第 28 卷 第 6 期 航 空 学 报 Vol. 28 No. 6
2007 年 11 月 ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA Nov. 2007

文章编号:1000-6893(2007)06-1351-04

复杂系统平均剩余寿命综合评估方法

杨军[1],赵宇[1],李学京[2],于丹[2]
(1. 北京航空航天大学 工程系统工程系,北京 100083)
(2. 中国科学院 数学与系统科学研究院,北京 100080)

Comprehensive Evaluation of Mean Residual Life of Complex System

Yang Jun[1], Zhao Yu[1], Li Xuejing[2], Yu Dan[2]
(1. Department of System Engineering of Engineering Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)
(2. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

摘 要:针对工程中广泛关注的平均剩余寿命问题,首先利用信仰推断给出单个设备可靠度的置信分布,包括指数分布、威布尔分布和对数正态分布;然后基于组成系统的设备试验信息,结合系统的组成结构,给出系统可靠度的置信分布,接着根据可靠度和平均剩余寿命之间的关系,建立复杂系统平均剩余寿命综合评估模型并给出具体的评估算法。对于在设备试验中经常出现的右删失等不完全数据,给出了将不完全数据虚拟成等效的完全数据的转化方法。最后,通过模拟研究和实例验证,结果表明本文的方法较为精确,能够满足工程的实际需求。

关键词:平均剩余寿命;枢轴量;置信分布
中图分类号:O212.1 **文献标识码**:A

Abstract: The mean residual life of complex system is an important reliability index which is focused on very much in engineering, but it is rarely studied so far. The confidence distribution of single equipment's reliability, such as exponential distribution, Weibull distribution and log-normal distribution, is derived by fiducial distribution. Based on test information of components composed the complex system, the confidence distribution of the system reliability is obtained via the structure of the system. The comprehensive evaluation model of the mean residual life of complex system is established from the relationship between reliability and mean residual life, and the evaluation algorithm is given in detail. For incomplete data like censored data which is often occurred during component test, one pseudo-complete sample technique is given. In the end, the good performances of the methods discussed in the paper are shown by simulation and a real example.

Key words: mean residual life; pivotal quantity; fiducial distribution.

对于系统可靠性综合评估,由于系统本身的试验极少,甚至没有,因此,工程上通常利用系统及其组成设备的试验信息对系统可靠性指标进行统计推断。以往的系统可靠性综合评估主要围绕系统的可靠度指标展开,李学京等[1]首先研究了平均寿命的综合评估,然而在航空、航天等实际部门,经常关注正在使用的系统还能工作多长时间,即剩余寿命,因此研究系统平均剩余寿命的综合评估具有重要的现实意义和应用价值。

考虑由若干设备构成的单调关联系统,其中的设备寿命可以是指数分布、威布尔分布、对数正态分布等参数分布,首先利用信仰推断构造设备可靠度的置信分布,进而由系统的结构函数得到系统可靠度的置信分布,最后给出系统的平均剩余寿命。

1 设备可靠度置信分布的计算

在完全样本情形下,对于寿命分布属于位置-刻度族的设备,包括指数分布、威布尔分布、对数正态分布等,使用枢轴量方法[2]可得到可靠度的置信分布,而对于非位置-刻度族,却不能用枢轴量刻画的参数分布,采用规范化的似然函数作为参数的置信分布[3]。这里置信分布可具体定义如下:设 $R_L(\alpha)$ 为给定样本数据 X 条件下,可靠度 R 的置信度为 α 的置信下限,即 $P\{R\geqslant R_L(\alpha)\}=\alpha\triangleq F(R_L)$,则称 $F(R_L)$ 为可靠度 R 关于置信度 α 的置信分布。实际上,把可靠度 $R(t)$ 的置信分布表示成 $\psi(t,\theta)$ 的形式,其中 ψ 为已知函数,参数 θ 为服从已知分布的枢轴量,这里 θ 可以是多元向量。

收稿日期:2006-12-20;**修订日期**:2007-07-20
基金项目:总装预研重点基金项目(9140A19030106HK0108)
通讯作者:杨军 E-mail:tomyj2001@buaa.edu.cn

1.1 指数寿命分布设备可靠度的置信分布

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自指数分布

$$f(x)=\frac{1}{\theta}\exp(-x/\theta),\quad x\geqslant 0$$

的独立同分布样本。设 $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则有

$$2T/\theta\sim\chi^2_{2n}$$

由此得到可靠度 $R(t)$ 的置信分布为

$$R(t)=\exp\left(-\frac{t}{2T}\beta\right),\quad \beta\sim\chi^2_{2n} \tag{1}$$

1.2 威布尔分布设备可靠度的置信分布

设寿命随机变量 X 服从参数为(m,η)的两参数威布尔分布，而 $X_1,\cdots,X_n$ 为其独立同分布样本。记 $Y=\ln X$，则 $Y_i=\ln X_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$服从极值分布 $F_Y(y)=1-\exp\{-\exp[(y-\mu)/\sigma]\}$，其中 $\mu=\ln\eta,\sigma=\frac{1}{m}$。记 $\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$。令 $W_i=(Y_i-\mu)/\sigma(\ i=1,2,\cdots,n)$，则 $W_1,\cdots,W_n$ 独立同分布，其共同分布为标准极值分布 $G(w)=1-\exp(-e^w)$。记 $\bar{W}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}W_i,V^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(W_i-\bar{W})^2$，则

$$\bar{W}=\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma},\quad V^2=\frac{S^2}{\sigma^2}$$

易知$\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma}$和$\frac{S^2}{\sigma^2}$为枢轴量，其分布与未知参数无关。因此

$$\sigma=S/V,\quad \mu=\bar{Y}-\bar{W}S/V \tag{2}$$

对给定时间 t，可靠度为

$$R(t)=\exp\{-\exp[(\ln t-\ln\eta)/\sigma]\}$$

将式(2)代入可靠度 $R(t)$即得其置信分布

$$R(t)=\exp\left[-\exp\left(\bar{W}+\frac{\ln t-\bar{Y}}{S}V\right)\right] \tag{3}$$

式中：$\bar{Y}$ 和 S 由样本确定；$\bar{W}$ 和 V 分布已知。

1.3 对数正态分布设备可靠度的置信分布

假定寿命随机变量 T 服从对数正态分布，则 $X=\ln T$ 服从正态分布。记 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为 X 的独立同分布样本，则对于给定的任务时间 t，可靠度为

$$R(t)=1-\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right) \tag{4}$$

记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,Y_i=\frac{X_i-\mu}{\sigma},(i=1,2,\cdots,n),\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$ 与 $V^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$，则 $\bar{Y}=(\bar{X}-\mu)/\sigma$ 与 $V^2=S^2/\sigma^2$ 为枢轴量，将 $\mu=\bar{X}-\bar{Y}S/V$ 和 $\sigma^2=S^2/V^2$ 分别代入式(4)可得

$$R(t)=1-\Phi\left(\frac{\ln t-\bar{X}}{S}V+\bar{Y}\right) \tag{5}$$

式中：$\bar{X}$ 和 S^2 由样本确定；$\bar{Y}$ 和 V^2 为具有已知分布的随机变量；$\bar{Y}$ 服从标准正态分布；V^2 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，且 $\bar{Y}$ 和 V^2 独立，因此由式(5)可得出 $R(t)$的置信分布。

2 复杂系统平均剩余寿命综合评估

2.1 综合评估模型

假定系统 S 是由 K 个不同设备 $S_1,\cdots,S_K$ 构成的单调关联系统，而系统可靠度函数为

$$R(t)=\varphi[R_1(t),\cdots,R_K(t)] \tag{6}$$

式中：$R_1(t),\cdots,R_K(t)$分别为 K 个设备 $S_1,\cdots,S_K$ 的可靠度；φ 为已知的系统结构函数。则系统在时间 t 的平均剩余寿命为

$$m(t)=\frac{1}{R(t)}\int_t^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$

系统的平均寿命为

$$\theta=\int_0^{+\infty}R(t)\mathrm{d}t \tag{8}$$

实际上 $m(0)$就是平均寿命，因此平均寿命是平均剩余寿命的一种特殊情形，不必单独进行讨论。

2.2 复杂系统平均剩余寿命综合评估算法

假定系统 S 由 K 个不同设备 $S_1,\cdots,S_K$ 构成，并且假定它们的可靠度 $R_i(t)$已经表示为 $\psi_i(t,\theta_i)(i=1,2,\cdots,K)$的形式，其中 ψ_i 为已知函数，参数 θ_i 为分布已知的枢轴量。则系统的可靠度函数表示为

$$R(t)=\varphi[\psi_1(t,\theta_1),\cdots,\psi_K(t,\theta_K)] \tag{9}$$

利用式(7)和式(9)，通过仿真方法，可以得到系统平均剩余寿命的仿真抽样结果，然后以与置信度对应的分位数为置信限，进而得到区间估计。计算平均剩余寿命置信分布的步骤具体如下：

(1) 利用第 1 节的方法把每个设备可靠度 $R_i(t)$的置信分布表示为 $\psi_i(t,\theta_i)(i=1,\cdots,K)$的形式，其中 $\theta_i\sim G_i$，G_i 为已知分布。

(2) 置循环变量 $k=1$，生成不同设备可靠度置信分布参数 θ_i 的随机数 $\theta_i^{(k)}\sim G_i$。

(3) 把 $\theta_i^{(k)}$ 先后代入式(9)和式(7)，得到系统平均剩余寿命的一个随机实现值 $m^k(t)$。若 $k<M$，则 $k=k+1$，返回(2)，否则进入(4)。这里

M 事先取定，一般取 $M=1\ 000$。

(4) 将得到结果 $m^1(t),\cdots,m^M(t)$ 按升序排列得到 $m^{(1)}(t)\leqslant\cdots\leqslant m^{(M)}(t)$；对于给定的置信水平 $1-\alpha$，取 $m^{([\alpha M])}(t)$ 作为系统平均剩余寿命的置信下限，取 $[m^{([\alpha M/2])}(t), m^{([(1-\alpha/2)M])}(t)]$ 作为系统平均剩余寿命的置信区间，其中“[]”指下取整运算。

3　不完全数据的完全化方法

在第 1 节中，基于完全样本讨论了设备可靠度的置信分布。但是，由于受时间、经费等客观条件的限制，设备的寿命试验数据经常是删失、截尾或区间型的不完全数据。为使用前述的评估方法，需要首先把不完全数据转化完全数据。简单起见，以右删失数据为例进行讨论。

设非负随机变量 $X\sim F(x|\theta)$，其中 $\theta\in\Theta$，其密度函数为 $f(x|\theta)$。设 $T_1,\cdots,T_n$ 为一常数列，$x_1,\cdots,x_n$ 为 X 的独立同分布样本，观测数据为 $x_1\wedge T_1,\cdots,x_n\wedge T_n$，即右删失数据。令 $\delta_i=I_{\{x_i\leqslant T_i\}}$，$t_i=x_i\wedge T_i(i=1,2,\cdots,n)$，记 Δ_i 为第 i 个设备的剩余寿命，即 $\Delta_i=(1-\delta_i)(x_i-T_i)$。记 $G(x|\theta,t)$ 为参数为 θ 时，设备在 t 时刻的剩余寿命分布。首先根据完全观测数据部分给定参数初值 $\theta^{(0)}$，然后利用条件 EM 算法得出 θ 的条件极大似然估计 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$。最后由 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$ 确定的剩余寿命分布填充右删失数据得到虚拟完全样本。具体步骤如下：

(1) 将观测数据的完全数据部分和右删失部分分类，分别记为 $x_1,\cdots,x_r$ 与 $T_{r+1},\cdots,T_n$。把右删失部分 $T_i(i=r+1,\cdots,n)$ 看做是具有辅助信息 $x_i>T_i$ 的缺失数据。

(2) 条件似然函数可写为

$$L(\theta)=L(\theta\mid x_1,\cdots,x_r,x_{r+1}>T_{r+1},\cdots,x_n>T_n)=\prod_{i=1}^{r}f(x_i\mid\theta)\prod_{i=r+1}^{n}f(x_i\mid\theta,x_i>T_i)$$

记

$$Q(\theta\mid\theta^{(i)})=Q(\theta\mid\theta^{(i)},x_1,\cdots,x_r,x_{r+1}>T_{r+1},\cdots,x_n>T_n)\triangleq\int_{T_{r+1}}^{\infty}\cdots\int_{T_n}^{\infty}\log L(\theta)\mathrm{d}x_{r+1}\cdots\mathrm{d}x_n \tag{10}$$

(3) 将 $Q(\theta|\theta^{(i)})$ 极大化，即找到一个点 $\theta^{(i+1)}$，使

$$Q(\theta^{(i+1)}\mid\theta^{(i)})=\max_{\theta\in\Theta}Q(\theta\mid\theta^{(i)}) \tag{11}$$

若 $|\theta^{(i+1)}-\theta^{(i)}|<\varepsilon$（$\varepsilon$ 为给定的小正数）则停止，令 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}=\theta^{(i)}$，转到(4)；否则，令 $i=i+1$，转到(2)。

(4) 对于右删失数据 $x_i>T_i(i=r+1,\cdots,n)$，从剩余寿命分布 $G(x|\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}},T_i)$ 中随机抽取一个数 g_i，由 T_i+g_i 填充该右删失数据，然后结合完全观测数据部分，得到等效的虚拟完全数据样本 $\{x_1,\cdots,x_r,T_{r+1}+g_{r+1},\cdots,T_n+g_n\}$。

至于上述算法中的条件 EM 算法，其收敛性和相合性的研究已有讨论，可参阅文献[4-5]。此外，不完全数据的完全化方法还可以使用于丹等提出的 CM 算法[3]及其改进算法[6]。

4　模拟研究与实例验证

下面通过模拟研究来验证本文评估方法的有效性。置信度分别取 0.7，0.8 和 0.9，模拟次数为 1 000。表 1 给出了两个指数分布的并联系统平均剩余寿命的评估结果，表 2 给出了一个指数寿命部件和一个威布尔寿命部件组成的串联系统平均剩余寿命的评估结果，并且表中的标准差指置信下限的样本标准差。

表 1　两指数并联系统的平均剩余寿命评估

Table 1　Mean residual lifetime evaluation of one shunt-wound formed by two exponential components

平均剩余寿命真值/h	样本量	置信度	覆盖率	标准差
49.336 9	(10,10)	0.7	0.738	13.205 5
		0.8	0.834	12.276 8
		0.9	0.915	11.114 3
45.768 7	(20,20)	0.7	0.714	9.505 6
		0.8	0.811	9.014 7
		0.9	0.912	8.406 3
37.652 1	(30,30)	0.7	0.648	7.255 9
		0.8	0.744	6.926 1
		0.9	0.889	6.521 5

表 2　1 个指数和 1 个威布尔串联系统的平均剩余寿命评估

Table 2　Mean residual lifetime evaluation of one series-wound formed by one exponential component and one weibull component

平均剩余寿命真值/h	样本量	置信度	覆盖率	标准差
65.135 4	(10,10)	0.7	0.731	68.687 98
		0.8	0.812	58.219 77
		0.9	0.881	44.015 65
	(15,10)	0.7	0.740	63.501 40
		0.8	0.800	53.236 30
		0.9	0.880	41.114 60

从表 1 和表 2 的模拟结果可看出，估计精度基本能够满足实际的需求，其中覆盖率与置信度相差不是很大，随样本量的增加，其差异减小，并且置信下限的标准差随样本量的增大而减小。

为进一步验证本文方法的有效性并说明其应

用，下面给出一个实例分析。

某机电设备(看做系统)由热气机和发电机串联组成，在研制过程中，对热气机得到一组寿命试验数据(单位：h)：+2 500，972.583，4 779.03，740.87，3 790，3 032.67，+981.73，3 944.5；对发电机得到一组寿命数据(单位：h)：961.2，1 903.717，+2 266.38，2 861.8，其中“+”表示右删失数据。

根据工程经验，可以确定热气机和发电机的寿命均服从威布尔分布。首先由第 3 节的方法，得到热气机的虚拟完全数据：3 808.6，972.583，779.03，740.87，3 790，3 032.67，3 014.8，3 944.5；而发电机的虚拟完全数据为 961.2，1 903.717，2 770.5，2 861.8。然后利用第 2 节的方法，得到该机电设备的平均寿命和工作了 262.3 h 后的平均剩余寿命的评估结果如表 3 所示。

表 3 某电机设备平均剩余寿命的评估结果

Table 3 Mean residual lifetine evaluation of one electromechanical equipment

	点估计	置信下限	
		置信度 0.8	置信度 0.9
平均寿命/h	1 732.3	1 407.6	1 248.8
平均剩余寿命/h	1 554.2	1 265.0	1 129.7

5 结论与展望

通过信仰推断的方法得到组成设备可靠度的置信分布，进而得到复杂系统可靠度的置信分布，最后给出系统平均剩余寿命的综合评估，同时给出了设备试验不完全数据的处理方法。由于该评估方法是基于信仰推断得到的，所以从理论上证明其优良性质非常困难，不过，通过模拟发现该方法得出的置信限的覆盖率与置信度比较接近，因此该方法可以在工程实际中使用。

本文的综合评估模型，实际上假定系统的可靠性完全由组成设备确定，同时设备之间相互独立，没有描述系统本身的特性与设备间的相互影响，因此在后续的研究中，需要进一步完善该综合评估模型，充分反映设备间的相互影响和设备的重要程度等。再者，对于非位置-刻度族分布，使用规范化的似然作为置信分布，缺乏严格的理论基础，需要进一步研究；最后，通过规范化似然得出的置信分布一般不规则，因此积分运算较为困难，可用贝塔分布等近似。这有待于今后的进一步研究。

致 谢

感谢审稿专家的宝贵意见，使本文增色不少。

参 考 文 献

[1] 李学京，韩筱爽，于丹. 复杂系统平均寿命综合评估方法研究[C]//航空可靠性工程技术——中国航空学会可靠性工程专业委员会第十届学术年会论文集. 北京：国防工业出版社，2006：283-288.
Li Xuejing, Han Xiaoshuang, Yu Dan. On comprehensive evaluation method of mean lifetime of complex system[C]// The tenth science meeting of reliability specialty committee of the Chinese society of Aeronautics and Astronautics. Beijing: National Defence Industry Press, 2006: 283-288. (in Chinese)

[2] 徐兴忠，李国英. 枢轴分布族中的 Fiducial 推断[J]. 中国科学(A 辑数学)，2006，36(3)：340-360.
Xu Xingzhong, Li Guoying. Fiducial inference of pivotal family[J]. Science China (A Edition Mathematics), 2006, 36(3):340-360. (in Chinese)

[3] 于丹，戴树森. 复杂系统可靠性综合方法研究[R]. 中国科学院系统科学研究所技术报告. 北京：中国科学院系统科学研究所，1996.
Yu Dan, Dai Shusen. On comprehensive evaluation method of complex system reliability[R]. Technical report of Institute of Systems Science of Academy Sinica. Beijing: Institute of Systems Science, AMSS, 1996. (in Chinese)

[4] 茆诗松，王静龙，濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，1997：428-434.
Mao Shisong, Wang Jinglong, Pu Xiaolong. Advanced mathematics statistics [M]. Beijing: Higher Education Press, 1997:428-434. (in Chinese)

[5] Patrica M O, Keaven M A, Ralpn B. Maximum likelihood estimation for interval-censored data using a weibull-baesd accelerated failure time mode[J]. Biometrika, 1992, 48:951-959.

[6] 姜宁宁. Weibull 分布等分位点数据填充算法及其应用[R]. 中国科学院数学与系统科学研究院技术报告. 北京：中国科学院数学与系统科学研究院，2006.
Jiang Ningning. Equal quantile filling algorithm for weibull distribution and its application[R]. Technical Report of Academy of Mathematics and System of Academy Sinica. Beijing: Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, 2006. (in Chinese)

作者简介：

杨军(1976—) 男，博士，讲师。主要研究方向：可靠性统计，可靠性验证与评估以及抽样调查等。
E-mail：tomyj2001@buaa.edu.cn

赵宇(1965—) 男，博士，教授。主要研究方向：可靠性统计，可靠性验证与评估，可靠性信息管理与数据处理等。

李学京(1975—) 男，博士研究生。主要研究方向：可靠性统计。
E-mail：wflxj@eyou.com

于丹(1960—) 男，博士，研究员。主要研究方向：可靠性统计，时间序列分析等。

(责任编辑：李铁柏)