

基于分布参数模型的柔性臂变结构控制

曹小涛, 李元春

(吉林大学 通信工程学院, 长春 130022)

摘要:提出了一种针对柔性臂分布参数模型的变结构控制方法,解决了系统存在参数不确定性和在外部干扰下的镇定问题。通过 Lyapunov 函数方法设计了系统的变结构控制器,其中滑模面设计为关节角、关节角速度和柔性臂根部应变的线性组合。由线性算子半群理论和 LaSalle 不变集原理证明了闭环系统是渐近稳定的。仿真结果验证了该方法的有效性。

关键词:自动控制技术;柔性臂;变结构控制;线性算子半群;LaSalle 不变集原理

中图分类号: TP241 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5497(2008)04-0924-06

Variable structure control of flexible manipulator based on distributed parameter model

CAO Xiao-tao, LI Yuan-chun

(College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

Abstract: A sliding mode variable structure control method was proposed based on distributed parameter model of flexible manipulator, and the stabilization problem of the controlled system with uncertain parameter and disturbance was resolved. The variable structure controller was designed by use of Lyapunov function method, and sliding surface was chosen as a linear combination of joint angle, joint angle velocity and root strain of flexible manipulator. An asymptotical stability of the closed loop system was proved by using linear operator semigroup and LaSalle invariance principle. Simulation results were presented to validate the proposed controller performance.

Key words: automatic control technology; flexible manipulator; variable structure control; semigroup of linear operator; LaSalle invariance principle

近年来,柔性臂动力学建模与控制得到了众多学者的广泛关注^[1-2],这是因为柔性臂与刚性臂相比较,具有结构轻、载重/自重比高,有较大的操作空间和较高的效率,响应速度快而准确等优点。然而由于柔性臂系统模型其本质上是无穷维的分布参数系统,且本身固有的振动特性,以及从其力矩输入到端点位移输出的传函是非最小相位的,

其动力学行为非常复杂,给系统的分析和控制器设计带来了很大的困难。因此,很多学者研究了其简化的集中参数模型,提出了奇异摄动^[3]、神经网络^[4]、模糊^[5]等控制策略。然而针对简化的集中参数模型存在控制和观测溢出问题,被忽略的剩余模态容易使闭环系统不稳定。另一方面,为解决溢出等问题,通常控制器结构和阶次比较高,

收稿日期: 2007-07-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60375030;60674091)。

作者简介: 曹小涛(1980-),男,博士研究生.研究方向:机器人控制. E-mail:alfred-cao@tom.com

通信作者: 李元春(1962-),男,教授,博士生导师.研究方向:智能机械与机器人控制. E-mail:liyc@email.jlu.edu.cn

不易于工程实现。为解决集中参数模型所带来的问题,一些学者直接针对其分布参数模型,提出了 PDS 反馈^[6]、非线性力矩^[7]等控制方法。但这些方法的前提是柔性臂系统参数精确可知。文献[8]提出了一种针对参数不确定性的柔性臂系统的变结构控制策略,但在稳定性分析中忽略了系统零动态的复本征值,其结论被文献[9]证明是有误的。

本文研究了柔性臂的分布参数模型,避免了集中参数模型所带来的问题。针对存在参数不确定性和外部干扰影响下的分布参数模型,提出了一种新的滑模变结构控制方法。设计系统的滑模面为关节角、关节角速度和柔性臂根部应变的线性组合,通过 Lyapunov 函数方法设计了系统的变结构控制策略,使得系统在有限时间收敛到滑模面的同时,保证系统的状态是有界的。当系统收敛到滑模面后,由不确定系统转化为确定系统。由线性算子半群理论和 LaSalle 不变集原理证明了闭环系统是渐近稳定的。仿真结果表明,作者所提出的变结构控制方法在镇定系统关节角的同时有效地抑制了系统的弹性振动。

1 问题描述

本文的研究对象是水平面的单连杆柔性臂系统,如图 1 所示。 J 为转动惯量; EI 为抗挠刚度; ρ 、 l 分别为柔性臂的单位质量密度和长度; $\theta(t)$ 表示关节角; $u(t,r)$ 表示柔性臂位置 r 处在时间 t 时的弹性形变; $\tau(t)$ 表示控制力矩。本文分别以下标 t 和 r 表示变量对 t 和 r 的导数。考虑系统的输入通道存在外界干扰 τ_d 时其动力学模型如下^[7-8]

$$J\dot{\theta}_u(t) = \tau + \tau_d + EIu_{rr}(t,0) \quad (1)$$

$$u_{tt}(t,r) + \frac{EI}{\rho}u_{rrrr}(t,r) = -r\theta_{tt}(t) \quad (2)$$

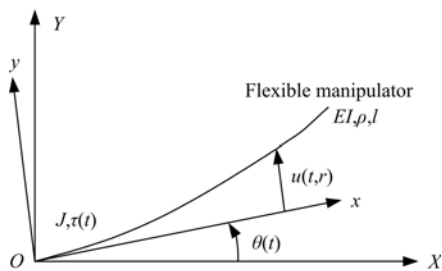


图 1 柔性臂系统

Fig. 1 Flexible manipulator system

$$\begin{cases} u(t,0) = 0, u_r(t,0) = 0 \\ u_{rr}(t,l) = 0 \\ u_{rrr}(t,l) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

微分方程(1)为系统的关节角方程,偏微分方程(2)为系统振动方程,方程(3)为方程(2)的边界条件。

2 变结构控制器设计

对于未知参数和外部干扰,给出以下假设。

假设 不确定参数及外部干扰满足条件 $EI \leq a_1, J \leq a_2, |\tau_d| \leq a_3$ 。其中 a_1, a_2 和 a_3 均为已知的正常数。

定义新变量

$$y(t,r) = u(t,r) + r\theta(t) \quad (4)$$

则系统的动力学模型(1)~(3)转化为

$$Jy_{tr}(t,0) = \tau + \tau_d + EIy_{rr}(t,0) \quad (5)$$

$$y_{tt}(t,r) + \frac{EI}{\rho}y_{rrrr}(t,r) = 0 \quad (6)$$

$$\begin{cases} y(t,0) = 0, y_r(t,0) = \theta(t) \\ y_{rr}(t,l) = 0 \\ y_{rrr}(t,l) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

对于系统(5)~(7),由式(4)可知控制目的为设计控制力矩 $\tau(t)$ 使得当 $t \rightarrow \infty$ 时, $y(t,r) \rightarrow 0$ 。

首先定义滑模面为系统关节角、关节角速度和柔性臂根部应变的如下线性组合

$$s = y_r(t,0) + k_1 y_r(t,0) - k_2 y_{rr}(t,0) \quad (8)$$

式中: $k_1 > 0, k_2 > 0$ 为设计参数; $y_{rr}(t,0)$ 表示柔性臂的根部应变值。

注意到如果 $k_2 = 0$,则滑模面就成为传统的刚性臂控制中所用到的滑模面。这也是本文变结构方法与传统的刚性臂控制的区别。而在传统滑模面中加入 $y_{rr}(t,0)$ 项是为了稳定系统的需要。这将在下文的分析中得到验证。

定理 1 对于系统(5)~(7),在假设 1 成立的前提下,设计滑模变结构控制器为

$$\tau = -k_3 s - [a_3 + a_1 |y_{rr}(t,0)| + (k_1 a_2 + a_1/k_2) |y_r(t,0)| + k_2 a_2 |y_{rr}(t,0)|] \text{sgn}(s) \quad (9)$$

式中: $k_3 > 0$ 为设计参数; $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数。

系统将在有限时间收敛到滑模面 $s=0$,同时闭环系统是信号有界的。

证明 对于整个系统(5)~(7),考虑 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} EI \int_0^l (y_{rr})^2 dr + \frac{1}{2} \rho \int_0^l (y_r)^2 dr +$$

$$\frac{1}{2} J s^2 + \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_2} EI [y_r(t, 0)]^2$$

则 V_1 沿时间 t 的导数为

$$\dot{V}_1 = EI \int_0^l y_{rr} y_{trr} dr - EI \int_0^l y_t y_{trr} dr + J s \dot{s} + \frac{k_1}{k_2} EL y_r(t, 0) y_{tr}(t, 0)$$

对上式第二项分部积分并利用边界条件(7), 可得

$$\dot{V}_1 = -EI y_{rr}(t, 0) y_{tr}(t, 0) + J s \dot{s} + \frac{k_1}{k_2} EI y_r(t, 0) y_{tr}(t, 0)$$

将式(8)、式(5)及式(9)代入上式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -\frac{EI}{k_2} [y_{tr}(t, 0)]^2 - k_3 s^2 + \\ & s [\tau_d + EL y_{rr}(t, 0) + (k_1 J + \frac{EI}{k_2}) y_{tr}(t, 0) - \\ & k_2 J y_{trr}(t, 0)] - |s| [a_3 + a_1 |y_{rr}(t, 0)| + \\ & (k_1 a_2 + \frac{a_1}{k_2} |y_{tr}(t, 0)| + k_2 a_2 |y_{trr}(t, 0)|] \leq \\ & -\frac{EI}{k_2} [y_{tr}(t, 0)]^2 - k_3 s^2 \leq 0 \end{aligned}$$

上式表明: Lyapunov 函数 V_1 是有界的, 即 $V_1(T) \leq V_1(0) < \infty$, 对 $\forall T \geq 0$ 。因此当控制器设计为(9)时, 系统(5)~(7)是 Lyapunov 稳定的, 同时由 V_1 的结构可知 $s \in L_\infty, y_r(t, 0) \in L_\infty$, 且存在某一特定正常数 M_0 , 使得 $\|y_{rr}\|^2 \leq M_0, \|y_t\|^2 \leq M_0, (y_r(t, 0))^2 \leq M_0$ 。其中 $\|\cdot\|^2 = \int_0^l \cdot^2 dr$ 。易证

$$\begin{aligned} |y_r(t, r)| &= \left| \int_0^r y_{rr}(t, \xi) d\xi + y_r(t, 0) \right| \leq \\ & \sqrt{L \int_0^l (y_{rr}(t, \xi))^2 d\xi} + |y_r(t, 0)| \leq \\ & \sqrt{LM_0} + |y_r(t, 0)| \\ |y(t, r)| &= \left| \int_0^r y_r(t, \xi) d\xi \right| \leq \\ & \sqrt{L \int_0^l (y_r(t, \xi))^2 d\xi} \leq \\ & \sqrt{L^2 [\sqrt{LM_0} + |y_r(t, 0)|]^2} \end{aligned}$$

因此 $y_r(t, r) \in L_\infty, y(t, r) \in L_\infty$ 。同时由 V_1 的结构易知

$$\frac{1}{2} EI \int_0^l (y_{rr})^2 dr \in L_\infty, \frac{1}{2} \rho \int_0^l (y_t)^2 dr + V_1 \in L_\infty$$

假设柔性臂系统具有以下两个特性

特性 1 如果 $\frac{1}{2} EI \int_0^l (y_{rr})^2 dr \in L_\infty$, 对于 $\forall t$

$\in [0, \infty], \forall r \in [0, l]$, 则 $(\partial^n / \partial r^n) y(r, t) \in L_\infty$, 对于 $\forall t \in [0, \infty], \forall r \in [0, l]$, 其中 $n=2, 3, 4$ 。

特性 2 如果 $\frac{1}{2} \rho \int_0^l (y_t)^2 dr + V_2 \in L_\infty$, 对于 $\forall t \in [0, \infty], \forall r \in [0, l]$, 则 $(\partial^n / \partial r^n) y_t(r, t) \in L_\infty$, 对于 $\forall t \in [0, \infty], \forall r \in [0, l]$, 其中 $n=0, 1, 2, 3$ 。

由以上分析和两个特性易知: 闭环系统中的所有信号有界。则对于系统(5), 考虑 Lyapunov 函数

$$V_2 = \frac{1}{2} J s^2$$

上式对 s 沿时间 t 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = J s \dot{s} = & -k_3 s^2 + s [\tau_d + EI y_{rr}(t, 0) + \\ & k_1 J y_{tr}(t, 0) - k_2 J y_{trr}(t, 0)] - |s| [a_3 + \\ & a_1 |y_{rr}(t, 0)| + (k_1 a_2 + \frac{a_1}{k_2}) |y_{tr}(t, 0)| + \\ & k_2 a_2 |y_{trr}(t, 0)|] \leq -k_3 s^2 \leq 0 \end{aligned}$$

由于式(9)中的所有信号有界, 由滑模变结构控制方法, 上式表明系统(5)将在有限时间内收敛到滑模面 $s=0$ 。以下证明当 $s=0$ 时, 闭环系统同时也是渐近稳定的。

3 渐近稳定性分析

当 $s=0$ 时, 系统的闭环方程为

$$y_u(t, r) + \frac{EI}{\rho} y_{trrr}(t, r) = 0 \tag{10}$$

$$y_{tr}(t, 0) + k_1 y_r(t, 0) - k_2 y_{trr}(t, 0) = 0 \tag{11}$$

$$y(t, 0) = 0, y_{rr}(t, l) = 0, y_{trr}(t, l) = 0 \tag{12}$$

由式(10)~(12)可知, 当 $s=0$ 时, 式(5)转化为式(11), 而对于式(11), 系统已不存在参数不确定性和外部干扰。对于式(10), 虽然存在不确定参数 EI/ρ , 但是在实际系统中该参数满足 $EI/\rho > 0$, 在这个前提条件下, 该参数不影响整个系统的稳定性, 这将在以下分析中得到验证。因此, 通过控制器(9), 将一个存在参数不确定以及外部干扰的系统(5)~(7)转化为一个参数确定系统(10)~(12)。同时, 滑模面(11)构成了偏微分方程(10)的一个新的边界条件。

首先引入下列状态空间

$$\mathbf{H} \{ (u, v, u_r(0))^T \mid u \in \mathbf{H}_0^2, v \in L^2, u_r(0) \in \mathbf{R} \}$$

式中: $L^2 = \{ f : (0, l) \rightarrow \mathbf{R} \mid \int_0^l f^2 dx < \infty \}$, $\mathbf{H}^k =$

$\{f \in L^2 \mid f, f', \dots, f^{(k)} \in L^2\}, \mathbf{H}_0^k = \{f \in \mathbf{H}^k(0, l), f(0) = 0\}$ 。

对任意 $z, \tilde{z} \in H$, 定义以下内积

$$\langle z, \tilde{z} \rangle_H = EI \int_0^l u_r \tilde{u}_{rr} dr + \rho \int_0^l v \tilde{v} dr + \frac{k_1}{k_2} EI u_r(0) \tilde{u}_r(0) \quad (13)$$

式中: $z = (u, v, u_r(0))^T; \tilde{z} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u}_r(0))^T$ 。

则空间按 H 内积(13)成为 Hilbert 空间。闭环系统(10)~(12)可以表示为如下 H 上的发展方程

$$\begin{cases} \mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0 \end{cases} \quad (14)$$

式中: $\mathbf{Y} = (y, y_t, y_r(0))^T$ 。

算子 $\mathbf{A}: \mathbf{D}(\mathbf{A}) \subset H \rightarrow H$ 定义为

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u_r(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{EI}{\rho} u_{rrr} \\ v_r(0) \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{A}) = \{ & (u, v, u_r(0))^T \mid u \in H_0^3, \\ & v \in H_0^2, u_r(0) \in R, u_{rr}(l) = 0, u_{rrr}(l) = 0, \\ & v_r(0) + k_1 u_r(0) - k_2 u_{rr}(0) = 0 \} \end{aligned} \quad (16)$$

记系统收敛到滑模面的时间为 t_s , 记 t_s 时的 \mathbf{Y} 值为 $\mathbf{Y}(0)$, 则 $\mathbf{Y}_0 = (y(t_s, r), y_t(t_s, r), y_r(t_s, 0))^T$ 表示发展方程的初始值。

对于算子 \mathbf{A} , 给出以下引理

引理 1 算子 \mathbf{A} 是 H 上的耗散算子。

证明 对任意 $z \in H$, 由式(13)、式(15), 并分部积分可得

$$\begin{aligned} \langle z, \mathbf{A}z \rangle_H = & -EI u_{rr}(0) v_r(0) + \\ & \frac{k_1}{k_2} EI u_r(0) v_r(0) - \frac{EI}{k_2} [v_r(0)]^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

由上式可知算子 \mathbf{A} 是 H 上的耗散算子, 证毕。

不等式(17)同时表明对于闭环系统(10)~(12), 如果定义 Lyapunov 函数为

$$V_3 = \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}\|_H^2 \quad (18)$$

式中: $\|\cdot\|_H$ 表示由内积(13)诱导的范数。则

$$\dot{V}_3 = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{A}\mathbf{Y} \rangle = -\frac{EI}{k_2} [y_{tr}(0)]^2 \leq 0 \quad (19)$$

即算子 \mathbf{A} 耗散表明 $\dot{V}_3 \leq 0$ 。

引理 2 存在 $\lambda_0 > 0$, 使得 $\mathbf{R}(\lambda_0 \mathbf{I} - \mathbf{A}) = H$ 。

其中 $\mathbf{R}(\lambda_0 \mathbf{I} - \mathbf{A})$ 表示 $\lambda_0 \mathbf{I} - \mathbf{A}$ 的值域。

证明 为证引理 2, 对任意的 $\Psi = (f, g, f_r$

$(0))^T \in H$, 必须找到一个 $z \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$, 使得下列方程成立

$$(\lambda_0 \mathbf{I} - \mathbf{A})z = \Psi \quad (20)$$

上式相当于以下方程组

$$\lambda_0 u - v = f \quad (21)$$

$$\lambda_0 v + \frac{EI}{\rho} u_{rrr} = g \quad (22)$$

$$\lambda_0 u_r(0) - v_r(0) = f_r(0) \quad (23)$$

将式(21)代入式(22), 可得

$$\lambda_0^2 u + \frac{EI}{\rho} u_{rrr} = f^* \quad (24)$$

式中: $f^* = \lambda_0 f + g$ 。

由式(23)以及边界条件(16), 可得

$$u_{rr}(0) = c^* u_r(0) - h^* \quad (25)$$

式中: $c^* = (\lambda_0 + k_1)/k_2 > 0; h^* = f_r(0)/k_2$ 。

式(24)两端同乘以 φ 后从 0 到 l 积分, 可得

$$\int_0^l \lambda_0^2 u \varphi dr + \int_0^l \frac{EI}{\rho} u_{rrr} \varphi dr = \int_0^l f^* \varphi dr \quad (26)$$

式中: $\varphi \in H_0^2; \varphi_r(l) = 0; \varphi_{rr}(l) = 0$ 。

对式(26)分部积分并由边界条件(16)、(25)可得

$$\begin{aligned} \int_0^l \lambda_0^2 u \varphi dr + c^* \frac{EI}{\rho} u_r(0) \varphi_r(0) + \int_0^l \frac{EI}{\rho} u_r \varphi_{rr} dr = \\ \int_0^l f^* \varphi dr + \frac{EI}{\rho} \varphi_r(0) h^* \end{aligned} \quad (27)$$

由于 $c_i^* > 0$, 式(27)左侧是 φ, u 的强制双线性形式, 右侧是 φ 的有界线性泛函。由 Lax-Milgram 定理^[10]可知存在唯一解 u 满足方程(24), 然后未知变量 v 和 $u_r(0)$ 可由式(21)和式(23)分别确定。证毕。

由引理 1 和 2 以及 Lümer-Phillips 定理^[11]可知以下定理成立。

定理 2 算子 \mathbf{A} 生成 H 上的 C_0 压缩半群。

为证明闭环系统是渐近稳定的, 给出以下关于算子 \mathbf{A} 的预解式 $(\lambda_0 \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 的性质。

引理 3 对任意 $\lambda_0 \in \rho(\mathbf{A})$, 算子 \mathbf{A} 的预解式 $(\lambda_0 \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 是紧的, 其中 $\rho(\mathbf{A})$ 是算子 \mathbf{A} 的预解集。

证明 为证预解式 $(\lambda_0 \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 是紧的, 只需证明 \mathbf{A}^{-1} 存在且是 H 上的紧算子^[12]。算子 \mathbf{A}^{-1} 的存在性可以由方程 $-\mathbf{A}z = \Psi$ 得到, 即

$$-v = f \quad (28)$$

$$\frac{EI}{\rho} u_{rrr} = g \quad (29)$$

$$-v_r(0) = f_r(0) \tag{30}$$

由式(30)和条件(16)可得

$$k_1 u_r(0) - k_2 u_{rr}(0) = f_r(0) \tag{31}$$

微分方程(29)的解为

$$u(r) = c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + \frac{\rho}{6EI} \int_0^r (r-\tau)^3 g(\tau) d\tau \tag{32}$$

式中:系数 c_1, c_2 和 c_3 满足

$$c_1 = 2 \frac{k_2}{k_1} \left[\frac{\rho l}{2EI} \int_0^l g(\tau) d\tau - \frac{\rho}{2EI} \int_0^l (l-\tau) g(\tau) d\tau \right] + \frac{f_r(0)}{k_1} \tag{33}$$

$$c_2 = \frac{\rho l}{2EI} \int_0^l g(\tau) d\tau - \frac{\rho}{2EI} \int_0^l (l-\tau) g(\tau) d\tau \tag{34}$$

$$c_3 = -\frac{\rho}{6EI} \int_0^l g(\tau) d\tau \tag{35}$$

因此方程(29)有解存在,由式(28)、式(30)可得未知变量 v 和 $v_r(0)$ 为

$$v = -f \tag{36}$$

$$v_r(0) = -f_r(0) \tag{37}$$

由以上分析可知算子 A^{-1} 存在。

然后证明算子 A^{-1} 是 H 上的紧算子,首先证明以下不等式成立

$$\| -A^{-1}\Psi \|_{H^1 \times H^2 \times R} \leq K \| \Psi \|_H \tag{38}$$

由式(33)~式(35)可知,存在正常数 K_1, K_2, K_3 使下列不等式成立: $c_1^2 \leq K_1 [\| g(r) \|^2 + f_r^2(0)], c_2^2 \leq K_2 \| g(r) \|^2, c_3^2 \leq K_3 \| g(r) \|^2$ 。

由以上不等式和式(32),可知存在正常数 K_4 使下列不等式成立

$$\| u \|_{H^1}^2 \leq K_4 \| g(r) \|^2 \tag{39}$$

由关系式

$$v(r) = -f(r) = -\int_0^r (r-\tau) f_{rr}(\tau) d\tau - r f_r(0)$$

易知存在正常数 K_5 满足下列不等式

$$\| v \|_{H^1}^2 \leq K_5 [\| f_{rr}(r) \|^2 + (f_r(0))^2] \tag{40}$$

由式(37)可知,存在正常数 K_6 满足

$$(v_r(0))^2 \leq K_6 (f_r(0))^2 \tag{41}$$

因此不等式(41)成立。当 Ψ 有界,式(41)表明算子 A^{-1} 将一个 H 中的有界集映射到 $H^1 \times H^2 \times R$ 中的有界集。因此由 Soblev 嵌入定理易知 A^{-1} 是紧算子。证毕。

由引理 3 和 LaSalle 不变集原理^[6]可知,式(14)的解将收敛于最大不变子集 $M = \{ z \in H | \dot{V}_3$

$= 0 \}$ 。因此为证明闭环系统是渐近稳定的,只需证明 M 仅包含零解。以下证明 M 仅包含零解。

当 $\dot{V}_3 = 0$ 时,由式(19)知 $y_{br}(t, 0) = 0$, 此时系统方程为

$$y_{tt}(t, r) + \frac{EI}{\rho} y_{tttt}(t, r) = 0 \tag{42}$$

$$k_1 y_r(t, 0) = k_2 y_{rr}(t, 0) \tag{43}$$

$$y(t, 0) = 0, y_{rr}(t, l) = 0, y_{rrr}(t, l) = 0 \tag{44}$$

$$y_{tr}(t, 0) = 0 \tag{45}$$

由文献[7]的分析结果可知,以上系统仅零解存在。因此由 LaSalle 不变集原理可知以下定理成立。

定理 3 闭环系统(10)~(12)是渐近稳定。

综合定理 1 和 3,给出主要结果(定理 4)。

定理 4 对于柔性臂系统(1)~(3),在不稳定参数和外部干扰满足假设 1 的条件下,当变结构控制器设计为式(9)时,闭环系统渐近稳定。

注 1 以上从算子半群和滑模面的有限时间到达的角度分析了闭环系统的稳定性。由于 $\dot{V}_1 \leq -\frac{EI}{k_2} [y_{br}(t, 0)]^2 - k_3 s^2$, 积分可得, $\int_0^\infty \frac{EI}{k_2} [y_{br}(t, 0)]^2 dt + \int_0^\infty k_3 s^2 dt \leq V(0) - V(\infty) < \infty$, 表明 $y_{br}(t, 0) \in L_2, s(t) \in L_2$, 由第 2 节的分析可知闭环系统的所有信号有界,因此有 $s \in L_\infty, y_r(t, 0) \in L_\infty$, 由特性 1 和 2 可知, $\dot{s} \in L_\infty, y_{tr}(t, 0) \in L_\infty$ 。因此 $s(t) \in L_2 \cap L_\infty, \dot{s}(t) \in L_\infty, y_{br}(t, 0) \in L_2 \cap L_\infty, y_{trr}(t, 0) \in L_\infty$, 由 Barbalat 引理^[13]可知,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $s(t) \rightarrow 0, y_{br}(t, 0) \rightarrow 0$ 。因此滑模面 $s(t)$ 和关节角速度 $y_{br}(t, 0)$ 渐近收敛到 0。当 $s(t) \rightarrow 0, y_{br}(t, 0) \rightarrow 0$ 时,闭环系统仍然收敛到仅有零解存在的方程(45)~(48),因此闭环系统是渐近稳定的。

4 数值仿真结果

在数值仿真中,系统参数选择为 $l = 0.71 \text{ m}, \rho = 0.5 \text{ kg/m}, EI = 6.5 \text{ Nm}^2, J = 0.5 \text{ kg/m}$ 。系统输入通道加入的干扰为 $\tau_d = 0.9 \sin(1.2 t + 0.3)$ 。不确定参数的上界选择为 $a_1 = 7, a_2 = 0.8, a_3 = 1.2$ 。控制器参数选择为 $k_1 = 3.5, k_2 = 2.5, k_3 = 0.5$ 。系统的初始角度选择为 $\theta = 0.8 \text{ rad}$ 。

对于分布参数模型(1)~(3),在数值仿真中,采用本征值展开的方法^[14]取其有限维近似,从仿真结果来看,由于前 2 维之后的其他维数对仿真

结果影响不大,因此近似维数取为前 2 维,系统在 5 s 内的仿真结果如图 2 所示。

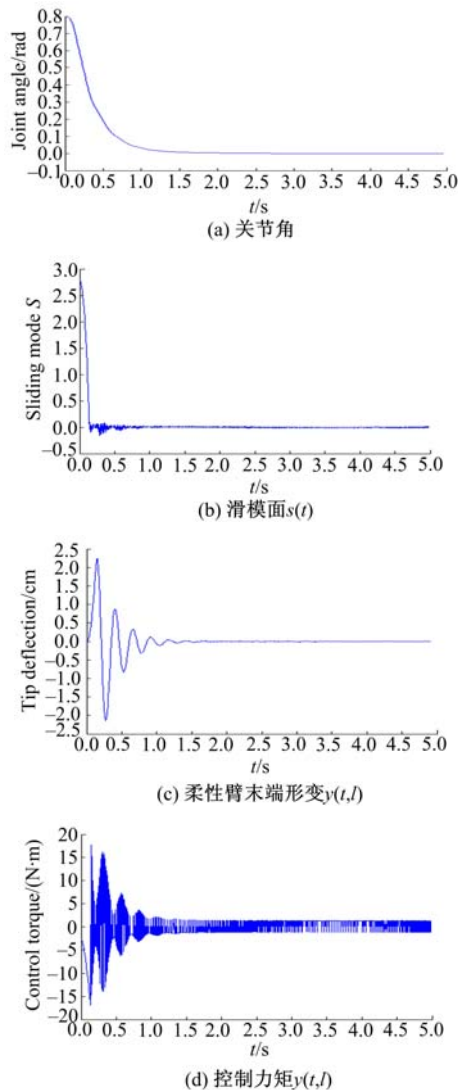


图 2 仿真结果 $\text{sgn}(s)$

Fig. 2 Simulation results $\text{sgn}(s)$

由仿真结果可以看出,柔性臂的关节角渐近收敛到零,并且柔性臂的振动得到了抑制。这表明了作者所提出的变结构控制策略的有效性。

5 结束语

提出了一种新的基于分布参数模型的柔性臂变结构控制方法,避免了传统的基于集中参数模型所带来的弊端,解决了系统存在参数不确定性和外部干扰下的系统镇定问题。通过在传统滑模面中增加一项柔性臂的根部应变值,系统在关节角渐近收敛的同时,其振动也得到了抑制。理论分析和数值仿真验证了本文的控制策略。而且,本文的控制策略结构简单,便于工程实现。

参考文献:

- [1] Guo B Z, Wang J M. The well-posedness and stability of a beam equation with conjugate variables assigned at the same boundary [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(12): 2087-2093.
- [2] Zhang X P, Xu W W, Nair S S, et al. PDE modeling and control of a flexible two-link manipulator [J]. IEEE Transaction on Control Systems Technology, 2005, 13(2): 301-312.
- [3] 李元春, 陆佑方, 唐保健. 双连杆柔性臂轨迹跟踪的鲁棒控制 [J]. 自动化学报, 1999, 25(3): 330-336.
Li Yuan-chun, Lu You-fang, Tang Bao-jian. Robust control for trajectory tracking of a two-link flexible manipulator [J]. Acta Automatica Sinica, 1999, 25(3): 330-336.
- [4] Tian L F, Collins C. A dynamic recurrent neural network-based controller for a rigid-flexible manipulator system [J]. Mechatronics, 2004(14): 471-490.
- [5] Lin J, Lewis F L. Two-time scale fuzzy logic controller of flexible link robot arm [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 139: 125-149.
- [6] Luo Z H, Guo B Z, Omer M. Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications [M]. Berlin: Springer, 1999.
- [7] Luo Z H, Feng D X. Nonlinear torque control of a single-link flexible robot [J]. Journal of Robotic Systems, 1999, 16(1): 25-35.
- [8] Ge S S, Lee T H, Zhu G, et al. Variable structure control of a distributed-parameter flexible beam [J]. Journal of Robotic Systems, 2001, 18(1): 17-27.
- [9] Yuan K, Liu L Y. On the stability of zero dynamics of a single-link flexible manipulator for a class of parameterized outputs [J]. Journal of Robotic Systems, 2003, 20(10): 581-586.
- [10] Francis C, Omer M. On the stabilization of a flexible beam with a tip mass [J]. SIAM J Control Optim, 1998, 36(6): 1962-1986.
- [11] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [12] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators [M]. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [13] Slotine J E, Li W P. Applied Nonlinear Control [M]. New York: Prentice-Hall, 1991.
- [14] Fumitoshi M, Takashi O, Yuri V O. Proportional derivative and strain (PDS) boundary feedback control of a flexible space structure with a closed-loop chain mechanism [J]. Automatica, 2002, 38: 1201-1211.