

一种基于三阶累积量的准则及自适应滤波算法¹

高 鹰 * ** 谢胜利 *

*(华南理工大学电子与通信工程系 广州 510641)

** (广州大学计算机科学系 广州 510405)

摘 要 该文提出了一个基于三阶累积量的“优度准则”。基于此准则,利用最速下降法,得到一种新的基于三阶累积量的梯度型自适应滤波算法。该算法用于平稳和非平稳的 MA(Moving Average) 模型系统辨识的计算机模拟仿真结果表明:该算法有良好的收敛性能及对时变系统的跟踪能力。

关键词 三阶累积量, 优度准则, 最速下降法

中图分类号 TN911.72, TN713

1 前 言

高阶统计量已广泛应用于信号处理的诸多领域中。应用高阶统计量不仅能辨识非最小相位、非因果、非线性系统,而且可以抑制高斯或非高斯的有色噪声,提高被估计参数的精度^[1]。高阶累积量是一种重要的统计量,人们已经提出了许多用于时延估计^[2]、线性预测^[3,4]和干扰消除^[5,6]的基于高阶累积量的自适应算法。在基于高阶累积量的时延估计^[2]和干扰消除^[5,6]的自适应算法中,实际的误差和滤波器的输出不再被用于更新滤波器的系数,这些算法的导出均是源于相同的基于累积量的结构^[2,5],即输入信号和输出信号首先被用于计算自累积量和互累积量,然后在一些“优度准则”(criterion of goodness)下,一个时域中的自适应算法被转化为累积量域中。这些算法中所采用的“优度准则”是: $\xi_g = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_{n-1}} [C_{zz \cdots z}(m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}) - C_{yz \cdots z}(m_1, m_2, \cdots, m_{n-1})]^2$ (minimum sum-of-error-squares)。文献[6]遵循相同的结构,给出了另一个“优度准则”: $\bar{J}_A = \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} \sum_{\tau_3} |\bar{C}_{d3u}(t; \tau_1, \tau_2, \tau_3) - \bar{C}_{y3u}(t; \tau_1, \tau_2, \tau_3)|$ (fourth-order cumulant-based minimum sum-of-error-absolute), 基于这一准则的自适应干扰消除算法比文献[5]的算法计算量少。文献[7]在给出了基于三阶累积量的“优度准则” $J(k) = \sum_{t=1}^k \sum_m \sum_n \beta^{k-t} \times [\sum_{i=0}^p \hat{w}(i) c_{3uyy}(m+i, n+i; t) - c_{3y}(m, n; t)]^2$ 的基础上,利用著名的矩阵求逆定理,得到了辨识非最小相位系统的基于三阶累积量的类似于常规 RLS 算法的 CRLS 算法,然而 CRLS 算法在每次迭代过程中仍然必须求逆矩阵,这是该算法的不足。本文给出基于三阶累积量的另一“优度准则”: $J(k) = \frac{1}{L} \sum_{t=k-L+1}^k \sum_m \sum_n [\sum_{i=0}^p \hat{w}(i) c_{3uyy}(m+i, n+i; t) - c_{3y}(m, n; t)]^2$, 利用最速下降法得到一种新的基于三阶累积量的自适应算法。该算法在每次迭代过程中不含矩阵求逆运算,克服了 CRLS 算法的不足。对于该算法,我们进行了计算机模拟仿真,仿真结果表明该算法有良好的收敛性能。

2 新的准则和算法

设 MA 模型由 $y(k) = \sum_{i=0}^p w(i)u(k-i)$ 描述,其中 p 是非最小相位 MA 模型的阶。 $\{u(k)\}$ 是零均值、独立同分布、非高斯噪声。信号 $\{y(k)\}$ 的三阶累积量 $c_{3y}(m, n) = \text{Cum}(y(k), y(k+m), y(k+n))$, 设被估计的参数为 $\hat{w}(i)$, 则

¹ 2000-09-01 收到, 2001-03-06 定稿

国家自然科学基金(69972016)、广东省自然科学基金(990892)、广东省优秀人才基金(教研[2000]69号)资助项目

$$\begin{aligned}
c_{3y}(m, n) &= \text{Cum}\left(\sum_{i=0}^p \tilde{w}(i)u(k-i), y(k+m), y(k+n)\right) \\
&= \sum_{i=0}^p \tilde{w}(i)\text{Cum}(u(k-i), y(k+m), y(k+n)) = \sum_{i=0}^p \tilde{w}(i)c_{3uyy}(m+i, n+i)
\end{aligned}$$

其中 $c_{3uyy}(m, n)$ 是 $\{u(k)\}$ 和 $\{y(k)\}$ 的三阶互累积量。

我们定义的准则如下: $J(k) = \frac{1}{L} \sum_{t=k-L+1}^k \sum_m \sum_n [\sum_{i=0}^p \hat{w}(i)c_{3uyy}(m+i, n+i; t) - c_{3y}(m, n; t)]^2$. 其中 L 是数据窗口宽度. m, n 定义为整个 $m \times n$ 平面, 取 $m = 0, 1, \dots, M$; $n = 0, 1, \dots, N (M, N \geq p)$. M 和 N 确定被估计的三阶累积量的支撑区域.

写为矩阵形式: $J(k) = \frac{1}{L} \sum_{t=k-L+1}^k [C(t)\hat{w} - c(t)]^T [C(t)\hat{w} - c(t)]$. 其中 $C(t) = [c_{3uyy}^T(0), c_{3uyy}^T(1), \dots, c_{3uyy}^T(M-1)]^T$ 是 $(M \times N) \times (p+1)$ 矩阵.

$$c_{3uyy}(k) = \begin{bmatrix} c_{3uyy}(k, 0) & c_{3uyy}(k+1, 1) & \cdots & c_{3uyy}(k+p, p) \\ c_{3uyy}(k, 1) & c_{3uyy}(k+1, 2) & \cdots & c_{3uyy}(k+p, p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{3uyy}(k, N-1) & c_{3uyy}(k+1, N) & \cdots & c_{3uyy}(k+p, p+N-1) \end{bmatrix}$$

$(k = 0, \dots, M-1)$, 是 $N \times (p+1)$ 矩阵; $c(t) = [c_{3y}^T(0), c_{3y}^T(1), \dots, c_{3y}^T(M-1)]^T$ 是 $(M \times N) \times 1$ 矩阵, $c_{3y}^T = [c_{3y}(k, 0), c_{3y}(k, 1), \dots, c_{3y}(k, N-1)]$; $\hat{w}^T = [\hat{w}(0), \hat{w}(1), \dots, \hat{w}(p)]$ 是被估计的参数权矢量, $p+1$ 维. 求出 $J(k)$ 的梯度: $g(k) = \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{w}} = \frac{2}{L} \sum_{t=k-L+1}^k [C^T(t)C(t)\hat{w} - C^T(t)c(t)]$. 记 $\Phi(k) = \sum_{t=k-L+1}^k C^T(t)C(t)$, $\theta(k) = \sum_{t=k-L+1}^k C^T(t)c(t)$, 则有 $\Phi(k) = \Phi(k-1) + C^T(k)C(k) - C^T(k-L)C(k-L)$, $\theta(k) = \theta(k-1) + C^T(k)c(k) - C^T(k-L)c(k-L)$. 由最速下降法^[8] 即得到权系数向量 $w(k)$ 的自适应估计公式: $\hat{w}(k+1) = \hat{w}(k) - \mu g(k)$.

为保证算法收敛, 步长因子 μ 的选择应满足 $0 < \mu < 1/\lambda_{\max}$, λ_{\max} 是自相关矩阵 (此处对应 $\Phi^T(k)\Phi(k)$) 的最大特征值. 算法的收敛速度取决于自相关矩阵的条件数, 条件数越大, 算法收敛就越慢. 事实上 $0 < \mu < 1/\lambda_{\max}$ 是采用固定步长时的范围. 若 μ 取变步长, 通过线性寻优^[8], 则每次迭代的最优步长是: $\mu(k) = g^T(k)g(k)/[g^T(k)\Phi(k)g(k)]$.

又由于三阶样本累积量估计可递推更新如下^[9]:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{3uyy}(m, n; k) &= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-\tau} \beta^{k-i} u(i)y(m+i)y(n+i) \\
&= \frac{1}{k} [(k-1)\beta\tilde{c}_{3uyy}(m, n; k-1) + u(k-\tau)y(k-\tau+m)y(k-\tau+n)]; \\
\tilde{c}_{3y}(m, n; k) &= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-\tau} \beta^{k-i} y(i)y(m+i)y(n+i) \\
&= \frac{1}{k} [(k-1)\beta\tilde{c}_{3y}(m, n; k-1) + y(k-\tau)y(k-\tau+m)y(k-\tau+n)];
\end{aligned}$$

其中 $\tau = \max(0, m, n)$, β 为遗忘因子, 且 $0 < \beta \leq 1$. 对于平稳情况 $\beta = 1$, 对于非平稳 $\beta < 1$. 被估计的三阶样本累积量有如下统计特性^[9]:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{c}_{3uyy}(m, n; k) = c_{3uyy}(m, n), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{c}_{3y}(m, n; k) = c_{3y}(m, n)$$

故 $C(k)$, $c(k)$ (初始值取为零矩阵) 可由样本累积量估计递推更新, 由此我们得到新的自适应滤波算法 (见表 1):

表 1 本文算法及其计算量

每次迭代过程的计算公式	计算量 (乘除法次数)
$\Phi(k) = \Phi(k-1) + C^T(k)C(k) - C^T(k-L)C(k-L)$	$2(M \times N)(p+1)^2$
$\theta(k) = \theta(k-1) + C^T(k)c(k) - C^T(k-L)c(k-L)$	$2(M \times N)(p+1)$
$g(k) = 2(\Phi(k)\hat{w}(k) - \theta(k))$	$(p+1)^2 + (p+1) + 1$
$\mu(k) = \frac{g^T(k)g(k)}{g^T(k)\Phi(k)g(k)}$	$(p+1)^2 + 2(p+1) + 1$
$\hat{w}(k+1) = \hat{w}(k) - \mu(k)g(k)$	$p+1$
总的计算量	$(2(M \times N) + 2)(p+1)^2 + (2(M \times N) + 4)(p+1) + 2$

文献 [7] 的 CRLS 算法每次迭代过程的计算公式和乘除法次数如表 2:

表 2 CRLS 算法及其计算量

每次迭代过程的计算公式	计算量 (乘除法次数)
$K(k) = [\beta I + P(k-1)C^T(k)C(k)]^{-1}P(k-1)C^T(k)$	$\frac{1}{6}(p+1)^3 + (3(M \times N) + 1)(p+1)^2$
$P(k) = \beta^{-1}P(k-1) - \beta^{-1}K(k)C(k)P(k-1)$	$(2(M \times N) + 1)(p+1)^2 + 1$
$\hat{w}(k) = \hat{w}(k-1) + K(k)\alpha(k)$	$(M \times N)(p+1)$
$\alpha(k) = c(k) - C(k)\hat{w}(k-1)$	$(M \times N)(p+1)$
总的计算量	$\frac{1}{6}(p+1)^3 + (5(M \times N) + 2)(p+1)^2 + (M \times N)(p+1) + 1$

注: β 是遗忘因子, I 是单位矩阵.

在本文算法和 CRLS 算法中, 都涉及到 $C(k)$, $c(k)$ 的估计递推更新, 这部分的计算量, 两个算法是相同的, 表 1, 表 2 中的计算量并不包括这部分的计算量. 从这两个表中可知本文算法的计算量要少于 CRLS 算法的计算量.

3 算法的计算机模拟仿真结果

下面以两个仿真例子来检验我们给出的自适应滤波算法的收敛性能. 计算机模拟仿真条件: 系统输入序列 $\{u(k)\}$ 是零均值、方差为 1、偏度为 2 的指数独立同分布的随机序列, 数据长度为 400. 干扰噪声为零均值的高斯白噪声, 信噪比为 35. 10 次独立仿真的统计平均. M, N (被估计的三阶累积量的支撑区域) 均为 10. 数据窗口宽度 $L = 5$, 系数误差 $10 \log_{10}(\|\hat{w} - w^*\|/\|w^*\|)$ 作为算法收敛的性能指标.

3.1 三阶非最小相位 MA 模型

三阶非最小相位 MA 模型是 $y(k) = u(k) + 0.9\mu(k-1) + 0.385u(k-2) - 0.771u(k-3)$, 其零点为 0.6 和一对共轭复零点 $-0.75 \pm j0.85$. 系统输出 $\{d(k)\}$ 是 MA 模型输出 $\{y(k)\}$ 和高斯噪声 $\{n(k)\}$ 之和: $d(k) = y(k) + n(k)$, 信噪比为 35. 在平稳情况下, 遗忘因子 β 设置为 1. 图 1 是本文算法参数的自适应估计曲线. 图 2 是本文算法和 CRLS 算法收敛曲线比较. 400 个样本点时各参数的估计值 (均值 \pm 标准差): 本文算法: $w(0): 0.9987 \pm 0.0002, w(1): 0.8994 \pm 0.0005, w(2): 0.3841 \pm 0.0005, w(3): -0.7766 \pm 0.0015$; CRLS: $w(0): 0.9984 \pm 0.0014, w(1): 0.8988 \pm 0.0010, w(2): 0.3828 \pm 0.0016, w(3): -0.7716 \pm 0.0014$.

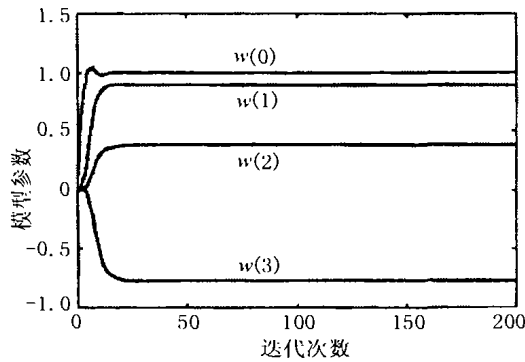


图 1 本文算法参数的自适应估计曲线

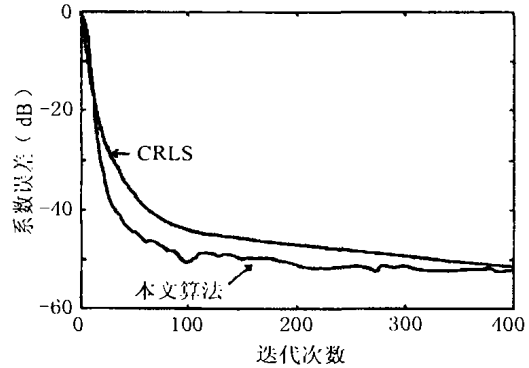


图 2 本文算法和 CRLS 算法收敛曲线比较

3.2 非平稳二阶 MA 模型

非平稳二阶 MA 模型是 $y(k) = b(0)u(k) + b(1)u(k-1) + b(2)u(k-2)$ ，其中： $b(0) = -0.3$ ， $b(1) = 1.0$ ， $b(2) = -0.7$ ；在输入数据长度的一半 (200) 时，系统发生时变，系数矢量变为 $b(0) = -1.3$ ， $b(1) = 0.61$ ， $b(2) = 0.3$ 。在非平稳情况下，遗忘因子 β 设置为 0.95。图 3 是本文算法参数的自适应估计曲线。图 4 是本文算法和 CRLS 算法收敛曲线比较。400 个样本点时各参数的估计值 (均值 \pm 标准差)：本文算法： $w(0) : -1.2957 \pm 0.0043$ ， $w(1) : 0.6148 \pm 0.0048$ ， $w(2) : 0.3044 \pm 0.0044$ ；CRLS： $w(0) : -1.2883 \pm 0.0117$ ， $w(1) : 0.6254 \pm 0.0154$ ， $w(2) : 0.3059 \pm 0.0059$ 。

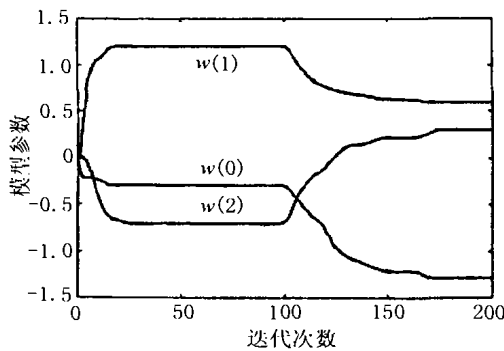


图 3 本文算法参数的自适应估计曲线

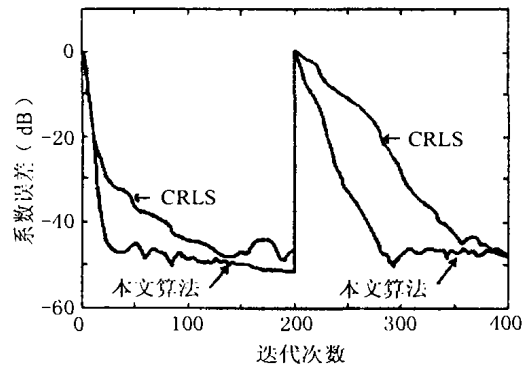


图 4 本文算法和 CRLS 算法收敛曲线比较

4 结论

文献 [7] 的作者在给出了基于三阶累积量的“优度准则”的基础上，由矩阵求逆定理，得到了基于三阶累积量的 CRLS 算法，该算法有良好的收敛性能。但是，在 CRLS 算法的每次迭代过程中，含有矩阵求逆运算，这使得算法的计算量增大，这是 CRLS 算法的不足。本文基于文献 [2,5] 给出的基于三阶累积量的自适应滤波算法结构，提出了一个新的基于三阶累积量的“优度准则”： $J(k) = \frac{1}{L} \sum_{i=k-L+1}^k \sum_m \sum_n [\sum_{i=0}^p \hat{w}(i) c_{3uyy}(m+i, n+i; t) - c_{3y}(m, n; t)]^2$ 。由此准则，利用最速下降法，我们导出了一种新的基于三阶累积的梯度型自适应滤波算法，这一新的算法在每次迭代过程中并不含有矩阵求逆运算，计算量比 CRLS 算法的计算量少。该算法用

于平稳和非平稳的 MA 模型系统辨识的计算机模拟仿真结果表明: 该算法有良好的收敛性能及对时变系统的跟踪能力。

参 考 文 献

- [1] B. Friedlander, B. Porat, Asymptotically optimal estimation of MA and ARMA parameters of non-Gaussian processes from high-order moments, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 1993, 35(1), 25-37.
- [2] H. H. Chiang, C. L. Nikias, A new method for adaptive time delay estimation for non-Gaussian signals, *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, 38(2), 209-219.
- [3] C. Y. Chi, W. J. Chang, New higher-order statistics based criterion for the design of linear prediction error filters, *Proc. IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics*, South Lake Tahoe, CA, June 7, 1993, 106-110.
- [4] C. Y. Chi, W. J. Chang, C. Febg, A new algorithm for the design of linear prediction error filters using cumulant-based MSE criterion, *IEEE Trans. on SP*, 1994, 42(10), 2876-2880.
- [5] D. C. Shin, C. L. Nikias, Adaptive interference canceler for narrowband/wideband interferences using higher-order statistics, *IEEE Trans. on SP*, 1994, 42(10), 2715-2728.
- [6] Yuan-Hwang Chen, Jyh-Jeng Lou, A new higher-order cumulant-based criterion for adaptive interference cancelling, *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, New York, USA, 1997, Vol.4, 2434-2437.
- [7] W. S. Chow, Gou Fei, Siu-yeung Cho, Higher order cumulants-based least squares for nonminimum-phase systems identification. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 1997, 44(5), 707-716.
- [8] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, MA: Addison-Wesley. 1984, Chapter 2.
- [9] C. L. Nikias, A. Petropouou, *Higher-Order Spectra Analysis, A Nonlinear Signal Processing Framework*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989, 124-125.

A THIRD-ORDER CUMULANT-BASED CRITERION AND ADAPTIVE FILTERING ALGORITHM

Gao Ying* ** Xie Shengli*

**(Dept. of Electron. and Comm. Eng., South China Univ. of Tech., Guangzhou 510641, China)*

*** (Dept. of Computer Science., Guangzhou University, Guangzhou 510405, China)*

Abstract This paper proposes a third-order cumulant-based "criterion of goodness", and gives a third-order cumulant-based gradient-type adaptive filtering algorithm by using the steepest descent method on the criterion. The algorithm is applied to identify stationary and non-stationary MA (Moving Average) model by computer simulation. Simulation results indicate that the algorithm has better convergence property as well as the tracking capability for time varying system.

Key words Third-order cumulants, Criterion of goodness, Steepest descent method

高 鹰: 男, 1963 年生, 博士生, 副教授, 主要研究方向: 自适应信号处理, 计算机辅助几何设计等, 已发表论文十余篇。

谢胜利: 男, 1956 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域: 自适应回波消除、滞后分布参数系统、滞后 2D 离散系统的稳定与变结构控制、非线性系统学习控制、机器人系统等。