为 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的单元体。则随机场 $Z(X)$ 的中心点离散法和局部平均离散法分别为：

(1) 中心点离散法^[5]

该法是用随机场 $Z(X)$ 在各单元体 V_i 中点 X_i 的值 $Z(X_i)$ 来表征单元体 V_i 的特征。这样， $Z(X)$ 就在这 n 个单元体上离散成 n 个随机变量 $Z(X_1), Z(X_2), \dots, Z(X_n)$ 。随机场 $Z(X)$ 在 V 上的一个现实可用 $Z(X_i)$ 在 $V_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 上的现实来表征。因此，用中心点离散法进行单元体赋值需要求出 $Z(X_i)$ 的最佳估计值 $Z^*(X_i)$ 并赋给单元体 V_i 。

(2) 局部平均离散法^[6-9]

该法是用随机场 $Z(X)$ 在各单元体 V_i 内的局部平均值 $Z(V_i)$ 来表征单元体 V_i 的特征。 $Z(V_i)$ 为

$$Z(V_i) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} Z(X) dX \quad (5)$$

这样，随机场 $Z(X)$ 就在这 n 个单元体上离散成 n 个随机变量 $Z(V_1), Z(V_2), \dots, Z(V_n)$ 。随机场 $Z(X)$ 在 V 上的一个现实可由 $Z(V_i)$ 的现实集合来表征。用局部平均法进行单元体赋值需要求出 $Z(V_i)$ 的最佳估计值 $Z^*(V_i)$ 并赋给单元体 V_i 。

4 单元体力学参数值的最优估计

在对岩土力学参数随机场进行空间变异性分析后就可采用泛克立格法并结合所采用的随机场离散方法求出各单元体的力学参数最优估计值。

4.1 泛克立格估值方法

泛克立格法属于一种最优线性无偏估值方法。岩土力学参数随机场 $Z(X)$ 在 V 上一点 X 处的最优估计值 $Z^*(X)$ 可以通过其影响范围内 s 个岩样测试值 $Z(X_\alpha) (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 的线性组合得到，即

$$Z^*(X) = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha Z(X_\alpha) \quad (6)$$

式中： λ_α 为估值权系数 ($\alpha = 1, 2, \dots, s$)。 λ_α 可通过求解如下一个泛克立格方程组得出：

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^s \lambda_\beta r(X_\alpha, X_\beta) + \sum_{l=0}^K \mu_l f_l(X_\alpha) = r(X_\alpha, X) \\ \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \\ \sum_{\beta=1}^s \lambda_\beta f_l(X_\beta) = f_l(X) \quad (l = 0, 1, \dots, K) \end{cases} \quad (7)$$

式中： μ_l 为拉格朗日系数。方程组(7)也可写成如下矩阵形式：

$$AL = B(X) \quad (8)$$

式中：



$$A = \begin{bmatrix} \tau(X_1, X_1) & \tau(X_1, X_2) & \cdots & \tau(X_1, X_S) & f_0(X_1) & f_1(X_1) & \cdots & f_K(X_1) \\ \tau(X_2, X_1) & \tau(X_2, X_2) & \cdots & \tau(X_2, X_S) & f_0(X_2) & f_1(X_2) & \cdots & f_K(X_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau(X_S, X_1) & \tau(X_S, X_2) & \cdots & \tau(X_S, X_S) & f_0(X_S) & f_1(X_S) & \cdots & f_K(X_S) \\ f_0(X_1) & f_0(X_2) & \cdots & f_0(X_S) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_1(X_1) & f_1(X_2) & \cdots & f_1(X_S) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_K(X_1) & f_K(X_2) & \cdots & f_K(X_S) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K)^T$$

$$B(X) = [\tau(X_1, X), \tau(X_2, X), \dots, \tau(X_S, X), f_0(X), f_1(X), \dots, f_K(X)]^T$$

令 $H = [Z(X_1), Z(X_2), \dots, Z(X_S), 0, 0, \dots, 0]^T$
 则式(6)可写成

$$Z^*(X) = H^T L = H^T A^{-1} B(X) \quad (9)$$

4.2 单元体力学参数值的最优估计

(1) 采用中心点离散法时, 各单元体的岩土力学参数最优估计值 $Z^*(V_i)$ 可根据式(10)求出:

$$Z^*(V_i) = Z^*(X_i) = H^T A^{-1} B(X_i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

(2) 采用局部平均离散法时, 由式(5)可知各单元体的岩土力学参数最优估计值 $Z^*(V_i)$ 为

$$Z^*(V_i) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} Z^*(X) dX \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

通常, 对于同一个单元体而言, 单元体内各点的最优估计值所用岩样构形相同。式(11)可写为

$$Z^*(V_i) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} H^T A^{-1} B(X) dX = H^T A^{-1} \bar{B}(V_i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

$$\bar{B}(V_i) = [\bar{\tau}(X_1, V_i), \bar{\tau}(X_2, V_i), \dots, \bar{\tau}(X_S, V_i), \bar{f}_0(V_i), \bar{f}_1(V_i), \dots, \bar{f}_K(V_i)]^T$$

式中:

$$\bar{\tau}(X_\alpha, V_i) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \tau(X_\alpha, X) dX \quad (\alpha = 1, 2, \dots, S) \quad (13)$$

$$\bar{f}_l(V_i) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} f_l(X) dX \quad (l = 0, 1, \dots, K) \quad (14)$$

一般情况下, 由式(13), (14)直接求出 $\bar{\tau}(X_\alpha, V_i)$ 和 $\bar{f}_l(V_i)$ 比较困难, 可采用离散求和的方法。先在 V_i 内选定均匀分布的 m_i 个离散点 $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im_i}$, 则式(13), (14)可用下式替代:

$$\bar{\tau}(X_\alpha, V_i) = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} \tau(X_\alpha, X_{ij}) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, S) \quad (15)$$

$$\bar{f}_l(V_i) = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} f_l(X_{ij}) \quad (l = 0, 1, \dots, K) \quad (16)$$

离散点越多, 在 V_i 内分布越均匀, 精度就越高。

5 计算实例

所研究的岩体 V 为一长 18 m, 宽 6 m 的矩形平面, 力学参数为单轴抗压强度, 钻孔取样数为 19 个。各取样钻孔孔位及所测单轴抗压强度值分别见图 1 和表 1。

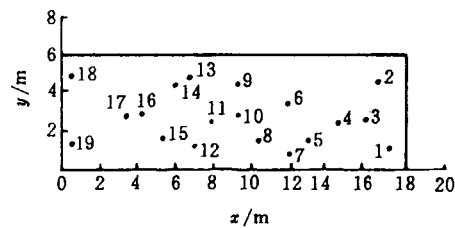


图 1 钻孔位置图

Fig. 1 Location of the samples

表 1 钻孔孔位及单轴抗压强度值

Table 1 Location of the samples and the tested values of uniaxial compressive strength

钻孔号	孔位/m		单轴抗压强度/MPa
	x	y	
1	17.2	1.1	134
2	16.4	4.5	153
3	15.8	2.6	119
4	14.5	2.6	156
5	12.8	1.5	122
6	11.6	3.5	146
7	11.8	0.8	107
8	10.2	1.5	120
9	9.1	4.4	114
10	9.1	2.8	128
11	7.6	2.4	148
12	6.8	1.2	141
13	6.6	4.6	142
14	5.8	4.3	147
15	5.2	1.6	130
16	4.1	2.8	92
17	3.2	2.8	167
18	0.4	4.8	113
19	0.4	1.1	127

通过空间变异性分析,该岩体单轴抗压强度随机场为各向同性随机场,其实验变异函数曲线和理论变异函数曲线如图2所示,理论变异函数表达式为

$$r(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ 14.09 + 711 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{h}{8.79} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^3}{8.79^3} \right) & 0 < h \leq 8.79 \text{ m} \\ 725.09 & h > 8.79 \text{ m} \end{cases}$$

变程 a 等于 8.79 m。

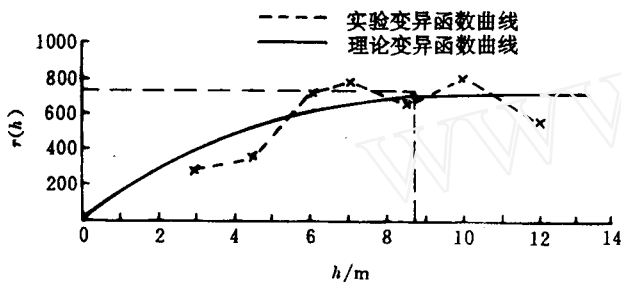


图2 变异函数图
Fig.2 Variograms

将岩体划分成 18 个长为 3 m, 宽为 2 m 的单元体,如图3所示。分别采用中心点离散法和局部平均离散法对各单元的单轴抗压强度值进行了最优估计,计算结果见表2。采用局部平均离散法计算时各单元体都采用 25 个离散点,离散点在单元体内的分布如图4所示。漂移阶数为二阶,表达式为 $m(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2$ 。

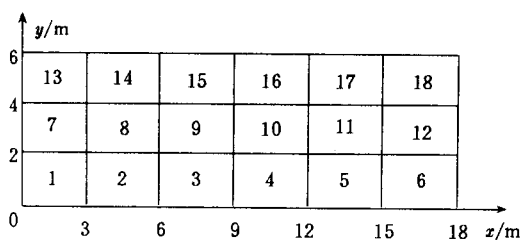


图3 单元体划分
Fig.3 Division of the elements

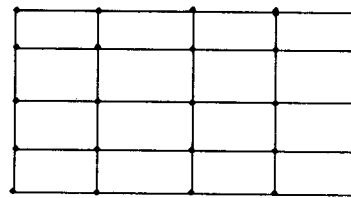


图4 单元体内离散点的分布
Fig.4 Discretive points in the element

表2 采用中心点离散法和局部平均离散法
所得各单元体的单轴抗压强度最优估计值

Table 2 Optimal uniaxial compressive strengths of the elements estimated with the discrete methods of central points and local averages

单元体号	中心点坐标/m		中心点离散法	局部平均离散法
	x	y		
1	1.5	1	133.0	130.1
2	4.5	1	125.3	126.3
3	7.5	1	131.5	125.1
4	10.5	1	106.2	108.5
5	13.5	1	114.3	113.2
6	16.5	1	123.9	121.0
7	1.5	3	146.3	141.9
8	4.5	3	110.8	132.8
9	7.5	3	144.3	137.4
10	10.5	3	132.6	132.9
11	13.5	3	151.5	146.6
12	16.5	3	137.3	142.1
13	1.5	5	119.6	117.3
14	4.5	5	126.9	126.1
15	7.5	5	127.8	125.3
16	10.5	5	127.6	127.9
17	13.5	5	146.4	144.9
18	16.5	5	152.7	150.0

参数值是一个很有意义的研究课题。本文应用地质统计学方法对此作了一些探讨。更进一步的工作尚有许多,如:(1)单元体多个力学参数协同赋值;(2)岩土力学参数空间变异性对单元体网格划分的影响等。

参 考 文 献

- 1 周维垣. 高等岩石力学. 北京: 水利电力出版社, 1991
- 2 唐春安. 岩石声发射规律数值模拟初探. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(4): 368~374
- 3 张 征, 刘淑春, 鞠硕华. 岩土参数空间变异性分析原理与最优估计模型. 岩土工程学报, 1996, 15(4): 40~47
- 4 Journel A G, Huigbregts ch J. Mining Geostatistics. London: Academic Press, 1980
- 5 Der Kiureghian Ke J. Stochastic finite element method in structural reliability. Probability Engng. Mech., 1988, 3(2): 83~91

6 结 语

岩土非均质性导致岩土力学参数具有空间变异性。在用有限元方法进行岩土工程力学分析时,如何依据所研究的工程土岩体赋予单元体相应的力学

- 6 Zhu W Q, Ren Y J, Wu W Q. Stochastic FEM based on local averages of random vector fields. *J. Engng. Mech.*, 1992, 118 (3): 496~511
- 7 朱位秋, 任永坚. 随机场的局部平均与随机有限元法. *航空学报*, 1986, 7(6): 604~611
- 8 朱位秋, 任永坚. 基于随机场局部平均的随机有限元法. *固体力学学报*, 1988, 7(6): 604~611
- 9 Vanmarc Ke E. Stochastic finite element analysis of simple beams. *J. Engng. Mech.*, 1983, 109(5): 1203~1214

SPATIAL VARIATION ANALYSIS ON THE RANDOM FIELD OF MECHANICAL PARAMETERS FOR ROCK AND SOIL AND THE PARAMETER ESTIMATION OF ELEMENTS

Hu Xiaorong Tang Chun'an

(Northeastern University, Shenyang 110006 China)

Abstract The mechanical parameters of rock and soil are of the property of spatial variation due to inhomogeneity, so they should be properly considered as a random field. The study is contributed to the variation analysis of the random field of mechanical parameters for rock and soil and the parameter estimation of the elements using geostatistics.

Key words mechanical parameters of rock and soil, random field, FEM, geostatistics

第二届海峡两岸隧道与地下工程学术技术研讨会 今年在台北召开

由中国岩石力学与工程学会地下工程专业委员会和土木工程学会隧道与地下工程分会及台湾方面隧道协会共同发起的第一届海峡两岸隧道与地下工程学术与技术研讨会,已于1999年8月在太原成功召开。初步决定,该研讨会的第二届会议将于2000年11月7~9日在台北召开。有关第二届会议的一号通知,将由台方于近期正式发出。这次会议的内容为:

(1) 规则与设计: 调查方法及技术,力学分析。

(2) 施工技术: 施工方法、机具、材料; 施工计划、反馈分析; 地下水处理; 灾害预防与处理; 案例探讨。

(3) 工程管理: 合约之合理性与风险分担; 运转与安全管理; 防灾管理与措施; 地震相关影响探讨。

(4) 大型及特殊隧道及地下工程近况: 长大公路及铁路山岳隧道; 都市捷运(地铁)与城市地下空间; 水利和矿山地下工程; 海底或河底隧道。

(5) 其他。

会议将出版论文集,欢迎有意与会者尽快提出论文提要。

论文提要截止期: 2000年1月31日(500字以内)。

通知接受提要日期: 2月15日。

论文全文寄送时间: 4月30日(格式及要求另告)。

论文审查结果通知时间: 5月31日。

论文终稿寄达时间: 6月30日。

论文提要请寄至: 湖北武汉小洪山中国科学院武汉岩土力学研究所转中国岩石力学与工程学会地下工程专委会 李术才收, 邮编: 430071。

会后将有三条考察线路,其他事项容后通知。

(中国岩石力学与工程学会地下工程专业委员会供稿)