一种解决约束优化问题的模糊粒子群算法

魏静萱[①]　　王宇平[②]
[①](西安电子科技大学数学科学系　西安 710071)
[②](西安电子科技大学计算机学院　西安 710071)

摘　要：该文针对复杂约束优化问题，提出了一种模糊粒子群算法(FPSO)，设计了一个新的扰动算子，在此基础上定义了模糊个体极值和模糊全局极值，利用这两个定义改进了粒子群进化的方程，利用该方程更新粒子的速度与位置，可以避免早熟收敛问题；定义了不可行度阈值，利用此定义给出了新的粒子比较准则，该准则可以保留一部分性能较优的不可行解微粒。用概率论的有关知识证明了算法的收敛性。仿真结果表明，对于复杂约束优化问题，算法寻优性能优良，特别是对于超高维约束优化问题，该算法获得了更高精度的解。

关键词：粒子群算法；约束优化；模糊个体极值；模糊全局极值
中图分类号：TP301.6　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2008)05-1218-04

Fuzzy Particle Swarm Optimization for Constrained Optimization Problems

Wei Jing-xuan[①]　　Wang Yu-ping[②]
[①](*Department of Mathematics Science*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)
[②](*School of Computer Science and Technology*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)

Abstract: A fuzzy particle swarm optimization is proposed for solving complex constrained optimization problems. Firstly, a new perturbation operator is designed, and the concepts of fuzzy personal best value and fuzzy global best value are given based on the new operator. Particle updating equations are revised based upon the two new concepts to discourage the premature convergence. Secondly, a new comparison strategy is proposed based on the new concept of infeasible threshold value. It can preserve some infeasible solutions with high quality. Finally, the convergence of this algorithm is proved. The simulation results show that the proposed algorithm is effective, especially for the problems with high dimensions.

Key words: Particle Swarm Optimization (PSO); Constrained optimization; Fuzzy personal best value; Fuzzy global best value

1　引言

微粒群算法(PSO)是 Kennedy 与 Eberhart 于 1995 年提出的一种新型智能群体计算方法[1, 2]，其源于对鸟类觅食行为的研究。目前粒子群优化算法已经成功地应用于系统识别[3]，神经网络训练[4]等领域，但是将 PSO 应用于复杂约束优化问题特别在超高维约束优化问题中的研究还很少[5−7]。

在科学研究中，许多问题最终都归结为带有约束的函数优化问题：

$$\left.\begin{aligned}&\min_{x\in S\subseteq R^n} f(x)\\ &\text{s.t.}\ \ g_j(x)\le 0,\quad j=1,2,\cdots,m\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

这里，S 为目标函数的搜索空间，由于等式约束可以转化成相应的不等式约束，故式(1)只给出了不等式约束。

本文通过模糊个体极值和模糊全局极值的定义，改进了粒子群进化的方程，利用该方程更新粒子的速度与位置，不仅避免了早熟收敛问题而且扩大了群体的搜索范围；重新定义了粒子比较准则，该准则可以保留一部分性能较优的不可行解微粒，使微粒能快速的找到位于约束边界或附近的最优解。仿真结果表明对于复杂约束优化问题，该算法寻优性能优良。

2　模糊粒子群算法

2.1 PSO 的基本原理

PSO(粒子群优化算法)是 Kennedy 和 Eberhart 发明的一种新的全局优化进化算法，它源于对鸟类捕食行为的模拟[1,2]。标准粒子群算法的进化方程为

$$\begin{aligned}V(t+1)=\omega V(t)&+c_1\text{rand}(\text{pbest}(t)-x(t))\\&+c_2\text{rand}(\text{gbest}(t)-x(t))\end{aligned}\tag{2}$$

2007-05-08 收到，2007-12-25 改回
国家自然科学基金(60374063)资助课题

$$x(t+1)=x(t)+V(t+1) \tag{3}$$

在每一次迭代中，粒子通过跟踪两个“极值”来更新自己：一个是粒子本身所找到的最优位置，即个体极值 pbest；另一个是整个群体目前所找到的最优位置，即全局极值 gbest，其中第 i 个粒子表示为一个 n 维向量 $\boldsymbol{x}_i=(\boldsymbol{x}_{i1},\boldsymbol{x}_{i2},\cdots,\boldsymbol{x}_{in})$，即第 i 个粒子的位置是 x_i，每个粒子代表一个潜在的解。V 是粒子速度，rand 是[0,1]之间的随机数，c_1,c_2 为学习因子，ω 为惯性权重。

2.2 模糊个体极值和模糊全局极值的提出

在用粒子群算法解决函数优化问题时，主要面临以下两个问题：

(1)当全局极值 gbest 或个体极值 pbest 位于局部最优点时，粒子群就无法在解空间内重新搜索，其它粒子将迅速向局部最优解靠拢，算法出现早熟收敛现象。

(2)粒子群算法搜索模式的单一性(粒子群算法中仅利用了全局极值点的信息，没有考虑其它点的信息，粒子产生的方式比较单一)，不利于保持种群多样性，扩大搜索范围。

基于以上问题的提出，本文对个体极值及全局极值以概率 p_{r1} 进行一次扰动，然后再以概率 p_{r2} 进行二次扰动，将扰动后的新位置 fpbest (模糊个体极值)及 fgbest (模糊全局极值)作为粒子的新寻优方向。在本文中粒子的进化方向不再确定而是以一定的概率进行变化(模糊全局极值和模糊个体极值作为粒子的进化方向)。进化方向由确定转为不确定体现了算法的模糊化思想。具体步骤如下：假设 y 是进行扰动操作的一个点：

(1)对 y 进行一次扰动后所得点为 $fy_1=y+\lambda\dfrac{F(y)}{\|F(y)\|}$，其中 $\lambda\in(0,1)$ 为点 y 沿着方向 $\dfrac{F(y)}{\|F(y)\|}$ 所走的步长。$F(y)=\sum\limits_{i=1}^{N}F_i$，$F_i$ 由下式确定：

$$F_i=\begin{cases}\dfrac{x_i-y}{\|x_i-y\|}\dfrac{C-\mathrm{IF}(x_i)}{f(x_i)}, & \mathrm{IF}(x_i)<\mathrm{IF}(y)\\ \dfrac{y-x_i}{\|x_i-y\|}\dfrac{C-\mathrm{IF}(x_i)}{f(x_i)}, & \mathrm{IF}(y)\le\mathrm{IF}(x_i)\end{cases} \tag{4}$$

其中 $\mathrm{IF}(x)$ 为约束违反度函数，定义 $\mathrm{IF}(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\max(0,g_j(x))$; x_i 为当前群体中第 i 个粒子的位置且令 $x_i\ne y$，$i=1,2\cdots N$；N 为群体规模；C 为正常数，一般取值较大，令 C=10000。由式(4)可以看出，点 y 的移动方向是由当前群体中的所有粒子共同决定的，且该方向偏向于约束违反度较小或目标函数值较小的粒子所在位置。因此，沿着该方向进行扰动应该得到更好的点。

(2)为了避免 y 一直沿着某一方向进行扰动，对第一次扰动后所得点 fy_1 进行第二次扰动。将 fy_1 的第 i 维子空间 $[l_i,u_i]$ 分成若干子区间 $[\omega_1^i,\omega_2^i],\cdots[\omega_{n_i-1}^i,\omega_{n_i}^i]$，使得 $|\omega_j^i-\omega_{j-1}^i|<\varepsilon$，$j=2,\cdots n_i$，$\varepsilon$ 为任意小正数，随机产生一数 $\delta\in(0,1)$，若 $\delta<p_{r2}$，随机在 $\{\omega_1^i,\omega_2^i\cdots\omega_{n_i}^i\}$ 中选一个 ω_j^i 作为 fy_1 的第 i 维子空间的取值。

于是粒子群进化方程变为

$$V(t+1)=\omega V(t)+c_1\mathrm{rand}(\mathrm{fpbest}(t)-x(t)) + c_2\mathrm{rand}(\mathrm{fgbest}(t)-x(t)) \tag{5}$$

$$x(t+1)=x(t)+V(t+1) \tag{6}$$

2.3 模糊粒子群算法中的粒子比较准则

2.3.1 定义不可行度阈值　为了逐步增加满足约束的压力，使搜索向可行域方向靠近，首先定义不可行度阈值：

$$\varphi=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{IF}(x_i)\Big/N \tag{7}$$

其中 $1/T$ 为退火因子，随着迭代进行，T 由 T_{start} 变为 T_{end}；x_i 为当前群体中第 i 个粒子的位置；N 为群体规模。在每一步进化中，通过每一个候选解的约束违反度与不可行度阈值的比较来决定该解是可接受的还是不可接受的。

当一个不可行解的约束违反度大于不可行度阈值时，该解为不可接受的；否则，该解为可接受的。

2.3.2 新的粒子比较准则　考虑到一大类约束优化问题，其最优解位于约束边界或附近，对于这类问题，让一部分可接受的不可行解与可行解按照目标函数值来进行比较，以便在群体中保留一部分性能较优的不可行解微粒。本文采用下列比较准则：

(1)当两个粒子都是可行粒子时，比较它们的目标函数值，目标函数值小的个体为优。

(2)当两个粒子都为不可行粒子时，比较它们的约束违反度，违反度小的粒子为优。

(3)当一个粒子可行而另一个粒子不可行时，如果不可行粒子是可接受的，则比较它们的目标函数值，函数值小的粒子为优。

2.4 模糊粒子群算法(FPSO)的流程

本文所提出的新算法是在粒子群算法的基础上，通过对个体极值和全局极值的二次扰动产生新的寻优方向，算法的具体步骤如下：

步骤 1　随机初始化粒子群中粒子的位置与速度；

步骤 2　将粒子的 pbest 设置为当前位置，gbest 设置为初始群体中最佳粒子的位置；

步骤 3　判断算法停止准则是否满足，如果满足，转向步骤 8；否则执行步骤 4；

步骤 4　对于粒子群中的所有粒子，执行如下操作：

(1)产生随机数 $r\in(0,1)$，如果 $r<p_{r1}$，则对个体极值 pbest 及全局极值 gbest 按照 2.1 节所述方法进行扰动，得到 fpbest 及 fgbest，否则令 fpbest=pbest; fgbest=gbest。

(2)根据式(5)，式(6)更新粒子的速度与位置。

步骤 5　按照 2.2.2 节所述粒子比较准则更新每个粒子的 pbest；

步骤 6　更新所有粒子经历过的最好位置，即全局极值

gbest.（如果可行粒子的目标函数值优于 gbest 的目标函数值， gbest 设置为新位置）；

步骤 7　判断算法停止准则是否满足，如果满足转向步骤 8;否则转向步骤 4；

步骤 8　输出 gbest，算法停止。

3　仿真实验

为了验证本文算法(FPSO)的有效性，选取文献[8]中的 10 个标准测试函数，并和目前公认的较好方法 RY [8], FSA [9], SAFF [10] 及标准粒子群算法(SPSO)进行比较。其中 SPSO: standard particle swarm algorithm, 标准粒子群算法；RY: stochastic ranking method，随机排序法；SAFF: self-adaptive fitness formulation method.；FSA: A genetic framework for constrained optimization using genetic algorithms。

为了比较公平，本文算法与标准粒子群算法选取相同的参数：种群规模 200， $c_1 = c_2 = 2.0$, $\omega = 0.4$ 最大进化代数 600；此外，本文算法中的其它参数通过实验得到：$T_{\rm start}$=0.8; $T_{\rm end} = 3$；例 1 中 $p_{r1} = 0.6, p_{r2}$=0.6；例 2 到例 10 中 p_{r1}=0.6, $p_{r2} = 0.1$。等式约束的违反度为 0.0001。对每个函数独立运行 30 次，记录其最好值，最差值和平均值。所有数据见表 1，第 1 列方括弧内数据表示文献及该例在文献内的序号。

由表 1 可以看出，对于例 4，例 6，例 7，例 9 和例 10，FPSO 算法均求出了最优性结果，而且在约束违反度允许的情况下，对于例 9，本文算法得到的最优值优于已知的最优值。对于例 1(超高维约束问题)，本文算法虽然没有得到最优值，但是所得结果与最优值的误差不是很大，而且在平均值和最差值方面均要优于其它 4 种算法，尤其优于标准粒子群算法(在最优值，平均值，最差值方面)。对于例 2，本文所得结果与最优值十分接近，而且平均值和最差值都要优于标准粒子群算法。对于例 3，本文算法与标准粒子群算法得

表 1 各方法的计算结果比较

函数序号及最优值		FPSO	SPSO	RY	SAFF	FSA
例 1[8,g02]	最优值	−0.803495	−0.669158	−0.803515	−0.80297	−0.754913
−0.803619	平均值	−0.787783	−0.419960	−0.781975	−0.79010	−0.371708
	最差值	−0.762800	−0.299426	−0.726288	−0.76043	−0.271311
例 2[8, g03]	最优值	−0.99995	−0.993930	−1.000	−1.000	−1.000
−1.000	平均值	−0.99648	−0.764813	−1.000	−1.000	−0.999
	最差值	−0.99302	−0.464009	−1.000	−1.000	−0.992
例 3[8,g04]	最优值	−30664	−30664	−30665.539	−30665.50	−30665.538
−30665.539	平均值	−30664	−30664	−30665.539	−30665.20	−30665.467
	最差值	−30664	−30664	−30665.539	−30663.30	−30664.688
例 4[8,g06]	最优值	−6961.814	−6961.814	−6961.814	−6961.800	−6961.814
−6961.814	平均值	−6961.808	−6955.977	−6875.940	−6961.800	−6961.814
	最差值	−6961.795	−6951.423	−6350.262	−6961.800	−6961.814
例 5[8,g07]	最优值	24.9229	24.9232	24.307	24.48	24.311
24.306	平均值	24.9439	32.4072	24.374	26.58	24.380
	最差值	24.9649	56.0547	24.642	28.40	24.644
例 6[8,g08]	最优值	−0.095825	−0.095825	−0.095825	−0.095825	−0.095825
−0.095825	平均值	−0.095825	−0.095825	−0.095825	−0.095825	−0.095825
	最差值	−0.095825	−0.095825	−0.095825	−0.095825	−0.095825
例 7[8,g09]	最优值	680.630057	680.630057	680.630	680.640	680.630
680.630	平均值	680.630057	680.630100	680.656	680.720	680.636
	最差值	680.630057	680.631353	680.763	680.870	680.698
例 8[8,g10]	最优值	7059.7	7059.7	7054.316	7061.34	7059.864
7049.248	平均值	7220.0	7225.4999	7559.192	7627.89	7509.321
	最差值	7380.4	7849.812453	8835.655	8288.79	9398.649
例 9[8,g11]	最优值	0.7498	0.7498	0.750	0.750	0.750
0.75	平均值	0.7498	0.7498	0.750	0.750	0.750
	最差值	0.7498	0.7498	0.750	0.750	0.750
例 10[8,g12]	最优值	−1.000	−1.000	−1.000	−1.000	−1.000
−1.000	平均值	−1.000	−1.000	−1.000	−1.000	−1.000
	最差值	−1.000	−1.000	−1.000	−1.000	−1.000

到了一样的结果。对于例 5，本文算法得到的平均值和最差值均要优于标准粒子群算法和 SAFF 算法。对于例 8，本文算法与标准粒子群算法得到了同样的最优值，而且本文算法在平均值和最差值方面均要优于 RY, SAFF 及 FSA 算法。由以上分析可知，本文算法用较少的函数评估次数就可以得到较好的最优值。

4 收敛分析

定义 1　对 $\forall x,x' \in S$ 若 $P\{||\mathrm{MC}(x)-x'||_\infty \le \varepsilon\} > 0$, 则称 x' 是 x 通过进化为 ε 精度可达的。在本文中 $\mathrm{MC}(x)$为一次扰动和二次扰动后所得点。

引理 1　若一个算法满足下面两个条件[11, 12]

(1)对可行域中任意两个点 x' 和 x ， x' 是 x 通过进化为 ε 精度可达的。

(2)算法采用精英保留策略，即最优个体是单调的。

则算法以概率 1 收敛到具有 ε 精度的全局最优解。

定理 1　对充分小的 $\varepsilon>0$，若 $f(x)$ 在搜索空间上连续，则本文算法(FPSO)以概率 1 收敛到问题(1)的具有 ε 精度的最优解。结合引理 1 及文献[13]可证。

5 结束语

本文通过模糊个体极值和模糊全局极值的定义，改进了粒子群进化的新方程，利用该方程更新粒子的速度与位置，不仅避免了早熟收敛问题而且扩大了群体的搜索范围；为了将粒子群拉向约束边界，加强对约束边界的搜索，重新定义了粒子比较准则，该准则可以保留一部分性能较优的不可行解微粒。仿真结果表明，对于复杂约束优化问题，本文算法寻优性能优良。

参 考 文 献

[1] Kennedy I and Eberhart R C. Particle swarm optimization [A]. Proc. IEEE Int. Conf. On Neural Networks [C]. Perth, WA, Australia, 1995: 1942-1948.

[2] Shi Y and Eberhart R C. A modified swarm optimizer [A]. IEEE international conference of Evolutionary Computation [C]. Anchorage, Alaska, 1998: 125-129.

[3] Voss M S and Feng Xin. A RMA model selection using particle swarm optimization and AIC criteria [A]. 15th Triennial World Congress [C]. Barcelona, Spain: IFAC, 2002: 41-45.

[4] Bergh F and Engelbrecht A P. Cooperative learning in neural networks using particle swarm optimizers [J]. *South African computer Journal*, 2000, 11(6): 84-90.

[5] Andrews P S. An investigation into mutation operators for particle swarm optimization [A]. Proceeding of the 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation[C], Canada, 2006: 1044-1051.

[6] 李炳宇, 萧蕴诗, 吴启迪. 一种基于微粒群算法求解约束优化问题的混合算法[J]. 控制与决策, 2004, 19(7): 804-807.
Li Bing-yu, Xiao Yun-shi, and Wu Qi-di. Hybrid algorithm based on particle swarm optimization for solving constrained optimization problems [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(7): 804-807.

[7] 于繁华, 杨威, 张利彪. 基于模糊的多目标粒子群优化算法及应用[J]. 计算机仿真, 2007, 24(2): 153-156.
Yu Fan-hua, Yang-Wei, and Zhang Li-biao. An optimization arithmetic for multi-objective particle swarm based on fuzziness and its application[J]. *Simulation of Computer*, 2007, 24(2): 153-156.

[8] Runarsson T P and Yao X. Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization [J]. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2000, 4(3): 284-294.

[9] Venkatraman S and Yen G G. A genetic framework for constrained optimization using genetic algorithms [J]. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2005, 9(4): 424-435.

[10] Farmani R and wright J A. Self-adaptive fitness formulation for constrained optimization [J]. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2003, 7(5): 445-455.

[11] Back T. Evolutionary Algorithms in Theory and Practice [M]. New York: Oxford University Press, 1996: 21-28.

[12] Rudolph G and Agapie A. Convergence properties of some multi-objective evolutionary algorithms [A]. Proceeding of the Congress on Evolutionary Computation[C], Piscataway, 2000: 1010-1016.

[13] 刘淳安, 王宇平. 约束多目标优化问题的进化算法及其收敛性[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(2): 276-280.
Liu Chun-an and Wang Yu-ping. Evolutionary algorithm for constrained multi-objective optimization problems and its convergence [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2007, 29(2): 276-280.

魏静萱：　女，1981 年生，博士生，研究方向为进化算法、最优化理论与方法、人工智能等.

王宇平：　男，1961 年生，教授，博士生导师，研究领域为进化算法、最优化理论、人工智能等.