

结合反问题技巧对一维海温模式变分资料同化的理论分析及数值试验*

黄思训^{①②**} 韩 威^① 伍荣生^②

(① 解放军理工大学气象学院, 南京 211101; ② 南京大学中尺度灾害性天气教育部重点实验室, 南京 210093)

摘要 以一维海温模式为例, 采用变分资料同化技术及处理数学物理反问题的技巧, 对初始条件、边界条件和模式参数等进行最优估计和确定. 为了克服反问题中不适定性带来的困难, 例如对于依赖于时间和空间的模式参数的估计, 引进了反问题中的正则化思想, 在目标泛函中增加了稳定泛函, 其目的在于克服不适定和计算不稳定. 数值试验结果表明, 与采用通常的变分同化技术相比, 引进正则化思想以后的变分同化技术, 无论目标泛函的下降速度、迭代收敛速度, 还是解的精度都有较明显的改进.

关键词 海温模式 正则化 变分资料同化

气象学和物理海洋学模式中的资料同化技术的研究和发展是目前国际上的一个热点问题. 资料同化和反问题方法, 是综合利用模式的动力学信息和各种观测中所包含的信息, 对模式未知或误差较大的初边值条件和模式参数进行最优估计. Zou^[1] 等对 NMC 的 MRF 绝热版本谱模式中的张弛系数进行了估计, Wang^[2] 等估计了 FSU 绝热谱模式中同样的参数, Stauffer 等^[3] 估计了一维线性浅水模式中的张弛系数. Wergen^[4] 利用观测资料对一维浅水模式的初始状态和强迫参数进行了优化, 发现即使观测资料中存在噪声, 被估计的量也能收敛到可以接受的精度. 在物理海洋学中, 由于观测资料稀少并且模式不够完善, 变分同化技术更为重要. 自 20 世纪 90 年代以来, 利用简化的海洋模式进行了许多资料变分同化方面的研究. Panchang 等^[5] 估计了潮汐模式中的底摩擦系数, Smedstad 等^[6] 估计了赤道太平洋约化重力模式中的相速度. Yu 等^[7] 同时估计了风应力系数和涡粘廓线, Eknes 等^[8] 则采用弱约束的限制优化了同样的参数. Navon^[9] 对其他相关科学领域中参数估计问题做了综合的回顾.

虽然变分同化技术已经取得了很大成功, 但是仍有一些根本的理论和 technical 问题没有得到很好的解决, 其中一个就是问题的不适定性. Richardson 等^[10] 首先注意到利用伴随方法, 对依赖于时间和空间的参数进行估计中, 当资料存在较大误差时, 解会出现不稳定和不惟一. 本文利用变分同化技术, 结合反问题中的正则化思想, 以一个简化的一维海温模式为例, 对物理海洋学中的变分资料同化问题系统地进行了研究. 在过去的涡粘系数估计的研究中, 涡粘系数只依赖于空间, 这在许多情况下是不合适的. 而且, 海表太阳辐射、海表热通量和初始温度分布的观测和确定都存在较大的误差, 需要通过同化同时进行修正. 在本研究中, 对模式的初

2003-05-06 收稿

* 国家自然科学基金(批准号: 40075014, 40175014)和上海市科学技术协会重点基金(批准号: 02DJ14032)资助项目

** E-mail: huanqxs@publicl.ptt.js.cn

值、边界条件、垂直涡动扩散系数和海表太阳辐射,利用变分同化技术同时进行了修正和优化.为克服不适定性带来的困难,尤其是对于依赖于时间和空间的垂直涡动扩散系数的修正,在目标泛函中引进了正则化项作为稳定泛函,以克服系统的不适定及计算中的不稳定.

1 连续模式的变分资料同化

这里采用描述海洋上层垂直温度演变的一维海温模式^[11],模式的控制方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\nu I_0}{\rho_0 C_p} \exp(-\nu z), \quad (z, t) \in (0, H) \times (0, \tau), \quad (1a)$$

初始条件为

$$T|_{t=0} = U(z), \quad (1b)$$

边界条件为

$$\text{海表面:} \quad \left[K \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{I_0}{\rho_0 C_p} \right]_{z=0} = \frac{Q(t)}{\rho_0 C_p}, \quad (1c)$$

$$\text{下边界:} \quad K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \quad (1d)$$

式中 $T = T(t, z)$ 是海温, $K = K(t, z)$ 是垂直涡动扩散系数, ρ_0 是海水密度, C_p 是海水比热, ν 是光衰系数, H 是海洋上层的深度, I_0 是海表太阳辐射入射分量, $Q(t)$ 是海表热通量. 根据偏微分方程的理论^[12], 如果初边值条件和模式参数 (K, I_0) 已知且具有一定的光滑性, 则模式(1)存在唯一解.

假定 ν, ρ_0 和 C_p 为已知常数, 初边值条件 $U(z)$ 及 $Q(t)$ 和模式参数 $K(t, z)$ 及 $I_0(t)$ 为未知函数, 需通过变分同化来最优确定. 现在的问题是, 假定在整个时空区域给出观测资料 $T_{\text{obs}}(t, z)$, 寻找最优的初边值条件 $U(z)$ 及 $Q(t)$ 和模式参数 $K(t, z)$ 及 $I_0(t)$, 使得目标泛函

$$J[U, K, Q, I_0] = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^H (T - T_{\text{obs}})^2 dz dt \quad (2)$$

达到极小.

在实际数值计算中, 采用(2)式形式的目标泛函对最优确定初值 U (设 K, Q, I_0 已知) 是合适的, 但如果模式参数 $K(t, z)$ 和 $I_0(t)$ 也需进行修正, 由于问题的不适定性以及目标泛函在某种意义上来说缺乏凸性, 会造成数值计算的不稳定. 为了克服这种困难, 我们采用数学物理反问题中的正则化思想^[13], 根据对物理问题的先验知识, 引入稳定的泛函来增加约束, 改进的目标泛函如下:

$$J[U, K, Q, I_0] = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^H (T - T_{\text{obs}})^2 dz dt + \frac{1}{2} \gamma^2 \int_0^\tau \int_0^H K(t, z) \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 dz dt, \quad (3)$$

其中 $\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^H K(t, z) \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 dz dt$ 为引进的稳定泛函, γ^2 是正则化参数.

下面分三步导出目标泛函(3)关于 U, K, Q 和 I_0 的梯度.

第 1 步 导出(1)的切线性模式.

对 U, K, Q 和 I_0 扰动如下:

$$U(z) \rightarrow U(z) + \alpha u(z), \quad K(t, z) \rightarrow K(t, z) + \alpha k(t, z),$$

$$Q(t) \rightarrow Q(t) + \alpha q(t), \quad I_0(t) \rightarrow I_0(t) + \alpha I(t).$$

令 $\tilde{T}(t, z)$ 为扰动后方程(1)的解, 定义 \hat{T} 为 T 在 (U, K, Q, I_0) 点上沿 $u, k, q,$ 和 I 方向的 Gâteaux 导数, 即

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tilde{T} - T}{\alpha} = \hat{T}, \tag{4}$$

则 \hat{T} 满足如下偏微分方程的初边值问题:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(t, z) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(t, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\nu I}{\rho_0 C_p} \exp(-\nu z), \tag{5a}$$

$$\hat{T}|_{t=0} = u(z), \tag{5b}$$

$$\left[K \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} + k \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{I}{\rho_0 C_p} \right]_{z=0} = \frac{q}{\rho_0 C_p}, \tag{5c}$$

$$\left[K \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} + k \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=H} = 0. \tag{5d}$$

第 2 步 导出 $J[U, K, Q, I_0]$ 在 (U, K, Q, I_0) 点上沿 $u, k, q,$ 和 I 方向的 Gâteaux 导数.

$$J'[U, K, Q, I_0; u, k, q, I] = \int_0^\tau \int_0^H (T - T_{\text{obs}}) \hat{T} dz dt + \gamma^2 \int_0^\tau \int_0^H \left[K \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] dz dt. \tag{6}$$

另一方面, 由定义可知,

$$\begin{aligned} J'[U, K, Q, I_0; u, k, q, I] &= \int_0^H \nabla_U J \cdot u dz + \int_0^\tau \int_0^H \nabla_K J \cdot k dz dt \\ &\quad + \int_0^\tau \nabla_Q J \cdot q|_{z=0} dt + \int_0^\tau \nabla_{I_0} J \cdot I dt. \end{aligned} \tag{7}$$

第 3 步 导出模式(5)的伴随方程及伴随边界条件.

对(5a)式两边乘以 P , 在区域 $[0, \tau] \times [0, H]$ 上积分, 于是

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int_0^\tau \int_0^H P \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} dz dt \\ &= \int_0^H P \hat{T}|_{t=\tau} dz - \int_0^H P \hat{T}|_{t=0} dz - \int_0^\tau \int_0^H \hat{T} \frac{\partial P}{\partial t} dz dt, \\ \text{右边} &= \int_0^\tau \int_0^H P \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(K(t, z) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(t, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dt dz - \frac{\nu}{\rho_0 C_p} \int_0^\tau \int_0^H I \exp(-\nu z) \cdot P dt dz \\ &= \int_0^\tau P \left[K(t, z) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} + k(t, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=H} dt - \int_0^\tau P \left[K(t, z) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} + k(t, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=0} dt \\ &\quad - \int_0^\tau \int_0^H \left[K \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} + k \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} \right] dt dz - \frac{\nu}{\rho_0 C_p} \int_0^\tau \int_0^H I \exp(-\nu z) \cdot P dt dz. \end{aligned}$$

利用边界及初值条件(5b~5d), 可得:

$$\begin{aligned} & \int_0^H P\hat{T}|_{t=\tau} dz - \int_0^H P\hat{T}|_{t=0} dz - \int_0^\tau \int_0^H \hat{T} \frac{\partial P}{\partial t} dz dt = \\ & - \int_0^\tau P \left[\frac{q}{\rho_0 C_p} - \frac{I}{\rho_0 C_p} \right] \Big|_{z=0} dt + \int_0^\tau \int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \left(K(t, z) \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \hat{T} dz dt - \int_0^\tau \left(\hat{T} K(t, z) \frac{\partial P}{\partial z} \right) \Big|_{z=H} dt \\ & + \int_0^\tau \left(\hat{T} \cdot K(t, z) \frac{\partial P}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} dt - \int_0^\tau \int_0^H \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} k(t, z) dz dt - \frac{\nu}{\rho_0 C_p} \int_0^\tau \int_0^H I \exp(-\nu z) P dt dz. \end{aligned} \tag{8}$$

引入伴随关系如下:

$$-\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial P}{\partial z} \right) - \gamma^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + (T - T_{\text{obs}}), \tag{9a}$$

$$P|_{t=\tau} = 0, \tag{9b}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \tag{9c}$$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial z} - \gamma^2 \frac{\partial T}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = 0. \tag{9d}$$

利用(9a)~(9d)式可得到:

$$\begin{aligned} & - \int_0^H [Pu]|_{t=0} dz + \int_0^\tau \int_0^H (T - T_{\text{obs}}) \hat{T} dt dz - \gamma^2 \int_0^\tau \int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) \hat{T} dt dz \\ & = - \int_0^\tau P \left[\frac{q}{\rho_0 C_p} - \frac{I}{\rho_0 C_p} \right] \Big|_{z=0} dt - \int_0^\tau \int_0^H \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} k(t, z) dt dz \\ & \quad - \frac{\nu}{\rho_0 C_p} \int_0^\tau \int_0^H I \exp(-\nu z) \cdot P dt dz + \gamma^2 \int_0^\tau K \frac{\partial T}{\partial z} \hat{T} \Big|_{z=0} dt. \end{aligned} \tag{10}$$

再利用(6)和(7)式,则(10)式可转化为

$$\begin{aligned} & - \int_0^H [Pu]|_{t=0} dz + \gamma^2 \int_0^\tau \left[K \frac{\partial T}{\partial z} \hat{T} \right] \Big|_{z=0} dt - \frac{1}{2} \gamma^2 \int_0^\tau \int_0^H k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 dt dz + \int_0^H \nabla_U J \cdot u dz \\ & + \int_0^\tau \int_0^H \nabla_K J \cdot k dt dz + \int_0^\tau [\nabla_Q J \cdot q] \Big|_{z=0} dt + \int_0^\tau \nabla_{I_0} J \cdot I dt \\ & = - \int_0^\tau P \left[\frac{q}{\rho_0 C_p} - \frac{I}{\rho_0 C_p} \right] \Big|_{z=0} dt - \int_0^\tau \int_0^H \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} k dt dz \\ & - \frac{\nu}{\rho_0 C_p} \int_0^\tau \int_0^H I \exp(-\nu z) \cdot P dt dz + \gamma^2 \int_0^\tau \left[K \frac{\partial T}{\partial z} \hat{T} \right] \Big|_{z=0} dt. \end{aligned} \tag{11}$$

由此得到

$$\nabla_U J = P(0, z), \tag{12a}$$

$$\nabla_K J = -\frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{2} \gamma^2 \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2, \tag{12b}$$

$$\nabla_Q J = -\frac{P(t, 0)}{\rho_0 C_p}, \tag{12c}$$

$$\nabla_{I_0} J = \frac{P(t, 0)}{\rho_0 C_p} - \frac{v}{\rho_0 C_p} \int_0^H \exp(-vz) P(t, z) dz. \quad (12d)$$

有了泛函对于 U, K, Q 和 I_0 的梯度形式(12)后, 可以采用迭代方法求得最优得 U, K, Q, I_0 . 记 $R^i = (U^i, K^i, Q^i, I_0^i)$, $R^0 = (U^0, K^0, Q^0, I_0^0)$ 为迭代初始点, 则迭代程序如下:

$$U^{i+1} = U^i - (\nabla_U J) \Big|_{R^i} \cdot \rho_U^i, \quad (13a)$$

$$K^{i+1} = K^i - (\nabla_K J) \Big|_{R^i} \cdot \rho_K^i, \quad (13b)$$

$$Q^{i+1} = Q^i - (\nabla_Q J) \Big|_{R^i} \cdot \rho_Q^i, \quad (13c)$$

$$I_0^{i+1} = I_0^i - (\nabla_{I_0} J) \Big|_{R^i} \cdot \rho_{I_0}^i, \quad (13d)$$

其中 $\rho_U^i, \rho_K^i, \rho_Q^i$ 和 $\rho_{I_0}^i$ 分别是 U, K, Q 和 I_0 的迭代步长. 这里我们应用牛顿迭代方法, 每次迭代调整步长使得目标泛函在迭代过程中单调下降. 如果 $J^i > J^{i-1}$, 则进行步长调整, 另 $J_0 = J_{i-1}$ 和 $\rho_0 = \rho^{i-1}$ 分别作为目标泛函和步长在步长调整过程中的初值, 其中下标 j 代表步长调整过程中的迭代次数, 然后减小步长

$$\rho_j = \alpha \rho_{j-1}, \quad (14)$$

其中 $\alpha \in (0, 1)$, 在我们的数值试验中, 取 $\alpha = 0.85$, 当 $J_j < J_0$ 时, 步长迭代过程结束且 $\rho^{i+1} = \rho_j$.

当目标泛函(3)满足迭代终止条件

$$J \leq \varepsilon \quad (15)$$

时, 迭代结束. 其中 ε 是给定的很小的正实数. 整个迭代过程可见示意图 1.

下面对以上结果作几点说明.

(i) 伴随模式(9)反向积分得到 $P(0, z)$ 和 $P(t, z)$ 是一个正问题, 可以与模式(1)使用同一个数值求解程序.

(ii) 如果模式(1)中 K 仅为 z 的函数, 则此时(12b)修正为

$$\nabla_K J = - \int_0^{\tau} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} dt + \frac{1}{2} \gamma^2 \int_0^{\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 dt. \quad (16)$$

(iii) 在迭代过程中步长的选择至为重要, 本研究中初始迭代步长是通过试验确定的, 在整个迭代过程中调整步长使目标泛函单调下降.

(iv) 如果 $K = K(z)$, 可以利用 PST (Pulse Spectral Technique, 脉冲谱)或 GPST (General Pulse Spectral Technique, 广义脉冲谱)^[14] 方法来最优确定 K . 利用 Laplace 变换, 时域上的反问题转化为复频域上的反问题, 通过 Green 函数可以化为第一类 Fredholm 型的积分方程, 然后可以迭代求解. 然而, 如果 $K = K(t, z)$, 不能使用 PST 和 GPST 方法. 更进一步, 使用 PST 和 GPST 方法只需要几个点上的观测资料(局部观测), 这里我们假设观测分布在整个空间上, 而采用变分同化方法.

2 数值试验

为检验上面的理论结果, 我们做了四个孪生数值试验. 变分资料同化和参数估计包括正向模式(1)的向前积分和伴随模式(9)的反向积分(如图 1). 这里使用 Microsoft Fortran Power Station 4.0 中提供的算法程序 MOLCH, 其中应用的是配点法(collocation method)^[15].

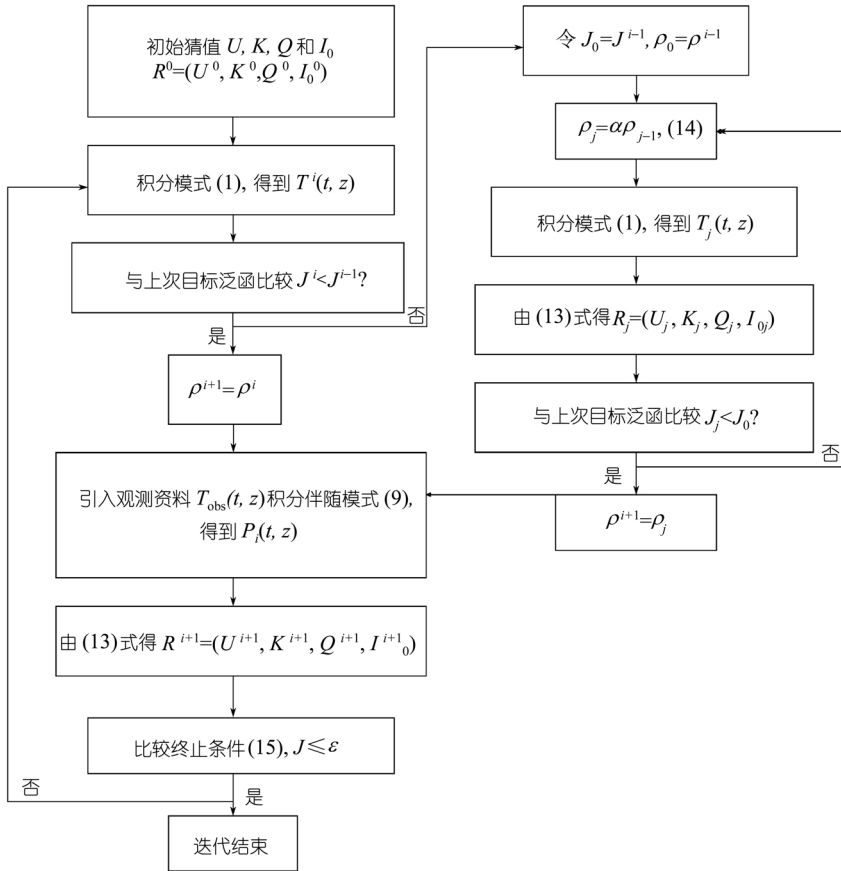


图 1 迭代过程示意图

我们可以对初值 $U(z)$, 边界条件 $Q(t)$, 涡动扩散系数 $K(t, z)$ 和海表太阳辐射的入射分量 I_0 同时进行最优估计, 但在这里只以初值条件和涡动扩散系数为例来说明理论的结果.

模式(1)的理想试验模式为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(t, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f(t, z), \quad (t, z) \in (0, 1.0) \times (0, \pi/2), \tag{17a}$$

$$T|_{t=0} = U(z), \tag{17b}$$

$$K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = Q(t), \tag{17c}$$

$$K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\pi/2} = 0. \tag{17d}$$

其中 $f(t, z) = \sin(z)[\cos(t) - \sin(t)]$, $Q(t) = \cos(t)$. 初始条件的真值为 $U(z) = \sin(z)$, 扩散系数的真值为 $K(t, z) = 1$, 理想模式 (17) 具有解析解 $T(t, z) = \sin(z)\cos(t)$. 我们取 $T(t, z) = \sin(z)\cos(t)$ 作为“观测资料”, 对初始条件和扩散系数给出带有扰动的初始猜值, 然后通过同化来修正初值和扩散系数. 空间等距离散成 $N - 1$ 分, 取 $N = 11$, 时间步数取 $M, M = 101$, 时间

步长为 0.01.

为便于表征数值计算结果, 定义了两个指数:

$$\text{初值误差的模} \quad E_U = \|U^i - U^T\| \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (U_j^i - U_j^T)^2}, \quad (18a)$$

$$\text{扩散系数误差的模} \quad E_K = \|K^i - K^T\| \equiv \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N (K_{jk}^i - K_{jk}^T)^2}, \quad (18b)$$

其中 i 代表第 i 次迭代, 上标 T 代表真解. 为验证对初值和扩散系数修正的有效性、目标泛函中增加的稳定泛函的作用(见(2)式)以及对二者同时修正的效果, 我们做了 4 个数值试验.

试验 1 初始条件取真解, 在涡动扩散系数上增加扰动, 在目标泛函中不增加稳定泛函, 即令 $\gamma = 0$.

$$U_0(z) = \sin(z), \quad K = 1 + 0.2z, \quad \rho_U^0 = 0.0, \quad \rho_K^0 = 0.02, \quad \gamma = 0. \quad (19a)$$

试验 2 在目标泛函中增加稳定泛函, 其他同于试验 1, 先验系数 γ 取为 0.001.

$$U_0(z) = \sin(z), \quad K = 1 + 0.2z, \quad \rho_U^0 = 0.0, \quad \rho_K^0 = 0.02, \quad \gamma = 0.001. \quad (19b)$$

图 2 是试验 1 和试验 2 的数值试验结果的比较.

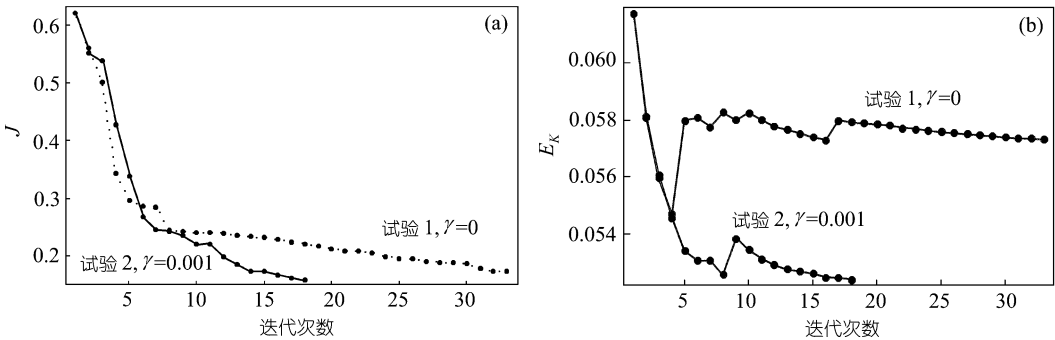


图 2 取不同的目标泛函情况下涡动扩散系数的迭代过程

(a) 目标泛函 J (这里为了比较两个方法的效果, 目标泛函都是根据式(1)计算得到的); (b) 涡动扩散系数误差的模 E_K

由图 2 可见, 在两个试验的迭代过程中, 目标泛函单调下降, 向 0 逼近, K 向真解收敛, 目标泛函中增加了稳定泛函使其下降速度更快. 由(12b)式可见, 因为 $\gamma^2 \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2$ 是非负的, 先验参数 γ 使目标泛函对于 K 的梯度更陡. 在试验 2 中, 扩散系数误差的模比在试验 1 中下降更快, 而且精度更高(图 2(b)). 这说明在对系数的估计和修正的过程中, 目标泛函中增加的稳定泛函是可取的.

下面的两个试验来验证 U 和 K 能否同步进行同化. 在试验 3 和试验 4 中, 对 U 和 K 的初始猜值增加误差, 试验 3 中令 $\rho_K^0 = 0.0$, 只对初值进行优化, 而在试验 4 中取不同的迭代步长, 对二者同步进行优化. 图 3 是数值试验的结果.

$$\text{试验 3} \quad U_0(z) = \sin(z) + 0.05z, \quad K = 1 + 0.2z, \quad \rho_U^0 = 1.0, \quad \rho_K^0 = 0.0, \quad \gamma = 0. \quad (19c)$$

试验 4 $U_0(z) = \sin(z) + 0.05z$, $K = 1 + 0.2z$, $\rho_U^0 = 1.0$, $\rho_K^0 = 0.01$, $\gamma = 0$. (19d)

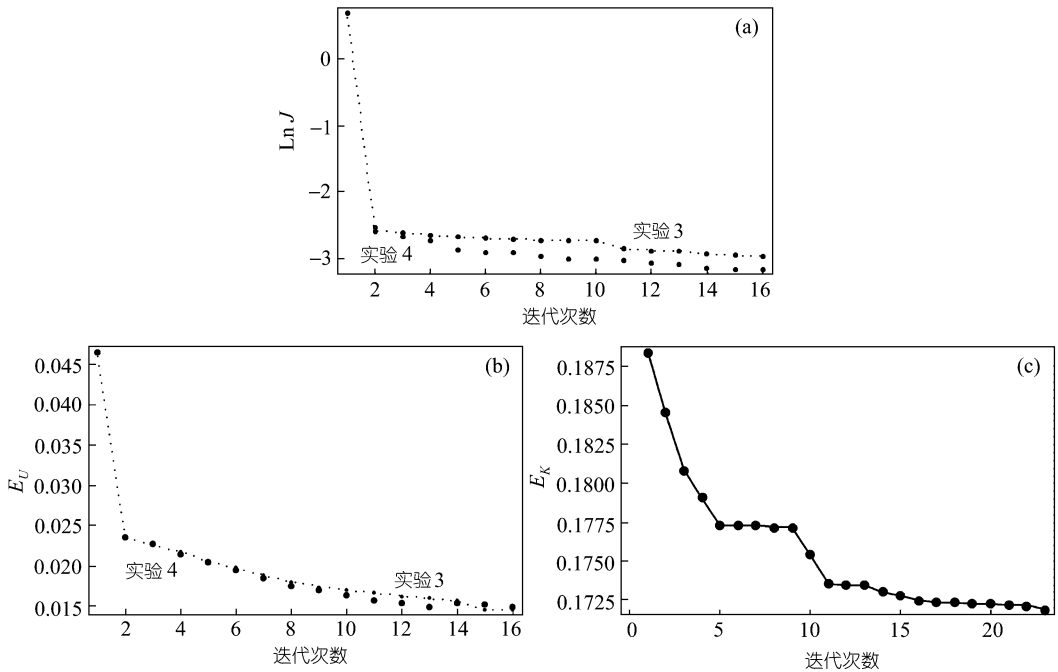


图 3 试验 3 和试验 4 的数值试验结果
(a) 目标泛函, (b) 初值误差, (c) 扩散系数误差

图 3 中的试验结果表明, 如果初始条件和模式参数都含有误差, 那么二者可以在同化过程中同步修正, 目标泛函趋向于 0, 初始条件和模式参数向其真解收敛(试验 4), 在这种情况下优于只对初值修正的结果(试验 3).

3 结论

上面利用变分同化技术, 结合反问题中的正则化思想, 基于简化的一维海温模式对气象学和物理海洋学中的资料同化问题进行了探讨. 在变分同化的过程中, 对初始条件、边界条件和模式参数可以同步进行最优估计. 这类问题是不适定的, 不适定问题给数值计算带来很大困难. 文献[16]及[17]指出, 系统地提出数值预报中的反问题是数值预报使用多时次历史资料这一研究工作的深化和推广, 具有重要的理论价值和实际意义. 本文中为克服不适定性带来的困难, 尤其是对依赖于时间和空间的模式参数的估计和修正(这里是涡动扩散系数), 在目标泛函中增加了一正则化项作为稳定泛函, 此正则化项与垂直热通量相关, 相当于从物理上增加了约束, 从而提高精度和克服计算中的不稳定. 数值试验的结果表明, 此方法是行之有效的.

还有一些问题值得进一步进行研究和探讨. (1) 本研究中, 在变分同化中引进了正则化思想, 正则化参数是作为一个先验参数确定的, 这是可以进一步改进的, 比如利用偏差原则^[18]

来最优选取; (2) 在迭代过程中, 步长的选取原则是使得目标泛函单调下降, 数值试验表明此原则是 very effective 的, 但还应进一步研究更好的方法; (3) 本研究中利用的是整体的观测资料, 但是实际情况往往是局部的, 非连续的观测资料, 这是需要进行研究的, 关于局部资料同化问题我们正在探讨, 初步结果参见文献[19].

参 考 文 献

- 1 Zou X, Navon I M, LeDimet F X. An optimal nudging data assimilation scheme using parameter estimation. *Q J R Meteor Soc*, 1992, 118: 1163~1186
- 2 Wang A, Navon I M, Zou X, et al. A truncated Newton optimization algorithm in meteorology applications with analytic Hessian/vector products. *Computational Optimization and Applications*, 1995, 4: 241~262
- 3 Stauffer D R, Bao J. Optimal determination of nudging coefficients using the adjoint equations. *Tellus*, 1993, 45A: 358~369
- 4 Wergen W. The effect of model errors in variational assimilation. *Tellus*, 1992, 44A: 297~313
- 5 Panchang V G, O'Brien J J. On the determination of hydraulic model parameters using the strong constraint formulation. In: Daviers A M, ed. *Modeling Marine Systems*. CRC Press Inc, 1989. 5~18
- 6 Smedstad O M, O'Brien J J. Variational data assimilation and parameter estimation in an equatorial Pacific Ocean model. *Progress in Oceanography*, 1991, 26: 179~241
- 7 Yu L, O'Brien J J. Variational estimation of the wind stress drag coefficient and the oceanic eddy viscosity profile. *J Physical Oceanography*, 1991, 21: 709~719
- 8 Eknes M, Evensen G. Parameter estimation solving a weak constraint variational formulation for an Ekman model. *J Geophys Res*, 1997, 102(c6): 12479~12491
- 9 Navon I M. Practical and theoretical aspects of adjoint parameter estimation and identifiability in meteorology and oceanography. *Dyn Atmos Oceans*, 1997, 27: 55~79
- 10 Richardson J E, Panchang V G. A modified adjoint method for inverse eddy viscosity estimation in coastal circulation models. In: Spaulding M L, et al, eds. *Estuarine and Coastal Modeling*. Proc 2nd Int Conf, Amer Soc Civil Engrs, New York, 1992. 733~745
- 11 McCormick M J, Scavia D. Calculation of vertical profiles of lake-averaged temperatures and diffusivity in Lakes Ontario and Washington. *Water Resour Res*, 1981, 17(2): 305~310
- 12 Friedman A. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc, 1964
- 13 Tikhonov A N, Arsenin V Y. *Solutions of Ill-posed Problems*. Washington: Winston and Sons, 1977
- 14 Chen Y M. Generalized pulse-spectrum technique. *Geophysics*, 1985, 50: 1664~1675
- 15 Madsen N K, Sincovec R F. Algorithm 540: PDECOL, general collocation software for partial differential equations. *ACM Trans Math Software*, 1979, 5: 326~351
- 16 郭秉荣, 江剑民, 丑纪范, 等. 气候系统的非线性特征及其预测理论. 北京: 气象出版社, 1996. 157~163
- 17 郜吉东, 丑纪范. 数值天气预报中两类反问题及一种数值解法——理想试验. *气象学报*, 1994, 52(2): 129~137
- 18 黄思训, 伍荣生. 大气科学中的数学物理问题. 北京: 气象出版社, 2001. 411~439
- 19 Huang S X, Han W. Application of regularization ideas in ill-posed problems of ocean variational data assimilation with local observations. *International Conference on Inverse Problems*, HongKong, 2002