文章编号：1000-6893(2008)03-0645-06

迭代动力缩聚法的收敛性分析

汪晓虹[1]，曹立娟[2]，刘慧[1]，陈怀海[2]
（1. 南京航空航天大学 理学院，江苏 南京　210016）
（2. 南京航空航天大学 航空宇航学院，江苏 南京　210016）

Convergence Analysis of Iterative Dynamic Condensation Methods

Wang Xiaohong[1]，Cao Lijuan[2]，Liu Hui[1]，Chen Huaihai[2]
（1. College of Science，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing　210016，China）
（2. College of Aerospace Engineering，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing　210016，China）

摘　要：利用 Lyapunov 矩阵方程和 Riccati 矩阵方程解的理论，对迭代动力缩聚法的收敛性进行了分析证明，并给出了迭代收敛的充分条件。揭示了动力缩聚法与经典的子空间迭代法的内在关系，阐明了各自的优缺点。迭代动力缩聚法实质上是子空间迭代法的变形，它需要人为选择主辅自由度，而子空间迭代法需要人为选定初始迭代向量。从理论上讲，只有主辅自由度选择满足收敛的充分条件要求，才能保证迭代结果收敛到理论上的精确解。给出了一个数值算例，对几种算法进行了对比，并验证了本文的论点。

关键词：动力缩聚；迭代法；矩阵方程；有限元法；建模

中图分类号：V214.1　　**文献标识码**：A

Abstract：Based on the theory of solution to the Lyapunov and Riccati matrix equations，in this paper an in-depth analysis of the convergence of iterative dynamic condensation methods is provided and the sufficient conditions for their convergence are introduced. The relationship between the iterative dynamic condensation methods and the classical subspace iterative method is uncovered. In fact，the iterative dynamic condensation methods are a transformed kind of the subspace iterative method. One must select the master and slave degrees of freedom in the iterative dynamic condensation algorithms or the initial iterative vectors in the subspace iterative algrithm. Theoretically，if the selection of the master and slave degrees of freedom meet the demand of the sufficient conditions，the iterative dynamic condensation algorithms will obtain an accurate result. A numerical example is presented in the end of the paper. The results by the various algorithms are compared，and the idea of the paper is verified.

Key words：dynamic condensation；iterative method；matrix equation；finite element method；modeling

在对大型复杂结构的振动控制、结构系统故障诊断和减振降噪及有限元模型修正等工作中，均会涉及到对大型结构的有限元模型进行降阶这一重要问题。继 Guyan[1] 和 Irons[2] 于 1965 年首先提出模型静力缩聚法后，人们又研究、发展了有限元模型动力缩聚法。O'Callahan[3] 于 1989 年首先提出了“改进的缩减系统(IRS)法”，这是一种在经典的 Guyan 静力缩聚法基础之上发展出的动力缩聚法，可以更有效地对动力学模型进行缩减。随后 Friswell 等对 IRS 法进行了更深入的研究[4-7]，进一步提出了迭代的改进缩减系统(IIRS)法，有效地提升了 IRS 法的计算精度。中国学者也在有关方面进行了卓有成效的研究工作[8-9]，其中 Qu 等提出的逆迭代动力缩聚法就是一种比较优秀的算法。随着动力缩聚法研究的不断深入，动力缩聚法所展现出的突出优点有可能使它们替代传统的基于子空间迭代的模型降阶或大型特征对计算法。尽管有些文献中已从迭代的角度对有关算法的收敛性进行了分析和验证[6,8]，但是，到目前为止，从矩阵方程求解的角度，对动力缩聚法收敛性进行严格论证的文章尚未见到。本文利用 Lyapunov 矩阵方程和 Riccati 矩阵方程解的理论，对迭代动力缩聚法的收敛性进行了分析证明，并给出了迭代收敛的充分条件，并对动力缩聚法与子空间迭代法之间的关系进行了分析，论述了动力缩聚迭代法与子空间迭代法各自的特点。通过一个数值例子，对几种计算方法进行了对比。

收稿日期：2008-01-17；**修订日期**：2008-04-07
基金项目：国家自然科学基金(10672078)；航空支撑科技基金(05D52009)；国家“863”计划(2006AA706103)
通讯作者：汪晓虹　E-mail：wxhnj@nuaa.edu.cn

1 动力缩聚法简介

假设结构有限元模型的总自由度为 n，结构的刚度矩阵和质量矩阵是 n 阶实对称、带状、正定矩阵，分别记为 $\boldsymbol{K},\boldsymbol{M}$。在结构固有振动分析中，需要求解如下大型广义特征值问题

$$\boldsymbol{KX} = \boldsymbol{MX\Lambda} \tag{1}$$

式中：固有振型矩阵 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n]$ 满足正交规范化条件

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{KX} &= \boldsymbol{\Lambda}\\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MX} &= \boldsymbol{I}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 为特征值矩阵，且 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$。通过适当地选取结构有限元模型的主、辅自由度，将其 n 个总自由度分为 m 个主自由度和 s 个辅自由度两部分，且 $m\ll s$。记 $\boldsymbol{\Lambda}_{mm}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$ 是式(1)的 m 个最小特征值矩阵，$\boldsymbol{X}_m=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{mm}\\ \boldsymbol{X}_{sm}\end{bmatrix}$ 是相应的特征向量矩阵，则针对主自由度，由式(1)可得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{mm} & \boldsymbol{K}_{ms}\\ \boldsymbol{K}_{sm} & \boldsymbol{K}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{mm}\\ \boldsymbol{X}_{sm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{mm} & \boldsymbol{M}_{ms}\\ \boldsymbol{M}_{sm} & \boldsymbol{M}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{mm}\\ \boldsymbol{X}_{sm}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{mm} \tag{3}$$

假设 $\boldsymbol{X}_{sm}=\boldsymbol{RX}_{mm}$，称 $\boldsymbol{R}$ 为动力缩聚矩阵，代入式(3)，可得到一个 m 阶的小型特征值问题[7]

$$\boldsymbol{K}_T\boldsymbol{X}_{mm} = \boldsymbol{M}_T\boldsymbol{X}_{mm}\boldsymbol{\Lambda}_{mm} \tag{4}$$

式中：$\boldsymbol{K}_T=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{KT}$；$\boldsymbol{M}_T=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MT}$；

并且 $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{R}\end{bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{X}_{mm}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_T\boldsymbol{X}_{mm} &= \boldsymbol{\Lambda}_{mm}\\ \boldsymbol{X}_{mm}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_T\boldsymbol{X}_{mm} &= \boldsymbol{I}_{mm}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由此可知，只要能确定 $\boldsymbol{R}$，则可由求解小型特征值问题式(4)获得大型特征值问题式(1)的前 m 个低阶特征对，从而实现对原系统的动力缩聚。

目前，对 $\boldsymbol{R}$ 的求解主要有 3 种方法。

1.1 IIRS 法[4-7]

由式(3)的第 2 行及 $\boldsymbol{X}_{sm}=\boldsymbol{RX}_{mm}$，可得

$$(\boldsymbol{K}_{sm}+\boldsymbol{K}_{ss}\boldsymbol{R})\boldsymbol{X}_{mm} = (\boldsymbol{M}_{sm}+\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{R})\boldsymbol{X}_{mm}\boldsymbol{\Lambda}_{mm} \tag{6}$$

联立式(4)和式(6)，得到 IIRS 法的迭代公式为

$$\boldsymbol{R}^{(i+1)}=\boldsymbol{R}^{(0)}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}(\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{R}^{(i)})\boldsymbol{X}_{mm}^{(i)}\boldsymbol{\Lambda}_{mm}^{(i)}(\boldsymbol{X}_{mm}^{(i)})^{-1} \quad (i=0,1,2,\cdots) \tag{7a}$$

也可写为

$$\boldsymbol{R}^{(i+1)} = \boldsymbol{R}^{(0)}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}(\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{R}^{(i)})(\boldsymbol{M}_T^{(i)})^{-1}\boldsymbol{K}_T^{(i)} \quad (i=0,1,2,\cdots) \tag{7b}$$

式中：$\boldsymbol{R}^{(0)}=-\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{K}_{ms}^{\mathrm{T}}$。

1.2 逆迭代动力缩聚法[8]

做分解：$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$，令

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{LD}^{1/2})^{-1}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{1/2})^{-1} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{mm} & \boldsymbol{C}_{ms}\\ \boldsymbol{C}_{sm} & \boldsymbol{C}_{ss}\end{bmatrix}$$

将式(1)改写为 $\boldsymbol{CX}_m=\boldsymbol{X}_m\boldsymbol{\Lambda}_m^{-1}$，从而得到逆迭代动力缩聚法的迭代公式为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{R}^{(i+1)} &= (\boldsymbol{C}_{sm}+\boldsymbol{C}_{ss}\boldsymbol{R}^{(i)})(\boldsymbol{C}_{mm}+\boldsymbol{C}_{ms}\boldsymbol{R}^{(i)})^{-1}\\ &\qquad (i=0,1,2,\cdots)\\ \boldsymbol{R}^{(0)} &= \boldsymbol{C}_{sm}\boldsymbol{C}_{mm}^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

1.3 动力缩聚完全迭代法[9]

由式(3)的第 1 行，得到

$$(\boldsymbol{M}_{mm}+\boldsymbol{M}_{ms}\boldsymbol{R})^{-1}(\boldsymbol{K}_{mm}+\boldsymbol{K}_{ms}\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{X}_{mm}\boldsymbol{\Lambda}_{mm}\boldsymbol{X}_{mm}^{-1} \tag{9}$$

联立式(6)和式(9)，得动力缩聚完全迭代法的迭代公式为

$$\boldsymbol{R}^{(i+1)} = \boldsymbol{K}_{ss}^{-1}[(\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{R}^{(i)})(\boldsymbol{M}_{mm}+\boldsymbol{M}_{ms}\boldsymbol{R}^{(i)})^{-1}\cdot(\boldsymbol{K}_{mm}+\boldsymbol{K}_{ms}\boldsymbol{R}^{(i)})-\boldsymbol{K}_{ms}^{\mathrm{T}}] \quad (i=0,1,2,\cdots) \tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{R}^{(0)}=-\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{K}_{ms}^{\mathrm{T}}$。

2 动力缩聚法的收敛性分析

目前，直接针对迭代方程式(7)、式(8)及式(10)从矩阵方程求解的角度进行收敛性分析的研究报道还未见到，本文主要针对该方面进行研究。

要计算 $\boldsymbol{R}$，首先需要式(11)～式(13)都有解。

$$\boldsymbol{R} =-\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{K}_{ms}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}(\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{R})\boldsymbol{X}_{mm}\boldsymbol{\Lambda}_{mm}\boldsymbol{X}_{mm}^{-1} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{C}_{sm}+\boldsymbol{C}_{ss}\boldsymbol{R})(\boldsymbol{C}_{mm}+\boldsymbol{C}_{ms}\boldsymbol{R})^{-1} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{K}_{ms}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_{ss}\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{R})\cdot(\boldsymbol{M}_{mm}+\boldsymbol{M}_{ms}\boldsymbol{R})^{-1}(\boldsymbol{K}_{mm}+\boldsymbol{K}_{ms}\boldsymbol{R}) \tag{13}$$

式(11)称为 Lyapunov 矩阵方程；式(12)称为非对称的 Riccati 矩阵方程；式(13)为阶数更高的关于 $\boldsymbol{R}$ 的矩阵方程。它们是否有解与 $\boldsymbol{R}$ 的系数矩阵的性质密切相关，需要满足一定的条件[10-12]。

注意到式(4)、式(6)及式(9)之间的关系，可知 IIRS 法和动力缩聚完全迭代法均有共同的另一迭代形式，即

$$\boldsymbol{R}^{(i+1)} = \boldsymbol{R}^{(0)}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}(\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{R}^{(i)})\boldsymbol{X}_{mm}^{(i)}\boldsymbol{\Lambda}_{mm}^{(i)}(\boldsymbol{X}_{mm}^{(i)})^{-1}$$

因此，仅研究 IIRS 法的迭代式(7)和逆迭代动力缩聚法的迭代式(8)的收敛性。

2.1 IIRS 法的收敛性分析

记 $\boldsymbol{Z}_{mm}=\boldsymbol{M}_{mm}^{-1}\boldsymbol{K}_{mm}$，则 $\boldsymbol{Z}_{mm}=\boldsymbol{X}_{mm}\boldsymbol{\Lambda}_{mm}\boldsymbol{X}_{mm}^{-1}$ 可将

式(11)改写为

$$\boldsymbol{R}-\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{R}\boldsymbol{Z}_{mm}=\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}(\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{mm}-\boldsymbol{K}_{ms}^{\mathrm{T}}) \quad (14)$$

更一般地,若记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss}=\boldsymbol{A}_s$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Z}_{mm}$, $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{K}^{-1}{}_{ss}(\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{mm}-\boldsymbol{K}_{ms}^{\mathrm{T}})$,则式(14)就是关于 $\boldsymbol{R}$ 的 Lyapunov 矩阵方程

$$\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{G} \quad (15)$$

定理 1[12]　矩阵方程 $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{G}$ 有唯一解,当且仅当 $\lambda_j/\mu_k\neq1$。其中 $1/\mu_1,\cdots,1/\mu_s$ 和 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值。

根据式(1)和式(3)的定义可知:矩阵对($\boldsymbol{K}$,$\boldsymbol{M}$)的 m 个最小特征值 $\lambda_j(j=1,\cdots,m)$,与矩阵对($\boldsymbol{K}_{ss}$,$\boldsymbol{M}_{ss}$)的特征值 $\mu_k(k=1,\cdots,s)$ 互不相同,则 $\lambda_j/\mu_k\neq1$。将式(14)与式(15)对照,由定理 1 可知式(14)有唯一解 $\boldsymbol{R}$。

定理 2[12]　给定矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{s\times s}$,$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$,$\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{C}^{s\times m}$,并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径满足 $\rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B})<1$,则矩阵方程 $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{G}$ 有唯一解 $\boldsymbol{R}=\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}^j$。

定理 3[13]　设矩阵 $\boldsymbol{K}$,$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}_{ss}$,$\boldsymbol{M}_{ss}$ 如式(1)和式(3)所示,广义特征值问题 $\boldsymbol{K\Phi}=\boldsymbol{M\Phi\Lambda}$ 及 $\boldsymbol{K}_{ss}\boldsymbol{\eta}=\mu\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{\eta}$ 的特征值分别为 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$ 和 $0<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_s$,则 $\lambda_j\leqslant\mu_j$, $\mu_{k-j+1}\leqslant\lambda_{n-j+1}$ $(j=1,\cdots,s)$。

定理 1~定理 3 为分析迭代式(7)产生的 $\boldsymbol{R}^{(i)}$ 能否收敛到精确的 $\boldsymbol{R}$ 做了理论上的准备。根据定理 2 知式(14)的解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}=&\boldsymbol{R}^{(0)}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{mm}+\boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{R}^{(0)}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{mm})\cdot\\&\boldsymbol{Z}_{mm}+\boldsymbol{A}_s^2(\boldsymbol{R}^{(0)}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{mm})\boldsymbol{Z}_{mm}^2+\cdots+\\&\boldsymbol{A}_s^{i-1}(\boldsymbol{R}^{(0)}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{mm})\boldsymbol{Z}_{mm}^{i-1}+\cdots\end{aligned} \quad (16)$$

然而,用迭代式(7)计算 i 步迭代,得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^{(i)}=&\boldsymbol{R}^{(0)}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}+\boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{R}^{(0)}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-2)})\cdot\\&\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}+\boldsymbol{A}_s^2(\boldsymbol{R}^{(0)}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-3)})\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-2)}\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}+\cdots+\\&\boldsymbol{A}_s^{i-1}(\boldsymbol{R}^{(0)}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{mm}^{(0)})\boldsymbol{Z}_{mm}^{(1)}\cdots\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-2)}\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}+\\&\boldsymbol{A}_s^i\boldsymbol{R}^{(0)}\boldsymbol{Z}_{mm}^{(0)}\boldsymbol{Z}_{mm}^{(1)}\cdots\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-2)}\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}\end{aligned} \quad (17)$$

定理 4　设矩阵 $\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss}$ 和 $\boldsymbol{Z}_{mm}^{(j)}$ 的谱半径满足 $\rho(\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss})\rho(\boldsymbol{Z}_{mm}^{(j)})<1$, $j=1,\cdots,i-1$,则迭代式

$$\boldsymbol{R}^{(i)}=\boldsymbol{R}^{(0)}+\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}(\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{R}^{(i-1)})\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)} \quad (18)$$

收敛;并且,当矩阵 $\boldsymbol{R}^{(i)}$ 收敛到精确动力缩聚矩阵 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{\Phi}_{sm}\boldsymbol{\Phi}_{mm}^{-1}$ 时,矩阵 $\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i)}$ 就收敛到式(4)的精确小型特征值问题解:$\boldsymbol{Z}_{mm}=\boldsymbol{\Phi}_{mm}\boldsymbol{\Lambda}_{mm}\boldsymbol{\Phi}_{mm}^{-1}$。反之,也对。

证明　因为 $\rho(\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss})\rho(\boldsymbol{Z}_{mm}^{(j)})<1$, $j=1,\cdots,i-1$,比较式(16)与式(17)的对应项,根据定理 2 可知迭代式(18)是收敛的。

下面证明定理的后两个结论。

用式(18)减去式(11),得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^{(i)}=&\boldsymbol{R}^{(i)}-\boldsymbol{R}=\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}-\boldsymbol{Z}_{mm})+\\&\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss}(\boldsymbol{R}^{(i-1)}\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}-\boldsymbol{R}\boldsymbol{Z}_{mm})=\\&\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}(\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{R})(\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}-\boldsymbol{Z}_{mm})+\\&\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss}(\boldsymbol{R}^{(i-1)}-\boldsymbol{R})\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}\end{aligned} \quad (19)$$

经移项、取范数,可知

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}(\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{R})(\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}-\boldsymbol{Z}_{mm})\|=\\&\|(\boldsymbol{R}^{(i)}-\boldsymbol{R})-(\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss}(\boldsymbol{R}^{(i-1)}-\boldsymbol{R})\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)})\|\leqslant\\&\|\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss}(\boldsymbol{R}^{(i-1)}-\boldsymbol{R})\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}\|+\|\boldsymbol{R}^{(i)}-\boldsymbol{R}\|\leqslant\\&\|\boldsymbol{R}^{(i-1)}-\boldsymbol{R}\|+\|\boldsymbol{R}^{(i)}-\boldsymbol{R}\|\end{aligned}$$

所以,当 $\|\boldsymbol{R}^{(i)}-\boldsymbol{R}\|\rightarrow0$ 时,就有 $\|\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}-\boldsymbol{Z}_{mm}\|\rightarrow0$。

反之,由条件 $\rho(\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss})\rho(\boldsymbol{Z}_{mm}^{(j)})<1$, $j=1,\cdots,i-1$ 及式(19)易推知

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{e}^{(i)}\|=\|\boldsymbol{R}^{(i)}-\boldsymbol{R}\|\leqslant\\&\|\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}(\boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{R})\|\,\|\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}-\boldsymbol{Z}_{mm}\|+\\&\|\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}\|\,\|\boldsymbol{R}^{(i-1)}-\boldsymbol{R}\|\end{aligned}$$

注意到 $\|\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss}\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}\|<1$,再由压缩映像原理知:当 $\|\boldsymbol{Z}_{mm}^{(i-1)}-\boldsymbol{Z}_{mm}\|\rightarrow0$ 时,就有 $\|\boldsymbol{R}^{(i)}-\boldsymbol{R}\|\rightarrow0$。

通过以上的分析可知:①设矩阵对($\boldsymbol{K}_{ss}$,$\boldsymbol{M}_{ss}$)的特征值为 $0<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_s$,矩阵 $\boldsymbol{Z}_{mm}$ 的特征值为 $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_m$,且 $\lambda_i/\mu_j<1$, $i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots,s$ 由定理 1 知矩阵方程式(12)有唯一解 $\boldsymbol{R}$。②要用 IIRS 法计算特征值问题式(1)的 p 个最小特征值 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_m$,需合理地选择结构有限元模型的主、辅坐标使得 $\lambda_m<\mu_1$,即 $\rho(\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss})\cdot\rho(\boldsymbol{M}_{mm}^{-1}\boldsymbol{K}_{mm})<1$。否则,由矩阵特征值分割定理 3 可知,定理 4 的条件不满足,则 IIRS 法迭代过程就可能不收敛到式(12)的解 $\boldsymbol{R}$。

2.2　逆迭代动力缩聚法的收敛分析

若迭代式(8)收敛,则矩阵方程 $\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{C}_{sm}+\boldsymbol{C}_{ss}\boldsymbol{R})(\boldsymbol{C}_{mm}+\boldsymbol{C}_{ms}\boldsymbol{R})^{-1}$ 一定有解。这是一非对称的代数 Riccati 方程,即

$$\boldsymbol{C}_{ss}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}\boldsymbol{C}_{mm}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{C}_{ms}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{C}_{sm} \quad (20)$$

式中:$\boldsymbol{C}_{mm}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$; $\boldsymbol{C}_{ms}\in\boldsymbol{R}^{m\times s}$; $\boldsymbol{C}_{sm}\in\boldsymbol{R}^{s\times m}$; $\boldsymbol{C}_{ss}\in\boldsymbol{R}^{s\times s}$。用有限元法建模,选主、辅自由度数 $m\ll s$,可知式(20)有以下特点:$\boldsymbol{C}_{ss}$ 通常是一个大型实对称带状矩阵;$\boldsymbol{C}_{mm}$ 是小型的实对称稠密矩阵;矩阵 $\boldsymbol{C}_{sm}=\boldsymbol{C}_{ms}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,但仅有少数的非零元素。

下面首先研究式(20)解的性质和有解的条件,然后分析研究动力缩聚逆迭代法的收敛性。

假设线性变换 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{C}_{ss}\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}_{mm}$,其中 $\boldsymbol{C}_{ss}\in\boldsymbol{R}^{s\times s}$, $\boldsymbol{C}_{mm}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$, $\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{R}^{s\times m}$,且 $\|\boldsymbol{C}_{ms}\|\neq0$ 及

$\| C_{sm} \| \neq 0$。

引理 若 R 是式(20)的解，则

(1) $\| R \| \neq 0$；

(2) $\min\limits_{Q\neq 0}\dfrac{\| T(Q) \|}{\| Q \|} \leqslant \dfrac{\| T(R) \|}{\| R \|} \leqslant \| C_{ms} \| \cdot \| R \| + \dfrac{\| C_{sm} \|}{\| R \|}$；

(3) 记 $\chi = \| C_{ms} \|$，$\gamma = \| C_{sm} \|$，$\varphi = \| R \|$，$\delta = \min\limits_{Q\neq 0}\dfrac{\| T(Q) \|}{\| Q \|}$，则 $\delta\varphi \leqslant \chi\varphi^2 + \gamma$；

(4) 当 $\delta^2 - 4\chi\gamma > 0$ 时，方程 $\chi\varphi^2 - \delta\varphi + \gamma = 0$ 有两个正实根：$\varphi_{1,2} = \dfrac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\chi\gamma}}{2\chi}$，且 $\| R \| \notin (\varphi_1, \varphi_2)$。

定理 5 设 $\delta^2 - 4\chi\gamma > 0$，$\delta > 0$，则在超球 $S(\varphi_1) = \{Q / \| Q \| \leqslant \varphi_1\}$ 中，式(20)有唯一解 R^*。

证明 因为对任意的 Q，有 $\delta > 0$，考虑如下的变换

$$W(Q) = \delta^{-1}(QC_{ms}Q - C_{sm})$$

易证 $W(Q)$ 是 $S(\varphi_1) \to S(\varphi_1)$ 的一个映射。设 $\forall Q_1, Q_2 \in S(\varphi_1)$，则

$$W(Q_1) - W(Q_2) = \delta^{-1}(Q_1C_{ms}Q_1 - Q_2C_{ms}Q_2) = \delta^{-1}[Q_1C_{ms}(Q_1 - Q_2) - (Q_1 - Q_2)C_{ms}Q_2]$$

取范数并注意到 $\delta = \chi(\varphi_1 + \varphi_2)$，有

$$\| W(Q_1) - W(Q_2) \| \leqslant \delta^{-1}(\| Q_1C_{ms} \| + \| C_{ms}Q_2 \|)\| Q_1 - Q_2 \| \leqslant \frac{\chi}{\delta}(\varphi_1 + \varphi_1)\| Q_1 - Q_2 \| = \frac{\varphi_1 + \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}\| Q_1 - Q_2 \|$$

因此，$W(Q)$ 是 $S(\varphi_1)$ 上的一个压缩映射，则式(20)有唯一解 $R^* \in S(\varphi_1)$。

因此，在满足定理 5 的条件下，式(12)有唯一解 R，下面就可给出用式(8)迭代求解的条件。

将式(1)改写为 $CX_m = X_m\Omega_m$，设矩阵 C 的特征值 $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_n > 0$，记 m 个最大特征值矩阵为 $\Omega_m = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_m)$，对应的正规化特征向量矩阵为 $X_m = \begin{bmatrix} X_{mm} \\ X_{sm} \end{bmatrix}$，

则有 $\begin{bmatrix} C_{mm} & C_{ms} \\ C_{sm} & C_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{mm} \\ X_{sm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{mm} \\ X_{sm} \end{bmatrix}\Omega_m$

记 $R = X_{sm}X_{mm}^{-1}$，由上式可推知

$$\begin{bmatrix} C_{mm} & C_{ms} \\ C_{sm} & C_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix}X_{mm}\Omega_mX_{mm}^{-1}$$

及 $\begin{bmatrix} C_{mm} & C_{ms} \\ C_{sm} & C_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix}(C_{mm} + C_{ms}R)$

因此，为了分析逆迭代动力缩聚式(8)的收敛性，可转换为研究式(21)的收敛性。

$$\left.\begin{aligned} & R^{(i+1)} = (C_{sm} + C_{ss}R^{(i)})(X_{mm}^{(i)}\Omega_m^{(i)}X_{mm}^{(i)-1})^{-1} \\ & \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots) \\ & R^{(0)} = C_{sm}C_{mm}^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

将迭代式(21)与 IIRS 法迭代式(7)比较，可知二者没有本质的区别，因此有类似的迭代收敛的条件，证明过程也完全类似。

3 子空间迭代法与动力缩聚法之间的关系

关于子空间迭代法与逆迭代动力缩聚法的关系，在文献[8]中有详细的讨论。下面仅就子空间迭代法与 IIRS 法的关系进行讨论。

将子空间迭代法中的迭代式 $KY_m^{(i+1)} = MX_m^{(i)}$ 按主、辅自由度分块，其中 $X_m^{(i)}$ 是经过 i 次迭代后得到的迭代向量矩阵，$Y_m^{(i+1)}$ 是待求的第 $i+1$ 次迭代向量矩阵，则

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{mm}^{(i+1)} \\ Y_{sm}^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{mm}^{(i)} \\ X_{sm}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{22}$$

由式(22)的第 2 行计算 $Y_{sm}^{(i+1)}$ 代入第 1 行，令

$$\begin{cases} X_{sm}^{(i)} = R^{(i)}X_{mm}^{(i)} \\ Y_{sm}^{(i+1)} = R^{(i+1)}Y_{mm}^{(i+1)} \end{cases}$$

可得

$$K_{mm}Y_{mm}^{(i+1)} + K_{ms}R^{(0)}Y_{mm}^{(i+1)} = (R^{(0)})^{\mathrm{T}}(M_{sm} + M_{ss}R^{(i)})X_{mm}^{(i)} + (M_{mm} + M_{ms}R^{(i)})X_{mm}^{(i)} \tag{23}$$

利用式(4)和式(5)，有

$$K_T^{(0)} = K_{ms} + K_{ms}R^{(0)} = (T^{(0)})^{\mathrm{T}}KT^{(0)}$$

$$M_R^{(i)} = M_{mm} + (R^{(0)})^{\mathrm{T}}M_{sm} + M_{ms}R^{(i)} + (R^{(0)})^{\mathrm{T}}M_{ss}R^{(i)} = (T^{(0)})^{\mathrm{T}}MT^{(0)}$$

则式(23)简化为

$$K_T^{(0)}Y_{mm}^{(i+1)} = M_R^{(i)}X_{mm}^{(i)} \tag{24}$$

假设 $Y_{mm}^{(i+1)}$ 可逆，联立式(24)和式(22)，消去 $Y_{mm}^{(i+1)}$ 项，便得到 IIRS 法的迭代式

$$R^{(i+1)} = R^{(0)} + K_{ss}^{-1}(M_{sm} + M_{ss}R^{(i)})(M_R^{(i)})^{-1}K_T^{(0)} \tag{25}$$

反之，用迭代式(25)计算 $R^{(i+1)}$，按 IIRS 法形成 $X_{sm}^{(i)} = R^{(i)}X_{mm}^{(i)}$，$Y_{sm}^{(i+1)} = R^{(i+1)}Y_{mm}^{(i+1)}$，满足子空间迭代式(22)，详情可参见文献[7]。

以上分析说明 IIRS 法实质上是子空间迭代法的一种变形形式，因此它具有子空间迭代法的收敛速度。动力缩聚法的主要优点有：不需要每个迭代步都求解一个小型特征值问题，并且其初始迭代向量具有解析表达式，很容易求取。但其弱点是尚未成为大型动力学分析软件的标准算法，未得到实践充分检验，计算中需要人为选择主、辅自由度[14-15]。相反，子空间迭代法已十分成熟，已有标准的算法，且获得了广泛应用，但该法在每个迭代步中均需求解一个小型特征值问题，计算效率相对较低，且初始迭代向量需人为选定，这对迭代收敛方向和效果有重要影响。一般认为，子空间迭代计算出的所有特征对中，仅前一半是可接受的，而动力缩聚法尚无此方面的共识，这是需要进一步研究的。

4　数值算例

如图 1 所示，某 6 层平面框架结构，其材料弹性模量 $E=2.1\times10^{10}$ N/m^2，质量密度 $\mu=7\ 830$ kg/m^3。每根杆件的截面均匀相同，截面积 $A=0.2$ m^2，截面惯性矩 $I=0.000\ 54$ m^4，采用 2 节点 6 自由度平面梁单元对该结构进行有限元建模，共划分 32 个节点、36 个单元、90 个自由度。现分别以 20，23，25，28，30 这 5 个节点处的水平自由度作为主自由度，其余 85 个自由度为辅助自由度，进行动力缩聚计算，该算例取自文献[8]。计算中共迭代了 4 次，在子空间迭代中，选取的初始迭代向量为 $\boldsymbol{X}_0=[\boldsymbol{e}_1\quad \boldsymbol{e}_2\quad \boldsymbol{e}_3\quad \boldsymbol{e}_4\quad \boldsymbol{e}_5]$，其中，$\boldsymbol{e}_i(i=1,\cdots,5)$ 为第 i 个元素为 1，其余 89 个元素为零的向量。计算结果见表 1 和表 2。

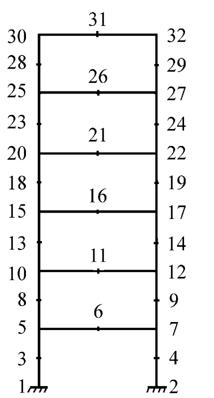

图 1　6 层平面框架及有限元模型节点划分示意图

Fig. 1　Six-story frame with defined finite element nodes

表 1　6 层框架前 6 阶固有频率计算结果对比　　（单位：rad・s^{-1}）

Table 1　First 6 natural frequencies of six-story frame by different methods　　（Unit：rad・s^{-1}）

方　法	固有频率阶次				
	1	2	3	4	5
全自由度有限元解	80.65	260.92	490.82	770.87	811.84
IIRS 法	80.65	261.01	496.15	799.00	865.26
逆迭代动力缩聚法	80.65	260.92	490.83	776.50	847.01
子空间迭代法	80.65	260.92	491.00	793.23	891.25

表 2　6 层框架前 6 阶固有频率计算结果相对有限元解误差对比　　（单位：%）

Table 2　Relative errors of first 6 natural frequencies of six-story frame by different methods　（Unit：%）

方　法	固有频率阶次				
	1	2	3	4	5
IIRS 法	0	0.03	1.09	3.65	6.58
逆迭代动力缩聚法	0	0	0	0.73	4.33
子空间迭代法	0	0	0.04	2.90	9.78

由表 1 和表 2 可以看出，若取主自由度数 $m=5$ 经 4 次迭代后，各种算法的前 3 阶计算的固有频率结果是可以接受的，这与子空间迭代法的已有结论是吻合的，但逆迭代动力缩聚法的收敛效果要优于其他方法。

以 IIRS 法为例，取不同的主自由度数，辅自由度数 $s=85$ 保持不变，迭代 4 次后，对收敛的充分性条件 $\rho(\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss})\rho(\boldsymbol{M}_{mm}^{-1}\boldsymbol{K}_{mm})<1$ 进行检验，结果如表 3 所示。

表 3　IIRS 法收敛性检验

Table 3　Convergence of IIRS method

谱半径积	自由度数 m				
	1	2	3	4	5
$\rho(\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss})\rho(\boldsymbol{M}_{mm}^{-1}\boldsymbol{K}_{mm})$	0.84	3.20	6.06	6.70	6.72

由表 3 可以看到，只有一阶固有频率的计算结果满足收敛的充分性条件，而其他阶未满足理论上收敛的绝对要求。从频率计算的绝对数值上也可以看到，IIRS 法迭代 4 次后一阶固有频率值为 80.652 954 506 909 rad/s，而全自由度有限元解的值为 80.652 949 446 267 rad/s，经四舍五入后，小数点后 5 位都相同，而此时其他各阶计算结果最多精确到小数点后 2 位相同。换句话说，上述迭代方式从理论上来讲可以保证一阶固有频率收敛到理论上的精确解，而其他各阶的计算结果则不能。不过从工程应用的角度而言，只要计算

结果收敛到一定的精度范围,就可以接受了。但从理论上讲,各种动力缩聚法在不满足收敛的充分性条件下所得到的降阶模型只能是近似的,不可能通过提高迭代次数的手段达到精确结果。

图 2 所示的是上述算例中,取主自由度数 $m=5$,在 IIRS 法迭代过程中谱半径积 $\rho(\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss})\cdot\rho(\boldsymbol{M}_{mm}^{-1}\boldsymbol{K}_{mm})$随迭代次数的变化关系。由图 2 可以看出,在迭代的初期,谱半径积下降速率很大,但中后期逐渐变缓,这也预示着迭代收敛的效率逐渐变低。

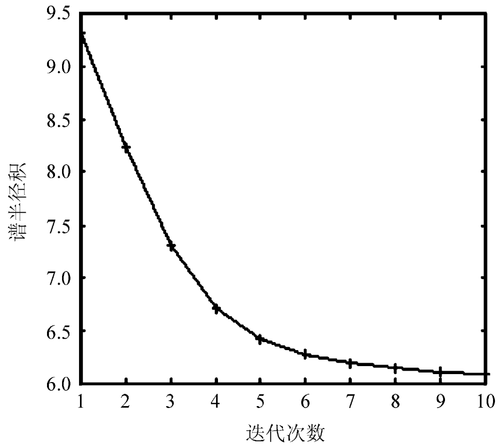

图 2　谱半径积 $\rho(\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss})\rho(\boldsymbol{M}_{mm}^{-1}\boldsymbol{K}_{mm})$随迭代次数变化曲线

Fig. 2　Curve of spectrum radius $\rho(\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{M}_{ss})\rho(\boldsymbol{M}_{mm}^{-1}\cdot\boldsymbol{K}_{mm})$ is iterative number

5　结　论

对动力缩聚法的收敛性进行了理论分析和证明,给出了算法收敛要满足的充分条件。从理论上讲,只有动力缩聚过程满足收敛的充分性条件,才能保证使迭代结果收敛到理论上的精确解。

参　考　文　献

[1] Guyan R J. Reduction of stiffness and mass matrices[J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1965,3(2):380.

[2] Irons B M. Structural eigenvalue problems—elimination of unwanted variables[J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1965, 3(5): 961-962.

[3] O'Callahan J. A procedure for an improved reduced system (IRS) model[C]//Proceedings of 7th International Modal Analysis Conference. 1989: 17-21.

[4] Mottershead J E, Friswell M I. Model updating in structural dynamics: a survey[J]. Journal of Sound and Vibration,1993,167 (2): 347-375.

[5] Friswell M I, Garvey S D, Penny J E T. Model reduction using dynamic and iterated IRS techniques[J]. Journal of Sound and Vibration,1995,186(2):311-323.

[6] Friswell M I, Garvey S D, Penny J E T. The convergence of the iterated IRS method[J]. Journal of Sound and Vibration,1998,211(1):123-132.

[7] Xia Y, Lin R M. Improved on the iterated IRS method for structural eigensolutions[J]. Journal of Sound and Vibration,2004,270(4/5):713-727.

[8] Qu Z Q, Fu Z F. An iterative method for dynamic condensation of structural matrices[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2000,14(4):667-678.

[9] 吴斌,禹建功,潘英.一种新的结构矩阵缩聚迭代法[J].北京工业大学学报,2006,32(6):481-484.
Wu Bin, Yu Jiangong, Pan Ying. A new iterative method for condensation of structural matrices[J]. Journal of Beijing University of Technology, 2006, 32(6):481-484. (in Chinese)

[10] Brandts J. The Riccati algorithm for eigenvalues and invariant subspaces of matrices with inexpensive action[J]. Linear Algebra and its Applications, 2003,358(1):335-365.

[11] Freiling G. A survey of nonsymmetric Riccati equations [J]. Linear Algebra and its Applications, 2002,351-352 (15):243-270.

[12] 吕炯兴.矩阵论[M].北京:航空工业出版社,1993.
Lu Tongxin. The theory of matrices [M]. Beijing: Aviation Industry Press, 1993. (in Chinese)

[13] 曹志浩.数值线性代数[M].上海:复旦大学出版社,1996.
Cao Zhihao. Numerical linear algebra[M]. Shanghai: Fudan University Press , 1996. (in Chinese)

[14] Matta K W. Selection of degrees of freedom for dynamic alalysis[J]. Journal of Pressure Vessel Technology,1987, 109(1): 65-69.

[15] 刘天雄,华宏星,石银明.结构动力模型一体化降阶技术[J].强度与环境,2003,30(1):31-36.
Liu Tianxiong, Hua Hongxing, Shi Yinming. Study on united model reduction method for dynamic model[J]. Structure & Environment Engineering, 2003,30(1):32-36. (in Chinese)

作者简介:

汪晓虹(1955－) 女,博士,副教授。主要研究方向:结构动态设计、模型修正中的代数特征值问题。

Tel: 025-84892032

E-mail:wxhnj@nuaa.edu.cn

曹立娟(1980－) 女,博士研究生。主要研究方向:结构动力学建模。

陈怀海(1965－) 男,博士,教授,博士生导师。主要研究方向:结构动力学与控制。

Tel: 025-84893082

E-mail: CHHNUAA@nuaa.edu.cn

(责任编辑:徐晓)