

一个延时混沌神经元系统的耦合同步¹

彭 军 * ** 廖晓峰 * 吴中福 *

* (重庆大学计算机科学与工程学院 重庆 400044)

** (重庆工业高等专科学校计算机系 重庆 400050)

摘 要 该文研究了一个延时混沌神经元系统的耦合同步问题, 基于 Krasovskii-Lyapunov 理论, 讨论了同步的渐近稳定性, 并给出了系统同步的一个充分条件. 计算机数值仿真结果表明, 文中讨论的系统具有良好的同步效果和鲁棒性.

关键词 混沌, 延时神经元, 同步, 渐近稳定性

中图分类号 TN918.1

1 引 言

混沌是一种复杂的非线性动力学行为, 其主要特征是运动状态对初值条件的依赖性非常敏感, 初值条件相差极小的两条轨迹随时间的增长将呈指数分离, 这使得人们一度认为两个或多个混沌系统的同步几乎是不可能的. 然而近年来, 许多研究表明, 两个混沌系统在适当条件下可以完全达到同步. 特别是 90 年代初期, 美国海军实验室的 Pecora 和 Carroll^[1,2] 首次将混沌同步用于保密通信, 并获得成功. 随后该领域的研究进入到了一个新的高潮, 并逐渐成为人们日益关注的热点.

由于某些低维的混沌系统往往只有一个正的 Lyapunov 指数, 将其用于通信时, 系统安全性会受到威胁^[3]. 如使用非线性动力学预测或回归映射等方法, 可以重构混沌系统, 从而对信息进行解密. 因此, 为了提高保密性, 采用超混沌系统是一个比较好的方案, 可大大提高混沌信号的随机性和不可预测性. 由于超混沌系统具有多个正的 Lyapunov 指数, 因此难以破译.

人们发现, 在一个生物系统中, 两个神经元之间发生的短暂延时是很正常的, 并且对神经元之间的信息传递也是至关重要的. 因此, 延时在混沌系统的影响和作用引起了人们的广泛注意. 研究表明^[4,5]: 带延时的混沌系统能表现出很好的超混沌特性, 被认为是一种有效的加密工具. 其主要原因是, 系统方程简单, 具有更加复杂的无穷维动力学特性和有限高维同步吸引子, 以及多个正的 Lyapunov 指数, 而且随着延时的增大, 系统呈现出多稳定性^[6], 电路实现也很简单.

我们知道, 混沌同步是混沌应用于保密通信的一个关键性问题. 本文将研究一个延时混沌神经元系统的耦合同步问题. 首先利用文献 [7] 中给出的延时神经元方程, 建立了一个耦合的延时混沌系统, 利用稳定性理论, 给出了系统同步的充分条件, 并具体地对同步阈值范围进行了估计. 计算机仿真实验表明, 在给定的参数范围内系统达到了满意的同步效果, 并且具有一定抗干扰能力.

2 系统描述

考察如下延时神经元方程^[7]:

$$dx(t)/dt = -x(t) + af[x(t) - bx(t-1) + c], \quad t > 0 \quad (1)$$

其中 $f(x)$ 是任意的非线性函数, 并且 $f(x) \in C^3$. 为讨论方便, 假设 $c = 0$. 初始条件满足如下形式: $x(h) = x_{in}(h)$, $h \in [-1, 0]$, 其中 $x_{in}(h)$ 为 $[-1, 0]$ 上的实值连续函数.

¹ 2001-06-27 收到, 2001-11-29 改回

取 $f(x)$ 为如下函数:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i [\tanh(x + k_i) - \tanh(x - k_i)] \quad (2)$$

其中 α_i 和 k_i 为常数. 分别取值为 $\alpha_1 = 2, k_1 = 1, \alpha_2 = -1.5, k_2 = 4/3$. 在文献 [7] 中我们研究了 (1) 式的线性稳定性和 Hopf 分岔周期解的稳定性, 给出了相应的稳定性条件, 并讨论了 $f(x)$ 取 (2) 式时系统的混沌行为. 需要注意的是, 该系统是一个超混沌系统, 具有多个正的 Lyapunov 指数, 出于简化的目的, 在文献 [7] 中只计算了最大 Lyapunov 指数.

现在, 我们建立如下耦合的延时混沌神经元系统:

$$dx(t)/dt = -x(t) + af[x(t) - bx(t-1)] \quad (3a)$$

$$dy(t)/dt = -y(t) + af[y(t) - by(t-1)] + K(x(t) - y(t)) \quad (3b)$$

(3b) 式中加入了微扰项 $D(t) \equiv K(x(t) - y(t))$ 并与 (3a) 式进行耦合, 其中 K 为耦合强度. 一般地称 (3b) 式为“响应系统”, (3a) 式为“驱动系统”.

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0$ 成立, 则称系统 (3b) 式和系统 (3a) 式达到同步. 为此, 下面研究系统 (3a) 式和 (3b) 式的同步问题.

3 同步控制理论研究

如果在 (3a) 式中令

$$z(t) = x(t) - bx(t-1), \quad t \in [-1, +\infty) \quad (4)$$

则得到

$$dz/dt = -z(t) + af[z(t)] - abf[z(t-1)], \quad t > 0 \quad (5)$$

为使研究具有一般性, 将系统 (3a), (3b) 式改写成如下更广泛的形式:

$$dx/dt = F(x, x_\tau, p_0) \quad (6a)$$

$$dy/dt = F(y, y_\tau, p_0 + K(y - x)) \quad (6b)$$

式中 x_τ 为 $x(t - \tau)$, y_τ 为 $y(t - \tau)$, τ 表示延时常量. 假设系统有一个外部扰动参数 p , 对于驱动系统 (6a) 式该参数取固定值 p_0 , 而对于响应系统 (6b) 式, 取值为 $p_0 + K(y - x)$, 在两个系统达到同步状态时有 $y = x$, 此时该参数与驱动系统取相同的值 $p = p_0$.

考察差分 $\Delta = y - x$, 根据 Krasovskii-Lyapunov 定理, 它受控于下面的线性时延微分方程 [8]:

$$d\Delta/dt = -r(t)\Delta + s(t)\Delta_\tau \quad (7)$$

式中 $-r(t) = (\partial_x + K\partial_p)F(x, x_\tau, p_0)$, $s(t) = \partial_{x_\tau} F(x, x_\tau, p_0)$. 如果 (7) 式的原点稳定, 则系统 (6a) 式和 (6b) 式同步. 根据克拉索夫斯基 (Krasovskii) 定理 [9], 我们引进如下正定可微函数:

$$V(t) = \frac{1}{2}\Delta^2 + \mu \int_{-\tau}^0 \Delta^2(t + \theta) d\theta, \quad \mu > 0 \quad (8)$$

对 $V(t)$ 求导数, 并结合 (7) 式得到

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \Delta \frac{d\Delta}{dt} + \mu(\Delta^2 - \Delta_\tau^2) = -r(t)\Delta^2 + s(t)\Delta\Delta_\tau + \mu\Delta^2 - \mu\Delta_\tau^2 \\ &= -[\sqrt{\mu}\Delta_\tau - s(t)\Delta/(2\sqrt{\mu})]^2 + \Delta^2[s^2(t)/(4\mu) - r(t) + \mu] \end{aligned}$$

当 $r(t) > \mu + s^2(t)/(4\mu)$ 时, $dV(t)/dt$ 为负定函数. 设 $g(s, \mu) = \mu + s^2(t)/(4\mu)$, 对于函数 $g(s, \mu)$, 给定 s , 当 $\mu = |s|/2$ 时, g 有最小值 $g_{\min} = |s|$. 于是我们得到如下定理.

定理 (7) 式的原点稳定性条件为

$$r(t) > |s(t)|, \quad \forall s(t), \quad \mu > 0 \quad (9)$$

根据该定理, 如果对所有的 $t > 0$, 不等式均成立, 则系统 (6a) 式和 (6b) 式的同步流形是渐近稳定的. 从而给出了关于系统 (6a) 式和 (6b) 式同步稳定性的一个充分条件.

4 耦合强度 K 值的计算

针对系统 (3a) 式和 (3b) 式, 我们有

$$F(x, x_\tau, p) = -x + af(x - bx_\tau) - p \quad (10)$$

取 $p_0 = 0$. 设 $z = x - bx_\tau$, 则有 $-r(t) = -1 - K + af_z(z)$, $s(t) = -abf_z(z)$. 于是稳定性条件 (9) 式即为

$$K > \max\{|abf_z(z)| + af_z(z)\} - 1, \quad \forall t > 0 \quad (11)$$

其中 $f_z(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i [\tanh^2(z - k_i) - \tanh^2(z + k_i)]$. 由文献 [7] 知, 取参数 $a = 3$, $b = 4.5$, $\tau = 1$ 时系统 (3a) 式的最大 Lyapunov 指数大于零, 此时系统 (3a) 式是混沌的. 令 $G(z) = |abf_z(z)| + af_z(z)$, 通过数值计算得到 $G(z)$ 曲线图 (见图 1), $\max G(z) = 10.8270$, 最大值点为 $z = 1.5000$. 根据 (11) 式令 $\tilde{k}_0 = 9.8270$, 则得到同步耦合强度 K 的取值范围为 $K > \tilde{k}_0$.

5 计算机仿真实验

对系统 (3a) 式和 (3b) 式进行仿真实验, 系统各参数取值如前所述. 耦合强度取值 $K = 9.85$. 实验中分别对驱动系统信号不加噪声和加入一定噪声两种情况进行了仿真.

我们采用四阶 Runge-Kutta 数值积分法来求解泛函微分方程 (3a) 式和 (3b) 式. 图 2 和图 4 分别为无噪声时驱动系统 (初值取 0.5) 和响应系统 (初值取 0.6) 的状态变量演化曲线, 图 3 为驱动系统对应的相图, 图 5 为同步的误差曲线. 从图 5 可看出, 误差 $e(t) = y(t) - x(t)$ 经过有限时间后很快地衰减到零, 表明同步渐近稳定. 图 6 为系统加入概率分布为 $N(0, 0.0005)$ 的高斯白噪声后的误差曲线, 误差 $e(t)$ 也很快地衰减到零, 系统同步仍然是稳定的, 同时也说明本文给出的同步系统具有一定的抗噪能力.

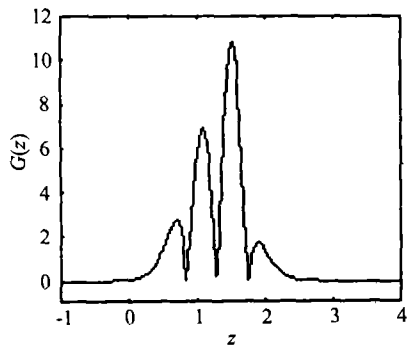


图 1 $G(z)$ 曲线图

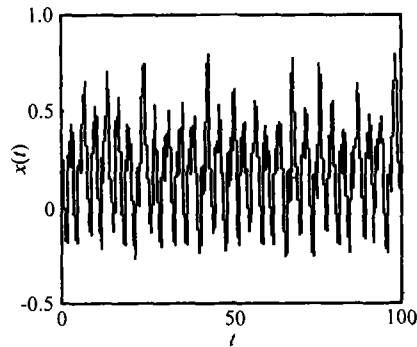


图 2 驱动系统状态演化曲线

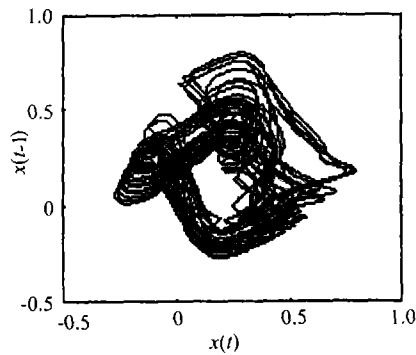


图 3 驱动系统状态相图

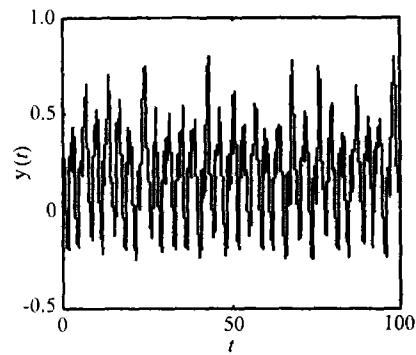


图 4 响应系统状态演化曲线

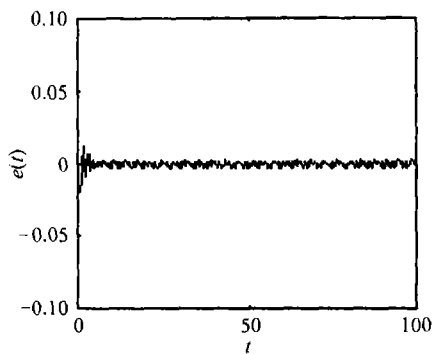


图 5 无噪声时的误差曲线

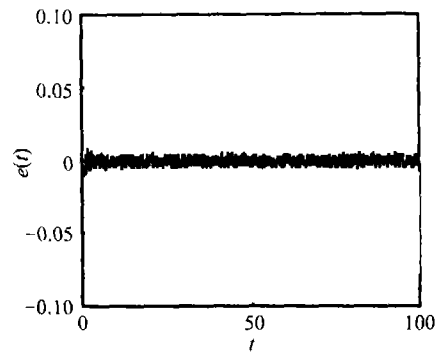


图 6 有噪声时的误差曲线

6 结论

本文研究了一个延时混沌神经元系统的耦合同步问题,分析了同步的渐近稳定性,并给出了稳定性的一个充分条件以及具体的数值计算。计算机仿真结果显示,在给定的参数范围内,系统达到了较为满意的同步效果,同时系统具有一定的抗外界干扰能力。该模型的进一步工作,可研究延时耦合系统的最大 Lyapunov 指数的估计问题。虽然最大 Lyapunov 指数为负这个条件对于同步状态的稳定性不是充分的,但在许多情形下,它给出了同步流形很好的估计,因此该问题值得做进一步研究,我们将另文报道。

参 考 文 献

- [1] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64(8), 821-824.
- [2] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Driving systems with chaotic signals, *Phys. Rev. A*, 1991, 44(4), 2374-2383.
- [3] G. Pérez, H. A. Cerdeira, Extracting messages masked by chaos, *Phys. Rev. Lett.*, 1995, 74(11), 1970-1973.
- [4] B. Mensour, A. Longtin, Synchronization of delay-differential equations with application to private communication, *Phys. Lett. A*, 1998, 244(1), 59-70.
- [5] Yu-chu Tian, Furong Gao, Adaptive control of chaotic continuous-time systems with delay, *Physica D*, 1998, 117(1), 1-12.

- [6] Seunghwan Kim, Seon Hee Park, C. S. Ryu, Multistability in coupled oscillator systems with time delay, *Phys. Rev. Lett.*, 1997, 79(15), 2911–2914.
- [7] Xiaofeng Liao, Kwok-Wo Wong, Chi-Sing Leung, Zhongfu Wu, Hopf bifurcation and chaos in a single delayed neuron equation with non-monotonic activation function, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2001, 12(8), 1535–1547.
- [8] K. Pyragas, Synchronization of coupled time-delay systems: Analytical estimations, *Phys. Rev. E*, 1998, 58(3), 3067–3071.
- [9] 廖晓昕, 稳定性的理论, 方法和应用, 武汉, 华中理工大学出版社, 1999, 72–81.

CHAOTIC SYNCHRONIZATION OF A COUPLED DELAYED NEURON SYSTEM

Peng Jun* ** Liao Xiaofeng* Wu Zhongfu*

*(*Faculty of Computer Science & Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China*)

**(*Dept. of Computer, Chongqing Polytechnic College, Chongqing 400050, China*)

Abstract In this paper, the synchronization of a coupled delayed neuron chaotic system is investigated. The asymptotic stability of the synchronization is discussed based on the Krasovskii-Lyapunov theory, and a sufficient condition of synchronization is obtained. The results of computer simulation show that the proposed synchronization system is an effective one, which is robust when Gaussian noise added.

Key words Chaos, Delayed neuron, Synchronization, Asymptotic stability

彭 军: 男, 1970 年生, 讲师, 博士生, 研究方向为网络安全, 混沌保密通信等.

廖晓峰: 男, 1964 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为神经网络, 信号处理, 混沌保密通信等.

吴中福: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为计算机网络与通信, 宽带综合业务数字网等.