第5章 对流传热的理论基础

哈尔滨工业大学

5.1 对流传热概说

- 自然界普遍存在对流传热，它比导热更复杂
- 到目前为止，对流传热的研究还不充分
  - 某些方面还处在积累实验数据的阶段；
  - 某些方面研究较详细，但由于数学上的困难；目前工程中可应用的公式多数为经验公式（实验结果）

一、牛顿公式

$$Q = hA\Delta t \qquad (5-1)$$

只是对流换热系数 ***h*** 的一个定义式，它并没有揭示 ***h*** 与影响它的各物理量间的内在关系

影响对流换热系数 ***h*** 的因素有以下 5 方面

- 流体有无相变
- 流体流动的起因
- 换热表面的几何因素
- 流体的流动状态
- 流体的物理性质

二、对流换热的分类树

- 对流换热
  - 单相对流换热
  - 相变对流换热

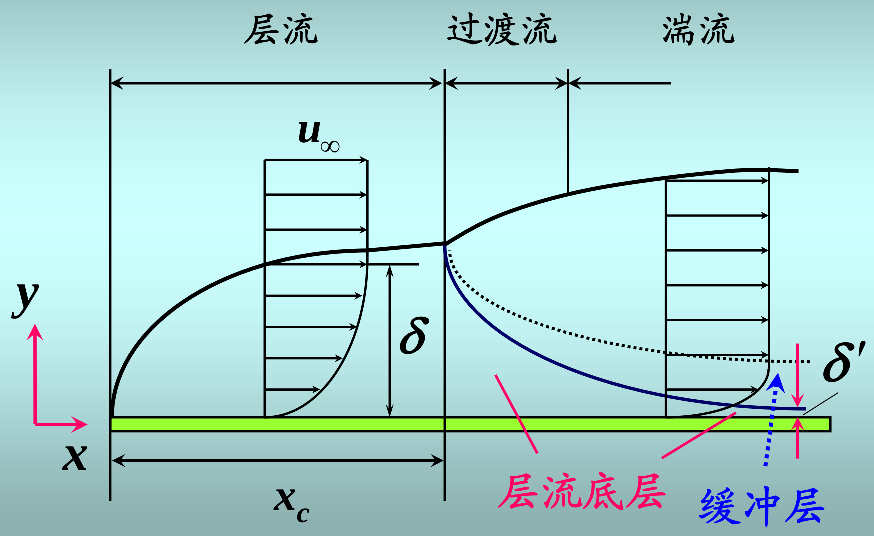
二、对流换热的分类树

- 单相对流换热
  - 自然对流
    - 大空间自然对流
      - 层流
      - 紊流
    - 有限空间自然对流
      - 层流
      - 紊流
  - 混合对流
  - 强制对流
    - 管内强制对流换热
    - 流体横掠管外强制对流换热
    - 流体纵掠平板强制对流换热

二、对流换热的分类树

- 相变对流换热
  - 沸腾换热
    - 大容器沸腾
    - 管内沸腾
  - 凝结换热
    - 膜状凝结
    - 珠状凝结

三、流动边界层



5.1 对流传热概说

三、流动边界层

1. 物理现象　　当粘性流体在壁面上流动时，由于粘性的作用，在靠近壁面的处流速逐渐减小，而在贴壁处流体将被滞止而处于无滑移状态。即：直接贴附于壁面的流体速度实际上等于零，在流体力学中称为贴壁处的无滑移边界条件

三、流动边界层

2. 实验测定　　若用仪器测出壁面法向（ y 向）的速度分布，如上图所示。在 $y=0$ 处， $u=0$ ；此后随 $y\uparrow$ ， $u\uparrow$ 。经过一个薄层后 u 接近主流速度。

三、流动边界层

3. 定义　这一薄层称为流动边界层（速度边界层），通常规定：$u = 0.99u_{\infty}$（主流速度）处的距离 y 为流动边界层厚度，记为 δ。

三、流动边界层

4. 数量级　　流动边界层很薄，如空气，以 $u = 16\,m/s$ 掠过平板，在离平板前缘 $1\,m$ 处的边界层厚度约为 $5\,mm$。

三、流动边界层

5. 物理意义　在这样薄的一层流体内，其速度梯度是很大的。在 $5mm$ 的薄层中，气流速度从 0 变到 $16m/s$，其法向平均变化率高达每米 $3200m/s$。

根据牛顿粘性定律，流体的剪应力与垂直运动方向的速度梯度成正比，即：

$$\tau_x = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

式中：τ_x —— x 向的粘滞剪应力 $\left[N/m^2\right]$

μ —— 动力粘度 $\left[kg/(m\cdot s)\right]$

对于工业中常用流体，如空气，烟气，水等，虽然其粘性很低，但因为速度梯度大，边界层内仍会有较大的粘滞剪应力

三、流动边界层

6. 掠过平板时边界层的形成和发展（如上图）

(1) 流体以速度 u_∞ 流进平板前缘后，边界层逐渐增厚，但在某一距离 x_c 以前会保持层流。

三、流动边界层

(2) 但是随着边界层厚度的增加，必然会导致壁面粘滞力对边界层外缘影响的减弱。自 x_c 处起，层流向湍流过渡（过渡区），进而达到旺盛湍流，故称湍流边界层。

(3) 湍流边界层包括湍流核心、缓冲层、层流底层。在层流底层中具有较大的速度梯度。

三、流动边界层

7. 临界雷诺数 $\mathrm{Re}_c = \dfrac{u_\infty x_c}{\nu}$

ν ——运动粘度 $\left(m^2/s\right)$，$\nu = \mu/\rho$ ；

μ ——动力粘度

三、流动边界层

$$[kg/(m \cdot s)] \Rightarrow \left[\frac{kg \cdot m/s^2}{m^2} \cdot s\right] \Rightarrow \left[\frac{N \cdot s}{m^2}\right]$$

$$\Rightarrow [Pa \cdot s]$$

$Pa\left(N/m^2\right)$ （帕斯卡）

三、流动边界层

采用临界雷诺数 Re_c 来判别层流和湍流。

对管内流动：$\mathrm{Re}_c < 2300$ 为层流

$\mathrm{Re}_c > 10000$ 为湍流

对纵掠平板：一般取 $\mathrm{Re}_c = 5 \times 10^5$

三、流动边界层

8. 小结　综上所述，流动边界层具有下列重要特性

(1) 流场可以划分为两个区：

边界层区——必须考虑粘性对流动的影响，要用 $N-S$ 方程求解。

三、流动边界层

主流区——边界层外，流速维持 u_∞ 不变。由于速度梯度很小，粘滞性所造成的切应力可以忽略。因此流动可以作为理想流体的无旋流动，用描述理想流体的运动微分方程求解。

三、流动边界层

(2) 边界层厚度与壁面尺度相比，是一个很小的量 $l >> \delta$ 。

$u = 0.5m/s \quad l = 1.1m \quad \delta = 3cm$

$u = 4.0m/s \quad l = 1.1m \quad \delta = 3cm$

三、流动边界层

(3) 边界层分：

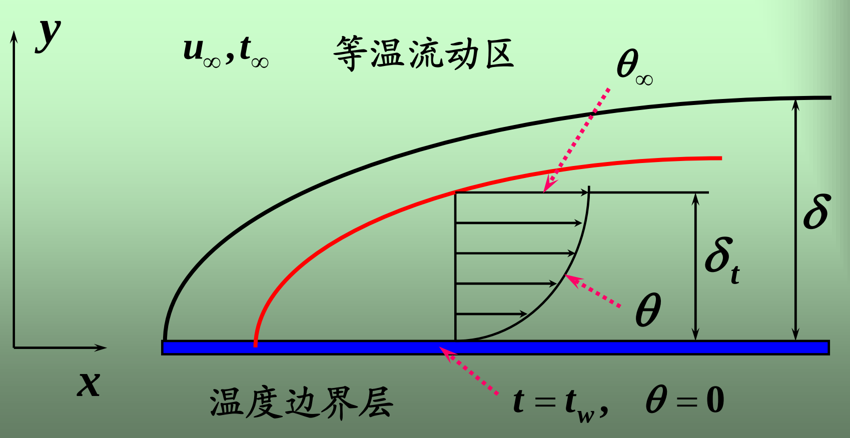
- 层流边界层——速度梯度较均匀地分布于全层。
- 湍
  —
  底层。

(4) 在边界层内，粘滞力与惯性力数量级相同。

- 速度梯度主要集中在层流底层。

5.1 对流换热概说

四、热边界层



四、热边界层

- 由于速度在壁面法线方向的变化出现了流动边界层，同样，当流体与壁面之间存在温度差时，将会产生热边界层，如上图所示。
- 在 $y=0$ 处，流体温度等于壁温 $t=t_w$ ，$\theta=t-t_w=0$

四、热边界层

- 在 $y=\delta_t$ 处，流体的温度接近主流的温度 t_∞ ，这一区域称为热边界层或温度边界层。 δ_t 称为热边界层的厚度
- 热边界层以外可视为等温流动区（主流区）

五、普朗特准则

- 速度边界层是否与温度边界层一样厚？
  当：
  - 重力场可忽略不计
  - 压力梯度为零
  - 流动与换热的边界条件相仿时

五、普朗特准则

可用普朗特数 $\mathbf{Pr}=\nu/a$ 来反映：速度边界层和温度边界层两者增厚的相对快慢

式中：ν 运动粘度 m^2/s；

a 导温系数 m^2/s。

其物理意义：温度场与速度场的相似程度

五、普朗特准则

原因：动量方程（以 x 向为例）：

$$\rho\frac{Du}{D\tau}=F_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\nabla^2 u$$

若重力场可忽略 $F_x=0$ ，压力梯度为零 $\frac{\partial P}{\partial x}=0$ ，且：$\nu=\mu/\rho$

五、普朗特准则

能量方程：$\frac{Dt}{D\tau}=a\nabla^2 t$

即：动量方程与能量方程有完全类似的形式。

五、普朗特准则

$\mathrm{Pr} = 1$ 即 $\nu = a$ 则 $\delta = \delta_t$

$\mathrm{Pr} < 1$ 即 $\nu < a$ 则 $\delta < \delta_t$

$\mathrm{Pr} > 1$ 即 $\nu > a$ 则 $\delta > \delta_t$

六、求对流换热系数的方法

如前所述，影响对流换热系数的因素有以下各方面：

- 流体有无相变——单相流，两相流，多相流
- 流动的原因——自然对流，强制对流，混合对流

六、求对流换热系数的方法

- 流动状态
  - 层流（垂直流动方向无微团转移，流线彼此平行，热量的转移主要依靠导热）
  - 湍流（垂直流动方向出现激烈的漩涡扰动，热对流起主导作用）

六、求对流换热系数的方法

- 流体的物理性质：

导热系数 λ↑，层流层热阻 ↓，h↑；

ρc_p↑，单位体积流体微团携带的热量↑，对流作用转移热量的能力↑，h↑

六、求对流换热系数的方法

- 流体的物理性质：

- 动力粘度 μ↑，剪应力 ↑， δ, δ_t（流动、热边界层的厚度），↑ h↓

- 体积膨胀系数 β↑，自然对流作用越强，导致换热 ↑。

六、求对流换热系数的方法

- 换热表面的几何尺寸、形状与位置——定型尺寸，壁面几何形状因素。

六、求对流换热系数的方法

牛顿公式把所有复杂因素均放在换热系数 h 中考虑

$$h = f(u,\lambda,c_p,\rho,\mu,\beta,t_w,t_f,l,\phi) \qquad (5-2)$$

因此，求解对流换热，实际上就是求换热系数 h 。为了寻找式(5-2) 的具体表达式，常用以下两种方法

六、求对流换热系数的方法

1. 数学分析法

- 解析法——解微分方程，或用边界层理论简化后求解
- 数值法（不讲）
- 比拟法——半实验法，传热与流体力学比拟。

六、求对流换热系数的方法

数学分析法还未达到普遍应用，但可指导实验；提供标准和评价其它解。

2. 实验研究法：用准则来整理实验数据。（是目前设计计算的主要计算式）

第5章 对流传热的理论基础

哈尔滨工业大学

5.2 对流换热问题的数学描述

一、换热微分方程式

由牛顿公式，微元表面在单位时间内对流换热量为

$$dQ_x = h_x \Delta t_x dA$$

一、换热微分方程式

在稳态情况下，根据热平衡原理，这部分热量在数值上必须等于通过紧贴壁面上不动流体层的导热量，即

$$-\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0} = h_x \Delta t_x$$

或

$$h_x = -\frac{\lambda}{\Delta t_x} \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad (5-3)$$

一、换热微分方程式

上式给出了用温度分布来表示局部换热系数的关系式。当 λ ，Δt_x 及 $\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0}$ 已知时，由式(5-3) 就可求出局部换热系数 h_x，然后按面积平均，则可得到平均换热系数 h

一、换热微分方程式

然而，欲知 $\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0}$ ，必须知道流体内温度分布规律，故必须建立描述温度场的能量微分方程式

5.2 对流换热问题的数学描述

二、能量微分方程

1. 固体或不流动的流体内的导热微分方程（能量守恒微分方程）
   在第二章中，我们推导了固体的能量方程，即导热微分方程。

二、能量微分方程

对于三维直角坐标系下，非稳态、无内热源、定物性，有

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\lambda}{\rho c_p}\left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right]$$

这里采用了定压比热 c_p ，实际上，对于密度为常量的流体来说，定压比热与定容比热并无区别

二、能量微分方程

2. 流动流体的能量守恒微分方程

上式只适用于固体或不流动的流体内的导热。对于流动的流体

二、能量微分方程

微元体内流体焓的增量	=	导热导入微元体的热量	−	导热导出微元体的热量
	+	对流流入微元体的热量	−	对流流出微元体的热量

二、能量微分方程

3. 简化假设

- 流体为不可压缩的牛顿型流体；（服从牛顿粘性定律 $\tau_x = \mu(\partial u/\partial y)$ 的流体，简称牛顿流体）

二、能量微分方程

- 空气、水等许多流体都属于牛顿流体
- 少数高分子溶液如油漆、泥浆等不遵守牛顿粘性定律，称非牛顿型流体

- 流体物性为常数、无内热源
- 粘性耗散产生的耗散热可以忽略不计

4. 有两种推导方法

- 第一种：如教课本上所采用的方法，列出能量守恒方程式（p.203-205）

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} dxdydz =$$

$$Q_x - Q_{x+dx} + Q_y - Q_{y+dy} + Q_z - Q_{z+dz}$$

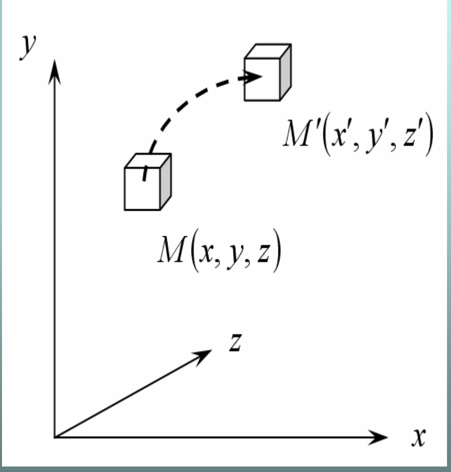
再列出：$Q_x, Q_{x+dx} \cdots\cdots$ 各项，代入整理

4. 有两种推导方法

- 第二种：从全微分的角度出发

二、能量微分方程

5. 对流条件下，$d\tau$ 时间内，微元体将沿 x, y, z 三个方向分别移动 dx、dy、dz 距离，见图。



第二种：从全微分的角度出发

因为我们研究的对象在运动，因此，不能将 x, y, z 视为常数。因为在微分时段 $d\tau$ 中，这一流体质点将从 $M(x,y,z)$ 点运动到新的位置 $M'(x',y',z')$

二、能量微分方程

即，运动着的质点本身的坐标是时间 τ 的函数。因此，微元体的位置 (x,y,z) 也是时间 τ 的函数。

这样，对 $t = f(x,y,z)$ 取时间的导数时，必须用全微分 $t = f\left[x(\tau), y(\tau), z(\tau), \tau\right]$

二、能量微分方程

$$\frac{Dt}{D\tau}=\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}+\frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \tau}$$

$$=\frac{\partial t}{\partial \tau}+u\frac{\partial x}{\partial \tau}+v\frac{\partial y}{\partial \tau}+w\frac{\partial z}{\partial \tau}$$

这里：$u=\frac{\partial x}{\partial \tau}$，$v=\frac{\partial y}{\partial \tau}$，$w=\frac{\partial z}{\partial \tau}$ 即在三个方向的速度分量

二、能量微分方程

则，运动流体的能量守恒微分方程式为

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}+u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}+w\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$=\frac{\lambda}{\rho c_p}\underbrace{\left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right]}_{a\nabla^2 t} \qquad (5\text{-}4)$$

二、能量微分方程

上式为：三维直角坐标系下，非稳态不可压牛顿流体、无内热源、定物性，忽略粘性耗散项的运动流体的能量守恒微分方程式。

显然，当流体不流动时，或对于固体

$$u = v = w = 0$$

二、能量微分方程

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + u\frac{\partial t}{\partial x} + v\frac{\partial t}{\partial y} + w\frac{\partial t}{\partial z} = a\nabla^2 t$$

$$u = v = w = 0$$

则上式可简化为：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t$$

三维直角坐标系下，非稳态、无内热源、定物性的能量守恒方程（针对固体或不流动的忽略粘性耗散项的不可压牛顿流体）

二、能量微分方程

对于二维情况，式(5-4) 可简化为：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}+u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}+w\frac{\partial t}{\partial z}=\frac{\lambda}{\rho c_p}\left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right]$$

(5-5)=教课本(5-6)

二、能量微分方程

注意：能量守恒微分方程式的一般形式：

非稳态项 + 对流项 = 扩散项 + 源项

在能量守恒微分方程中，出现了流速 ***u，v，w*** ，说明对流换热时，温度场受流场的影响。

三、动量微分方程，纳维—斯托克斯方程

以 x 向为例

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

$$=F_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\nabla^2 u \qquad (5-6)$$

二维问题，见教课本p.205，式(5-9)、(5-10)

三、动量微分方程，纳维—斯托克斯方程

以式(5-6) 为例，式中出现了 4 个变量：u，v，w，P ，但只能列出三个方程，因此，还需列出连续性方程

四、连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (5-7)$$

二维问题，见教课本p.205，式(5-8)

五、小结

求解对流换热需要一组微分方程

- 换热微分方程 (5-3)
  - 但是其中包括温度梯度，需设法知道温度分布，故必须建立描述温度场的能量微分方程式。

五、小结

- 能量微分方程 (5-4)
  - 用来求温度梯度，但在能量微分方程中，出现了流速 u, v, w ，说明对流换热时，温度场受流场的影响

五、小结

- 动量微分方程 (5-6)
  - 用来求速度，但未知数个数 > 方程式数
  - 有 3 个分式，4 个变量 u, v, w, P

五、小结

- 连续性方程 (5-7)，加上
  - 几何条件
  - 物理条件
  - 初始条件
  - 边界条件

  就成为对流换热完整的数学描述

五、小结

- 如果 λ, c_p, ρ, μ 已知（在物理条件中给出它们的具体数值），则对于
  - 3D，h, t, u, v, w, P，6个未知数，6个方程式，方程组封闭，理论上可解
  - 2D，h, t, u, v, P，5个未知数，5个方程式，方程组封闭，理论上可解

五、小结

- 如果 λ, c_p, ρ, μ 是温度、压力的函数
  - 还需补充一个状态方程

$$\rho = f_1(P, T)$$

  - 3个物性方程

$$\lambda = f_2(t) \quad c_p = f_3(t) \quad \mu = f_3(t)$$

五、小结

- 这样，对3D问题，10个未知数，10个方程式，方程组封闭
- 对2D问题，9个未知数，9个方程式，方程组封闭
- 然而，由于纳维—斯托克斯方程的复杂性，要针对实际问题在整个流场内数学上求解上述方程组却是非常困难的

五、小结

- 由于问题的复杂，单靠数学家是很难解决这一问题。这时就必须依靠物理学家提出新的物理概念和新的物理模型。
- 1904年，德国科学家普朗特（Prandtl）提出了边界层概念（Boundary layer）

5.3 边界层型对流传热问题的数学描述

一、简史

普朗特，德国科学家（慕尼黑工业大学教授）。1904年，他创造性地运用数量级对比法，简化了原始的微分方程组，开拓了对流换热理论界的道路，成为流体力学和传热学发展史中的一个里程碑。

5.3 边界层型对流传热问题的数学描述

二、数量级

在以下的讨论中，要涉及数量级的概念，为此，我们先介绍一下数量级。

二、数量级

什么是数量级？对此问题千万不能作机械的理解。通常我们说：1-9 属同一数量级，11～99 属另一数量级。

但是，绝不能由此得出结论说，9 和 11 分属两个不同的数量级，因为，11 比 9 仅仅大 22%而已。

二、数量级

- 所谓：“a 与 b 差一个数量级”，指的是 $b \ll a$ 或 $a \ll b$，也就是说一个量比另一个量大的多，大到后者可以忽略的地步。
- 什么叫可以忽略？这要看你所要求的精度

二、数量级

- 精度要求10%，则1与10相比可忽略
- 精度要求1%，则1与100相比才可忽略
- 因此，不能把“数量级”概念理解得太具体，不能在同一数量级内再比较大小，它在一定程度上是一个抽象的概念

5.3 边界层型对流传热问题的数学描述

三、数量级分析

指：通过比较方程式中各项量级的相对大小，把量级较大的项保留下来，而舍去量级较小的项，实现方程式的合理简化

5.3 边界层型对流传热问题的数学描述

四、边界层微分方程组

二维，稳态，重力场可忽略的强制对流换热

四、边界层微分方程组

1. 由边界层性质知

$l \sim O(1)$	符号“~”表示数量级相当于的意义
$\delta \sim O(\delta)$	$O(\delta)$ 是指数量级远小于 $O(1)$
$\delta_t \sim O(\delta)$	

四、边界层微分方程组

$u \sim O(1)$	因为 $0 \le u \le u_\infty$
$t \sim O(1)$	因为 $0 \le t \le t_\infty$
$x \sim O(1)$	因为 x 与 l 相当
$y \sim O(\delta)$	因为 y 在边界层内，即 $0 \le y \le \delta$

四、边界层微分方程组

2. 连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$y \sim \delta^*$$

$$\frac{1^*}{1^*} \qquad \frac{\delta}{\delta^*}$$

等式两边必须具有同样的数量级

因此：$v \sim O(\delta)$

四、边界层微分方程组

3. 动量方程

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

注意： $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

四、边界层微分方程组

■在边界层内，粘滞力与惯性力数量级相同

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

$$1\underbrace{\left[1*\frac{1*}{1*}\quad \delta*\frac{1*}{\delta*}\right]}_{\text{惯性力}\sim O(1)}\qquad 1\qquad \delta^2\underbrace{\left[\frac{1*}{1*}\quad\frac{1*}{(\delta^2)*}\right]}_{\text{粘滞力}\sim O(1)}$$

式中各项的数量级应相同，所以 $\frac{\partial P}{\partial x}\sim O(1)$

四、边界层微分方程组

- ■在边界层内，粘滞力与惯性力数量级相同
- ■若密度 ρ 的数量级定为 1，则动力粘度 $\mu\sim O(\delta^2)$
- ■若取 $\rho\sim O(\delta)$，则，$\mu\sim O(\delta^3)$ 且式中各项的数量级均为 $O(\delta)$
- ■故取方便些 $\rho\sim O(1)$

四、边界层微分方程组

$$\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right]=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]$$

$$\underbrace{1^*\left(1^*\frac{\delta^*}{1^*}\qquad \delta^*\frac{\delta^*}{\delta^*}\right)}_{\sim O(\delta)}\qquad \delta \qquad \underbrace{\underbrace{\left(\delta^2\right)^*}_{\delta^3\text{可略}}\left[\frac{\delta^*}{1^*}\qquad \frac{\delta^*}{(\delta^2)^*}\right]}_{\sim O(\delta)}$$

四、边界层微分方程组

式中各项的数量级应相同，所以

$$\frac{\partial P}{\partial y}\sim O(\delta)$$

表明，沿 y 向压力梯度很小，以至可以认为边界层内的压力与 y 无关。

4. 能量方程

$$u\frac{\partial t}{\partial x} + v\frac{\partial t}{\partial y} = a\left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right]$$

$$1^*\frac{1^*}{1^*} \qquad \delta^*\frac{1^*}{\delta_t^*} \qquad \left[\frac{1^*}{1^*} \qquad \frac{1^*}{(\delta_t^{\,2})^*}\right]$$

$$\sim O(1) \qquad \sim O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)$$

温度边界层 $\sim O(\delta_t)$

因此 $a \sim O(\delta_t^{\,2})$

四、边界层微分方程组

5. 由于总压力仅沿 x 向变化，因此可以将 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 改写为 $\frac{dP}{dx}$。于是，利用边界层概念简化的边界层换热微分方程组为

四、边界层微分方程组

因为： y 向动量方程中各项数量级均为 $O(\delta)$，故可略

x 向动量方程中 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 相比可略

能量方程中 $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ 与 $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ 相比可略

四、边界层微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

(5-8a)=教课本(5-15)

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \nu=\frac{\mu}{\rho}$$

(5-8b)=教课本(5-16)

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

(5-8c)=教课本(5-17)

四、边界层微分方程组

注意：式(5-8) 中的 dP/dx 可由边界层外理想流体的伯努利方程确定

$$z+\frac{p}{\rho}+\frac{u_{\infty}^{2}}{2}=const$$

u_{∞} 为边界层边缘上的流速

四、边界层微分方程组

略去高度的影响 $$p+\rho\frac{u_{\infty}^{2}}{2}=const$$

对上式求导 $$\frac{dp}{dx}=-\rho u_{\infty}\frac{du_{\infty}}{dx}$$

或 $$-\frac{dp}{dx}=\rho u_{\infty}\frac{du_{\infty}}{dx}$$

四、边界层微分方程组

故 3 个方程，三个未知数 u, v, t ，可解

边界条件：

$y=0$ 时： $u=0$ $v=0$ $t=t_w$

$y=\infty$ 时： $u=u_\infty$ $t=t_\infty$

四、边界层微分方程组

6. 边界层微分方程只适用于 ν 、 a 很小的流体

$$\nu=\frac{\mu}{\rho}\sim O(\delta^2) \qquad a\sim O(\delta_t^{\,2})$$

在物理意义上即：粘滞力大，则 $\delta\uparrow$，就构不成速度边界层；导温系数大，则 $\delta_t\uparrow$，也构不成温度边界层

四、边界层微分方程组

7. 求解方程组(5-8) 和定解条件 (5-9)， 可得到层流范围内的局部换热系数 h_x 的表达式

$$h_x = 0.332\frac{\lambda}{x}\left[\frac{u_\infty x}{\nu}\right]^{1/2}\left(\frac{\nu}{a}\right)^{1/3}$$

(5-10) =教课本(5-22a)

四、边界层微分方程组

引入努塞尔（Nusselt）数： $Nu_x = \dfrac{h_x x}{\lambda}$

下标 x 表示以当地几何尺度为特征长度

四、边界层微分方程组

于是，外掠等温平板的无内热源的层流对流换热问题的分析解为

$$Nu_x = 0.332\,\mathrm{Re}_x^{\,0.5}\,\mathrm{Pr}^{0.333}$$

(5-11) =教课本(5-22c)

这种以准则形式表示的对流换热计算式，称为准则方程（或特征数方程）

第5章 对流传热的理论基础

哈尔滨工业大学

http://iaat.hit.edu.cn 航空航天热物理研究所

5.4 边界层积分方程组的求解

一、边界层积分方程

1. 边界层积分方程有两个

- 边界层动量积分方程；
- 边界层能量积分方程。

5.4 边界层积分方程组的求解

2. 边界层积分方程的推导有两种方法

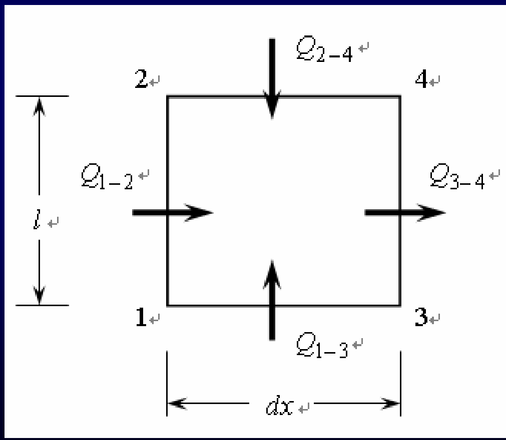
- 方法1：通过对有限大小的控制容积建立动量或热平衡
  - 由动量平衡建立——边界层动量积分方程
  - 由热平衡建立——边界层能量积分方程

- 方法 2：通过对边界层微分方程的积分
  - 对式(5-8b) =教本式(5-16) 积分建立——边界层动量积分方程
  - 对式(5-8c) =教本式(5-17) 积分建立——边界层能量积分方程

- 方法 2 见教本第三版 P.144 — P.145。下面，我们介绍方法 1。但只讲解：由热平衡建立——边界层能量积分方程

二、边界层能量积分方程

1. 取控制体 1–2 – 4 –3 –1，$l > \delta, \delta_t$ ， z 向取单位厚度



2. 假设：常物性；流速充分小，从而可以把因为内摩擦而引起的耗散热忽略

3. 由边界层数量级分析已知 $\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} << \dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2}$

因此，推导中仅考虑 y 向的导热

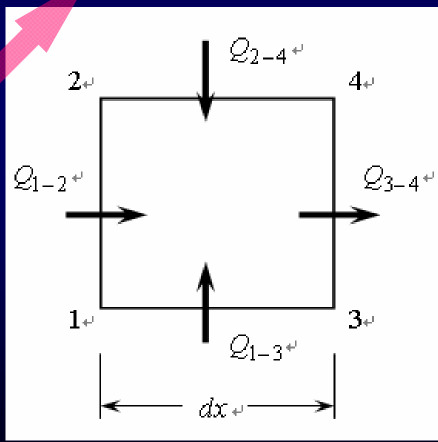
4. 在稳态下

对流带入控制体的能量 ＋ 壁面传热量 ＋ 控制体的粘性功（但由于流速小已略去） ＝ 对流带出控制体的能量

二、边界层能量积分方程

$$Q_{1-2}+Q_{2-4}+Q_{1-3}=Q_{3-4} \qquad (5\text{-}12)$$

对流带入控制体的能量 + 壁面传热量 = 对流带出控制体的能量



(1) Q_{1-2}：单位时间内穿过 1-2 面进入控制体的热量（注意 $dz=1$ ）

$$\rho c_p \int_0^l t\,u\,dy$$ 常物性，ρc_p 可提出积分号

(2) Q_{3-4}：单位时间内穿过 3-4 面带出控制体的热量

$$\rho c_p \int_0^l t\,u\,dy+\rho c_p \frac{d}{dx}\left[\int_0^l t\,u\,dy\right]dx$$

(3) Q_{2-4}：单位时间内由于穿过 2-4 面进入控制体的质量流量所带入的热量

(a) 通过 1-2 面的质量流量 $\int_0^l \rho u \mathrm{d}y$

(b) 通过 3-4 面的质量流量

$$\int_0^l \rho u \mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^l \rho u \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

(c) 通过 1-3 面的质量流量为零

(d) 考虑质量守恒，则通过 2-4 面进入控制体的质量流量为

$$\int_0^l \rho u \mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^l \rho u \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x - \int_0^l \rho u \mathrm{d}y$$

$$= \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^l u \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

(e) 则带入的热量为

$$\rho c_p t_\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^l u \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

(4) Q_{1-3}： 壁面传热量

$$-\lambda\,\mathrm{d}x\left[\frac{\partial t}{\partial y}\right]_{y=0}$$

(5) 将上述各式带入式 (5-12)

$$\rho c_p t_\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^l u\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x - \lambda\,\mathrm{d}x\left[\frac{\partial t}{\partial y}\right]_{y=0} = \rho c_p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^l t\,u\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

整理后得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^l (t_\infty - t)u\,\mathrm{d}y = a\left[\frac{\partial t}{\partial y}\right]_{y=0}$$

因为在热边界层外，$t_\infty - t = 0$ ，上式积分上限可改为 δ_t ，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\delta_t}(t_\infty - t)u\,\mathrm{d}y = a\left[\frac{\partial t}{\partial y}\right]_{y=0} \qquad (5-13)$$

这就是边界层能量积分方程。它即适用于层流，又适用于湍流，但由于上式中未考虑粘性功，故适用于常物性、不可压流体、流速不高。

由于要求常物性，故所适用的传热过程为：所涉及的温差使流体的粘性的实际变化很小。如引用了适当选取的平均特性数值后，方程适用范围可扩大。

三、边界层动量积分方程

用类似的方法可以导出边界层动量积分方法为

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\delta}\left(u_{\infty}-u\right)u\,\mathrm{d}y=\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}$$

(5－14)

四、边界层动量积分方程的求解

在式(5-14) 中有两个未知数 u,δ，要使方程组封闭， 必须补充一个有关这两个变量的方程，即关于 u 的分布的假设。

这里直接给出用速度的三次方分布求解的结果

1．假设速度分布为

$$u = c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 y^3 \quad (5-15)$$

由 4 个边界条件

$$y = 0,\ u = 0 \qquad y = \delta,\ u = u_\infty$$

$$y = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad y = \delta,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

确定 4 个系数：c_1，c_2，c_3，c_4

边界条件 $y = 0, u = 0 \quad y = \delta, u = u_\infty$

$$y = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad y = \delta, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

近似速度分布线在 $y = \delta$ 处应与恒定的主流速度 u_∞ 区平滑地连接，因此在 $y = \delta$ 处

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

边界条件 $y=0,\quad \partial^2 u/\partial y^2=0$

由 $$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial p}{\partial x}$$

(5-8b)=教本(5-16)

在定压条件下：$\partial p/\partial x=0$

因为在 $y=0$ 处，$u=v=0$，所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

注意，这里用到了微分方程式，尽管没有用它的具体解

2．应用上述 4 个条件

$$u=c_1+c_2y+c_3y^2+c_4y^3$$

$y=0,\ u=0:\qquad c_1=0$

$y=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0:\quad 2c_3+6c_4y=0$

所以：$c_3=0$

2．应用上述 4 个条件

$$u = c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 y^3$$

$$y = \delta,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0: \quad c_2 + 2c_3\delta + 3c_4\delta^2 = 0$$

因为：$c_3 = 0$ $\qquad c_2 + 3c_4\delta^2 = 0$

故：$\qquad c_2 = -3c_4\delta^2$

2．应用上述 4 个条件

$$u = c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 y^3$$

$$y = \delta,\ u = u_\infty:$$

$$c_1 + c_2\delta + c_3\delta^2 + c_4\delta^3 = u_\infty$$

$c_1 = c_3 = 0$ $\qquad c_2\delta + c_4\delta^3 = u_\infty$

$c_2 = -3c_4\delta^2$ $\qquad -3c_4\delta^3 + c_4\delta^3 = u_\infty$

$$-2c_4\delta^3 = u_\infty$$

2．应用上述 4 个条件

$$u = c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 y^3$$

所以： $c_1 = 0$ $\qquad$ $c_3 = 0$

$$c_2 = 3u_\infty / 2\delta \qquad c_4 = -u_\infty / 2\delta^3$$

得边界层中的速度分布为

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left[\frac{y}{\delta}\right]^3 \qquad (5-16)$$

3．将速度分布代入式(5-14)

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left[\frac{y}{\delta}\right]^3 \qquad \rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta (u_\infty - u)u\,dy = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}$$

(a) 求解积分式：

$$\rho\int_0^\delta u(u_\infty - u)\,dy = \rho u_\infty^2 \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right)dy$$

$$= \rho u_\infty^2 \int_0^\delta \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{\delta^3}\right]\left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} + \frac{1}{2}\frac{y^3}{\delta^3}\right]dy$$

$$= \frac{39}{280}\rho\delta u_\infty^2 \qquad (5-17a)$$

3．将速度分布代入式(5-14)

$$\frac{u}{u_\infty}=\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left[\frac{y}{\delta}\right]^3 \qquad \rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta (u_\infty - u)udy=\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}$$

(b) 对式(5-16) 求导:

$$\frac{du}{dy}=\frac{3}{2}\frac{u_\infty}{\delta}-\frac{3}{2}\frac{y^2}{\delta^3}u_\infty \qquad y=0$$

$$\tau_w=\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=\frac{3}{2}\mu\frac{u_\infty}{\delta} \qquad (5-17b)$$

3．将速度分布代入式(5-14)

$$\rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta (u_\infty - u)udy=\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}$$

$$\rho\int_0^\delta u(u_\infty - u)dy=\frac{39}{280}\rho\delta u_\infty^2 \qquad (5-17a)$$

$$\tau_w=\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=\frac{3}{2}\mu\frac{u_\infty}{\delta} \qquad (5-17b)$$

(c) 合并:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{39}{280}\rho u_\infty^2\delta\right]=\frac{3}{2}\mu\frac{u_\infty}{\delta} \qquad (5-17c)$$

3．将速度分布代入式(5-14)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{39}{280}\rho u_\infty^2\delta\right]=\frac{3}{2}\mu\frac{u_\infty}{\delta} \qquad (5-17c)$$

因为 ρ，u_∞ 是const，可以分离变量，得

$$\frac{39}{280}\rho u_\infty^2\frac{d\delta}{dx}=\frac{3}{2}\mu\frac{u_\infty}{\delta} \qquad (5-18)$$

3．将速度分布代入式(5-14)

$$\frac{39}{280}\rho u_\infty^2\frac{d\delta}{dx}=\frac{3}{2}\mu\frac{u_\infty}{\delta} \qquad (5-18)$$

分离变量，并注意 $x=0$ 时，$\delta=0$（平板始端，边界层厚为零）：

$$\int_0^\delta \delta\, d\delta=\int_0^x \frac{140}{13}\frac{v}{u_\infty}dx$$

$$\frac{\delta^2}{2}=\frac{140}{13}\frac{v}{u_\infty}x$$

4．离开前缘 x 处的流动边界层厚度

$$\frac{\delta^2}{2}=\frac{140}{13}\frac{\nu}{u_\infty}x$$

$$\delta=4.64\sqrt{\nu x/u_\infty} \qquad (5-19)$$

式中：$\mathrm{Re}_x=u_\infty x/\nu$ ， x 为特征长度

$$\frac{\delta}{x}=\frac{4.64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (5-20)$$

5．切应力

$$\tau_w=\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=\frac{3}{2}\mu\frac{u_\infty}{\delta} \qquad (5-17b)$$

$$\tau_w=\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=\frac{3}{2}\mu\frac{u_\infty}{\delta}=\frac{3}{2}\mu\frac{u_\infty}{4.64\sqrt{\dfrac{\nu x}{u_\infty}}}$$

$$=0.323\mu\frac{\rho u_\infty^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (5-21)$$

5．切应力

$$\tau_w = 0.323\mu \frac{\rho u_\infty^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (5-21)$$

摩擦系数，亦称范宁摩擦系数（局部切应力与流体动压头之比），的表达式为

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = 0.646\,\mathrm{Re}_x^{-1/2} \qquad (5-22)$$

以上两式均为距前缘 x 处的值

6．求解动量微分方程的精确解为

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (5-20)$$

$$c_f = 0.646\,\mathrm{Re}_x^{-1/2} \qquad (5-22)$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad c_f = 0.664\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}$$

可见，与精确解相比，积分方程近似解相当接近

五、边界层能量积分方程的求解

1．设温度分布为

$$t = e + f\,y + g y^2 + h y^3$$

由 4 个边界条件

$$y = 0,\ t = t_w \qquad y = \delta_t,\ t = t_\infty$$

$$y = 0,\ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \qquad y = \delta_t,\ \frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

确定 4 个系数： $e,\ f,\ g,\ h$

2．得到边界层中的温度分布为

求解过程见教本第三版附录 p.417~418

$$\frac{t - t_w}{t_\infty - t_w} = \frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \qquad \text{(5-18)}$$

3．热边界层的厚度为

$$\delta_t = 4.52\,\mathrm{Pr}^{-1/3}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \qquad \text{(5-19)}$$

4．局部换热系数和局部努塞尔数

$$h_x = 0.332 \frac{\lambda}{x} \mathrm{Re}_x^{1/2} \mathrm{Pr}^{1/3}$$
$$Nu_x = 0.332 \mathrm{Re}_x^{1/2} \mathrm{Pr}^{1/3} \quad \text{(5-20)}$$

5．平均努塞尔数

$$Nu = 0.664 \mathrm{Re}^{1/2} \mathrm{Pr}^{1/3} \quad \text{(5-21)}$$

七、小结

1．积分方程与微分方程的区别及其共同点

- 均运用了基本守恒定律

1．积分方程与微分方程的区别及其共同点

- 微分方程推导时：针对的是一个微元控制体 $dx\,dy\,dz$，三维考虑 x, y, z 三个参量，二维考虑两个参量。

- 积分方程推导时：针对的是一个有限控制体 $\Delta x \cdot l$，二维，但忽略了 y 向变量，仅考虑了 x 向变量。

1．积分方程与微分方程的区别及其共同点

- 推导能量微分方程时假定：摩擦耗散热可放在内热源中处理。

- 推导能量积分方程时假定：常物性；流速充分小，从而可把因内摩擦而引起的边界层内的温度升高忽略。

2．与微分方程相比，积分方程的近似性何在

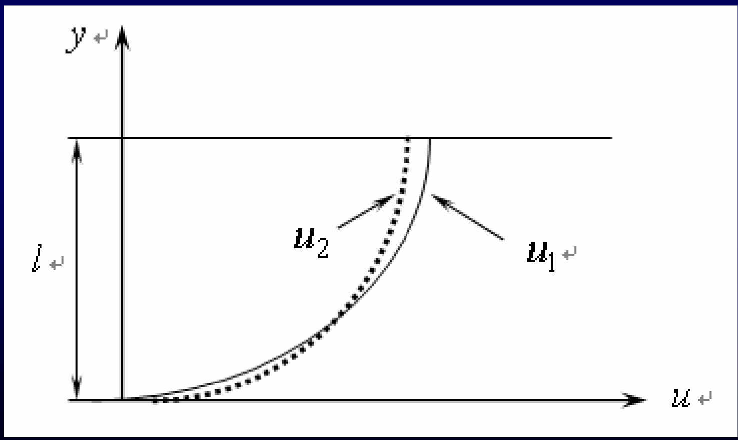
- 通常，由积分方程求出的分析解称为近似解，以区别于微分方程的精确解。
- 从推导过程看，微分方程要求在微元控制体内的流体的每个质点均满足守恒关系。

2．与微分方程相比，积分方程的近似性何在

- 而积分方程只要求在控制体的进出口截面（其截面积为 $l \cdot 1$）处整体满足守恒定律，即要求在进出口截面上的积分平均值满足守恒定律：

$$\int_0^l u_1 \, dy = \int_0^l u_2 \, dy$$

只要求两根速度分布曲线与 y 轴间的面积相等，即认为两者无差别；实际上速度分布可能完全不同。



3．积分方程求解过程中需要用微分方程的某些结论

- 例如：确定速度分布多项式中的待定系数时，引用了

$$y = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

3．积分方程求解过程中需要用微分方程的某些结论

- 说明：
  - 积分方程的求解有赖于微分方程（但不必具体求解）。
  - 积分方程的求解结果的准确程度往往要用微分方程的解来检验。

4．由于数学上简单，积分方程仍有一定的实用价值。但随着数值计算和大型计算机的发展，微分方程的数值解逐渐占优势地位。

5. 速度分布和温度分布

- 求解边界层动量积分方程和边界层能量积分方程时，需要知道速度分布和温度分布。
- 前面我们假设用多项式来表示，问题：

  - 实际的速度分布和温度分布是否能用这样的多项式来表示？
  - 仅靠边界上两点的性质来确定多项式的系数值，这种做法是否可靠？
- 回答这些问题只能看“积分方程的求解结果与微分方程的求解结果或实验结果是否相符”而定。

表5-1　不同速度分布的求解结果

采用的速度分布	摩擦系数
白拉修斯的精确解	$0.664\,\mathrm{Re}_x^{-0.5}$
$\frac{u}{u_\infty}=\frac{y}{\delta}$	$0.578\,\mathrm{Re}_x^{-0.5}$
$\frac{u}{u_\infty}=2\frac{y}{\delta}-\left[\frac{y}{\delta}\right]^2$	$0.727\,\mathrm{Re}_x^{-0.5}$

采用的速度分布	摩擦系数
$\frac{u}{u_\infty}=\frac{3y}{2\delta}-\frac{1}{2}\left[\frac{y}{\delta}\right]^3$	$0.646\,\mathrm{Re}_x^{-0.5}$
$\frac{u}{u_\infty}=2\frac{y}{\delta}-2\left[\frac{y}{\delta}\right]^3+\left[\frac{y}{\delta}\right]^4$	$0.686\,\mathrm{Re}_x^{-0.5}$
$\frac{u}{u_\infty}=\sin\left[\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right]$	$0.655\,\mathrm{Re}_x^{-0.5}$

- 可以看出，不同结果相差 20% 以上，从这点看，这种解法是有点任意性。

5.5 比拟理论求解湍流换热方法简介

一、比拟理论的基本思想（p.214）

实际工程应用中最感兴趣的是，流动过程中的阻力和换热强度，即阻力系数 c_f 与换热系数 h。那么 c_f 与 h 有什么关系？

5.5 比拟理论求解湍流换热方法简介

1．目的

- 建立 $Nu = f(c_f)$ 的关系式
- 通过类比，利用易测定的（通过实验）阻力系数 c_f
- 求不易测的换热系数 h
- 因为测定流动阻力系数要比测定换热系数容易得多

5.5 比拟理论求解湍流换热方法简介

2．原理

- 湍流流动时，当流体中的一个微团从一个位置脉动到另一个位置时将产生
  - (1) 不同流速层之间有附加的动量交
  - (2) 不同温度层之间的流体产生附加的热量交换

5.5 比拟理论求解湍流换热方法简介

- 这种由于湍流脉动而产生的附加切应力及热量传递称为湍流切应力及湍流热流密度
- 既然湍流中的附加切应力及热流密度都是由于流体微团的脉动所致，所以湍流中的热量传递与流动阻力之间一定存在内在的联系

5.5 比拟理论求解湍流换热方法简介

3．应用范围

- 普遍适用于层流、湍流、绕流、脱体流，但主要用于湍流（因为湍流中的换热系数不好求，相对而言，层流的换热系数好求）

二、湍流动量传递和热量传递

- 1. 假定：由于微团脉动所造成的切应力可采用类似于分子扩散所引起的切应力那样的计算公式：

$$\tau = \tau_l + \tau_t = \rho \nu \frac{du}{dy} + \rho \nu_t \frac{du}{dy}$$

$$= \rho(\nu + \nu_t)\frac{du}{dy} \qquad (a)\ \text{p.215}$$

类似地，热流密度为：

$$q = q_l + q_t = -\rho c_p a \frac{dt}{dy} - \rho c_p a_t \frac{dt}{dy}$$

$$= -\rho c_p (a + a_t)\frac{dt}{dy} \qquad (b)\ \text{p.215}$$

- 以上两式中：u, t 均为时间平均值
- ν_t 为湍流动量扩散率（又称：湍流粘度），其量纲与 ν 相同
- a_t 为湍流热扩散率，其量纲与 a 相同

2. 可以证明，若用：时均值代替瞬时值

- $(\nu+\nu_t)$ 代替 ν；
- $(a+a_t)$ 代替 a；

则层流边界层动量方程（教本）(5-16) 及能量方程（教本）(5-17) 也适用于湍流边界层

即湍流边界层动量方程及能量方程为

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=(\nu+\nu_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(5-22)=教本(5-24)

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=(a+a_t)\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

(5-23)=教本(5-25)

3. 引入下列无量纲量：

$$x^* = x/l \qquad y^* = y/l \qquad u^* = u/u_\infty$$

$$v^* = v/u_\infty \qquad \Theta = \frac{t - t_w}{t_\infty - t_w}$$

则有

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{u_\infty l}(\nu + \nu_t)\frac{\partial^2 u^*}{(\partial y^*)^2}$$

(5-24) = 教本(5-26)

$$u^* \frac{\partial \Theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta}{\partial y^*} = \frac{1}{u_\infty l}(a + a_t)\frac{\partial^2 \Theta}{(\partial y^*)^2}$$

(5-25) = 教本(5-27)

边界条件为

$$y^* = 0 \qquad v^* = 0 \qquad u^* = 0 \qquad \Theta = 0$$

(5-26) = 教本(5-28)

$$y^* = \delta / l \qquad u^* = 1 \qquad v^* = v_{\delta_t} / u_\infty \qquad \Theta = 1$$

(5-27) = 教本(5-29)

三、比拟理论小结

- 1．比拟理论的优点，可用于湍流流动。但须在实验求出阻力系数的基础上，才能用比拟关系式
- 2．半经验方法，因为阻力系数须由实验求出。

三、比拟理论小结

- 3．其他比拟理论
  - (a) 雷诺比拟。一层模型，紊流流场为单一紊流层，无层流底层
  - (b) 普朗特比拟。二层模型（前进了一步），分层流底层和紊流核心
  - (c) 卡门比拟。三层模型（又进了一步），分层流底层、缓冲层和紊流核心

下面请同学们自己看，从 p.215 下半页到 p.218 本章完。问题：

(1) 为什么本节的结果只适用于平板。

答：因为(5-31)式中 $\frac{dp}{dx}=0$ 参见p142）