一种新的非平稳信号分析方法——局域波分析 [1]

张海勇

(大连舰艇学院指控信息系　大连　116018)

摘　要　该文介绍一种新的非平稳信号分析方法——局域波分析．该方法源于瞬时频率的概念，它能把动态信号的局部特征正确地在时频域内予以描述．局域波分解的基不是固定的，而是随动态信号波形的变化而变化，具有自调节自适应的特征．与传统的时频分析方法相比，局域波分析有很多优点，它是分析非平稳信号的一般方法．该文讨论了局域波分析的应用，指出了该方法需进一步研究的有关问题．

关键词　非平稳信号，瞬时频率，局域波分析，局域波分解，基本模式分量，时频分析

中图号　TN911.7

1 引　言

Huang 等 [1] 于 1998 年提出了一种新的理论和计算方法特别适合非平稳信号的分析和处理，称为基于经验的模式分解及其 Hilbert 时频谱．这种方法与传统的分析方法 (包括 Fourier 分析) 不同，传统的分析方法只适用于代表线性过程的周期性或平稳数据序列．而这种方法主要是利用一种信号分解方法——基于经验的模式分解，把复杂的数据序列分解成简单的、有限个分量，称为基本模式分量 [1] ，得到的基本模式分量具有很好的 Hilbert 变换特性．该方法的主要创新是基本模式分量的引入，它的引入使得瞬时频率具有实际的物理意义．此外，瞬时频率的引入对复杂数据序列，消除了传统的信号分析方法 (如 Fourier 分析) 所产生的表示非平稳信号的伪谐波．由于它是基于信号局部特征的，因此适用于非平稳信号的处理．对分解得到的基本模式分量经过 Hilbert 变换之后计算出瞬时频率，该方法的最终结果的表示方法是一种时间-频率-能量分布，被定义为 Hilbert 谱．

该方法得到的 Hilbert 谱与传统的在频域内描述动态信号的功率谱不同．功率谱图上的任一条谱线代表一个同频率的周期信号，该信号分布在整个时间域内，称之为全域波 [2] ．离散 Fourier 变换是以信号的采样频率以及其谐波频率为基对动态信号进行分解，是一种固定时窗 (采样间隔) 和固定频窗 (频率间隔) 的变换，属于全域波变换．而非平稳信号的主要特征是其时变性，其频率是瞬变的，仅仅是在某一局部时间内才存在，称之为局域波 [2] ．快速 Fourier 变换及其相关的谱分析 (自谱、互谱、倒谱等) 为解决全域波问题提供了方便快捷的方法．而对于局域波却显示出很大的局限性．为此，各类时频分析方法相继出现．短时 Fourier 变换、小波分析、 Wigner-Ville 分布等方法不同程度上对非平稳信号的时变性给予了恰当的描述，大大改进了 Fourier 分解的不足．但总体说来，仍属于全域波的范畴之内．而 Huang 等提出的基于经验的模式分解及其 Hilbert 时频谱属于局域波范畴，称之为局域波分析 (LWA ， Local Wave Analysis) ，相应的信号分解方法称为局域波分解 (LWD ， Local Wave Decomposition) ．文章给出了瞬时频率和基本模式分量的定义，在此基础上分析了信号的分解过程，讨论了局域波分析的应用，并指出了该方法需进一步研究的有关问题．

2 瞬时频率的定义

对任一连续的时间信号 $X(t)$ ，可得到它的 Hilbert 变换 $Y(t)$ 为

$$Y(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{X(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

[1] 2002-04-30 收到， 2002-09-02 改回

其反变换为 $X(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Y(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau$ 。 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 形成一复共轭对，得到解析信号 $Z(t)$ 。

$$Z(t)=X(t)+iY(t)=a(t)e^{i\theta(t)} \tag{2}$$

其中

$$a(t)=[X(t)^2+Y(t)^2]^{1/2},\qquad \theta(t)=\arctan\frac{Y(t)}{X(t)} \tag{3}$$

这样， Hilbert 变换提供了一个独特的定义幅度与相位的函数。由于 (1) 式定义 Hilbert 变换为 $X(t)$ 与 $1/t$ 的卷积，因此它强调了 $X(t)$ 的局部特性。在 (2) 式中，极坐标表达式进一步表明了它的局部特性：它是一个幅度和相位变化的三角函数 $X(t)$ 的最好局部近似。由此，定义瞬时频率 ω 为

$$\omega=\mathrm{d}\theta(t)/\mathrm{d}t \tag{4}$$

3 基本模式分量

Hilbert 变换提供了很好的瞬时频率的定义，然而，人们在接受瞬时频率的概念时，往往受到 Fourier 分析的根深蒂固的影响。在传统的 Fourier 分析中，频率被定义为在整个数据长度中具有恒定幅度的正弦或余弦函数。作为这一定义的扩展，瞬时频率的概念也必须与正弦或余弦函数相关，需要最少一个周期的正弦或余弦波动来定义局部频率值。根据这个逻辑，少于一个波长的长度将无法给出频率定义。现存的大多数观点认为瞬时频率只在特定的条件下存在 [3,4] ，比如单一分量信号。不幸的是并没有明确的定义来区分一个信号是否是“单一分量”。由于缺乏精确的定义，所以“窄带”的概念被用在瞬时频率的限定上，以使瞬时频率有意义。然而，“窄带”的概念仍是在全局意义上定义的带宽，这种定义过于严格又缺乏精确性，且无意义。例如，文献 [5] 曾成功地从数据中滤出满足带宽定义限制条件的信号，但仍得到了很多没有物理意义的负的频率分量。为了得到有意义的瞬时频率，文献 [3] 讨论了更加严格的条件：任何一个函数要得到一个有意义的瞬时频率，其 Fourier 变换的实部必须只有正的频率分量。这个限制条件虽可以在数学上证明，但仍是一个全局性的定义，全局性的定义对于频率时刻变化的非平稳信号将没有任何意义。为了得到有意义的瞬时频率，必须把基于信号全局性的限制条件修改为局部的限制条件，并且把这些条件转换成物理上可实现的步骤，并用一个简单的方法加以实现。Huang 等提出的局部限制条件为 [1] ：函数对称于局部零均值，且有相同的极值和过零点。进而定义了一类满足下面两个条件的被称为基本模式分量的函数 [1] ：在整个数据序列中，极值点的数量和过零点的数量必须相等，或最多相差不能多于一个；在任何时间点上，被它的局部最大值和局部最小值定义的包络的均值必须是零。

完成基本模式分量的定义后，现在可以证明 (4) 式给出了瞬时频率的最好定义。对一个基本模式分量函数进行 Hilbert 变换之后可以表示为 (2) 式 (解析函数) 。如果对 $Z(t)$ 进行 Fourier 变换，可得到

$$W(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}a(t)e^{i\theta(t)}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}a(t)e^{i(\theta(t)-\omega t)}\mathrm{d}t \tag{5}$$

通过平稳相位方法，对 $W(\omega)$ 贡献最大的频率应满足如下条件：

$$\mathrm{d}(\theta(t)-\omega t)/\mathrm{d}t=0 \tag{6}$$

由此得出 (4) 式。这是一个比过零频率更好的瞬时频率，而且这与经典的波形理论关于频率的定义一致。

(6) 式中的频率是通过局部正弦函数匹配的平稳相位条件得到的，不需要一整个振荡周期来定义一个频率值，可以在每一个点上，从点与点之间的变化来定义它．在这个意义上，即使是一个单调函数也可被定义为一个振荡函数的一部分，从而根据 (4) 式可以有瞬时频率．

对于一个复杂的信号，在一个时刻会有多于一个的瞬时频率，为了使用这个关于瞬时频率的定义，必须把一个信号数据序列分解成基本模式分量，从而可以对它们使用瞬时频率这一概念．

4 局域波分解

把复杂的非平稳信号分解成基本模式分量，Huang 等 [1] 提出了基于经验的模式分解方法．该方法是基于信号局部特征的，也称为局域波分解．思路如下：

取信号局部最大值和局部最小值定义的包络的均值 m_1 ，则

$$X(t) - m_1 = h_1 \tag{7}$$

理想情况下， h_1 应是一个基本模式分量．然而，实际上对于非平稳数据，包络均值可能不同于真实的局部均值，结果，一些非对称波仍可能存在．为去除叠加波，并使波形更加对称，该过程可以被重复 k 次，直到 h_k 满足要求，即得到第一个基本模式分量 c_1(在余下的过滤处理中，分量 h_k 被当作待处理数据)．

从原始信号中分离出分量 c_1 ，得到

$$X(t) - c_1 = r_1 \tag{8}$$

把 r_1 当作新的数据按以上相同的处理过程来处理，得到如下结果：

$$\left.\begin{aligned} r_1 - c_2 &= r_2 \\ r_2 - c_3 &= r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-1} - c_n &= r_n \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(8) 式与 (9) 式相加，得到

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i + r_n \tag{10}$$

即把原信号 $X(t)$ 分解为 n 个基本模式分量 $c_1, \cdots, c_n$ 和一个剩余分量 r_n ．该剩余分量或者为一个平均趋势或者是一个常量．

对每一个分量进行 Hilbert 变换，根据 (4) 式计算出瞬时频率，可以把数据表示成下面的形式：

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) e^{i\omega_j(t)t} \tag{11}$$

从 (11) 式可以看出，每一个基本模式分量可以是幅度或频率调制的．可变的幅度和瞬时频率不但很大地改进了信号分解或展开的效率，而且使这种分解方法可以处理非平稳数据．通过基于基本模式分量的信号展开，幅度和频率调制也被清楚地分开，从而打破了固定幅度和固定频率的 Fourier 变换的限制，得到了一个可变幅度和可变频率的信号描述方法．

实际上，该方法得到了一个用于信号分解的自适应的广义基。从信号分解基函数理论角度来说，上述分解方法是在基函数理论上的一种创新。因为该信号分解方法中，基函数是依赖于信号本身的，也就是自适应的，不同的信号分解后的基函数是不同的。该基函数不同于 Fourier 分解中的基函数， Fourier 分解的基是一系列恒定幅度和恒定频率的正余弦函数；也不同于小波分解中的基函数，小波分解的基函数是预先确定的，由于分解的效果取决于基函数的选择，所以不能保证最优的分解效果。而局域波分解方法的基函数是一系列可变幅度和可变频率的正余弦函数，它是由信号中自适应得到的，可以得到很好的分解效果。

在这种时频分析方法中，主要的概念性的创新就是基于信号局部特征的分解方法的引入，它的引入使得瞬时频率这一概念具有了实际的物理意义，同时也使这一方法不同于用很多谐波分量来代表复杂的非平稳信号的传统方法，如 Fourier 变换，也不同于小波变换中尺度的频率定义方法，而是与频率的经典定义方法 (信号相位的导数) 相一致，从而可以给出信号频率变化的精确表达。所以，它可用于非平稳信号的处理，而且是一种分析非平稳信号的通用方法。

局域波分解方法本身决定了它是完备的， (10) 式说明了这一点。文献 [1] 用数值方法，即用分解得到的各基本模式分量来重建原始数据，验证了该分解方法的完备性。

局域波分解方法的正交性在所有实际意义上都是满足的，但在理论上并不能保证。通过分解得到的所有基本模式分量都应在局部相互正交，因为每一个基本模式分量都是从原始信号与局部均值的差值得来的，因此有

$$\overline{X(t)\overline{X(t)}} = 0 \tag{12}$$

不过， (12) 式不是严格成立的，因为均值是通过近似得来的，因此不能算是真实的均值。进一步说，每一个连续的基本模式分量只是组成信号 $\overline{X(t)}$ 的一部分。因为这些近似，能量泄露是不可避免的，不过即使有能量泄露也应该是很小的。基本模式分量的正交性在后验和数值上也得到了检验 [1] 。不过应当注意的是，这里的正交性都是局部意义上的正交。事实上，由于数据是有限长的，即使具有不同频率的纯粹的正弦分量 (有限长) 也不是完全正交的。因此，局域波分解方法得到的基本模式分量，可以是也可以不是正交的。由于正交分解是线性系统的特征，违反这一限制不是缺点而是突破。正因为如此，这种方法可以应用于非平稳信号的分析和处理。

通过局域波分解方法得到的基本模式分量，个别分量不能保证有很好的物理意义，这对于所有的分解都是一样的。但在多数情况下，基本模式分量确实有物理意义 [1] 。

5 局域波分析的应用

由于局域波分析方法是基于信号局部特征的，因此它特别适用于非平稳信号的处理。它的典型应用主要有以下几个方面：

(1) 瞬时频率的估计

利用局域波分解，把待处理信号分解成有限个基本模式分量。对每一个基本模式分量进行 Hilbert 变换，便可得到它的解析表达式，最后根据 (4) 式可计算出瞬时频率。该方法简单、通用，而且与传统的分析方法相比，具有较高的精确度 [1,6] 。

(2)Hilbert 时频谱估计

(11) 式使我们可以把信号幅度在三维空间中表达成时间和瞬时频率的函数，信号幅度也可以被表示为时间频率平面上的等高线。经过这些处理后的时间频率平面上的幅度分布被称为 Hilbert 时频谱 (简称 Hilbert 谱) 。 Hilbert 谱的表达式为

$$H(\omega,t) = \sum b_j a_j(t) e^{i\omega_j(t)t} \tag{13}$$

当 $\omega_j(t)=\omega$ 时， $b_j=1$ ，否则 $b_j=0$ 。

Hilbert 谱的表达形式可以有很多种，如经过平滑处理或未经此处理的灰度 (或颜色编码) 图形式，或者等高线形式。也可以用幅度的平方代替幅度，来给出 Hilbert 功率谱。

(3)Hilbert 时频谱的边界谱估计

根据 (13) 式，可定义 Hilbert 时频谱的边界谱：

$$h(\omega)=\int_0^T H(\omega,t)\mathrm{d}t \tag{14}$$

边界谱表达了每个频率在全局上的幅度 (或能量) 贡献，它代表了在统计意义上的全部数据的累加幅度。在边界谱中某一频率仅代表有这样频率的信号存在的可能性。而在 Fourier 表达中，在某一频率 ω 处能量的存在，代表一个正弦或余弦波在整个时间长度上都存在。

(4) 非平稳信号平稳性的度量

根据 (14) 式，可进一步定义平均边界谱：

$$n(\omega)=(1/T)h(\omega) \tag{15}$$

于是，定义平稳度为 [1]

$$\mathrm{DS}(\omega)=\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{H(\omega,t)}{n(\omega)}\right)^2\mathrm{d}t \tag{16}$$

采用积分式是因为它给出了整个数据平稳性的定量测量。对于一个平稳过程， Hilbert 谱不是时间的函数，它将只包含水平的等高线， DS(ω) 将是零。只有在这种情况下，边界谱和 Fourier 谱才是一致的。这时， Fourier 谱是有物理意义的。如果 Hilbert 谱依赖于时间，指数将不为零，这会使 Fourier 变换谱实际意义不明显。指数越高，整个过程越不平稳。

(16) 式将平稳性定义为频率的函数，这是必须的。因为某些频率分量可能是非平稳的，同时另一些频率分量可能是平稳的。例如一个偶然发生的振动冲击叠加波和规则的大的振动同时发生，低频的振动是平稳的，而高频的振动是断续的，即是非平稳的。

平稳度也隐含为时间的函数，它依赖于分析长度 T 。一个过程可以是分段平稳的，另一方面，在一个平稳信号中加入一个跳变，如果积分时间 T 足够长，该过程也可以认为是几乎平稳的，但若在此跳变的周围来看则又是非平稳的。对于一个信号数据来说平稳性是一个复杂的特性：对任何一个短于其长周期的数据段来说，该数据段被看作是瞬态的；如果数据长度足够长，则周期性被显现出来，从而变成平稳的。另一方面，数据可以在局部平稳，而在长时间内却不平稳。对于上述情况该指数就可以用来衡量该信号过程的平稳性。

6 需进一步研究的有关问题

局域波分析是一种新的信号分析方法，正在迅速发展之中，有许多工作需要去做，至少对下述问题的研究是有意义的。

(1) 信号分解的方法　在这种新的时频分析方法中，其关键是信号分解算法，它的好坏直接影响到信号分解的精度。局域波分解技术对于分析实际广泛存在的非平稳数据十分有效，但也存在一些问题。首先，在计算局部最大值和局部最小值定义的包络的均值时，用到了两次三次样条插值。三次样条插值带来的问题是过冲和欠冲。其次，样条插值在信号的两个端点处会出现摆动，因为信号的两个端点可能不是局部极值点。这种摆动可能会传播到信号数据的中间段并破坏整个数据特性 [1] 。 Yu 等 [7] 提出了一种改进方法——基于信号时域局部特征的自适应时变滤波分解算法，取得了一定的效果。但基于基本模式分量的信号分解算法的进一步研究是必要的。

(2) Hilbert 谱的边界谱特性　有关边界谱特性用于实际复杂信号的物理解释还需进一步的研究.

(3) 由 Hilbert 谱定义信号的平稳性　一个过程或者是平稳的或者是非平稳的，我们只能是定性地描述它的平稳性. 因为传统平稳性的定义太严格而且用处不大，很少有数据能够满足如此严格的定义，结果是很少有人会用它来检测数据的平稳性. 为了进行定量分析，需要一个指数来表明信号的平稳性偏差到底有多大. 用上述方法得到信号的时频表达之后，可以对信号的平稳性度量进行定义. 信号平稳性度量的定义及应用的进一步研究将是很有意义的.

(4) 基于局域波分解的信号分析　在得到复杂信号的基本模式分量之后，除了计算瞬时频率和 Hilbert 时频谱之外，可以结合其它的信号分析方法来进一步研究. 如对分解得到的基本模式分量建立时变参数模型，既能发挥时变参数模型法的优点，又能扩展其应用范围 [8]； Wigner-Ville 分布与局域波分解方法的有机结合，可以有效地抑制时频分布的交叉干扰项 [9]；局域波分解算法推广应用于方差平稳随机信号的处理，能有效地得到这类信号的趋向性序列 [10]，该方法得到的趋向性序列能更准确地逼近非平稳随机信号的趋向性曲线，它是处理方差平稳随机信号的一般方法，而且无需趋向性的任何先验知识. 在该领域的进一步研究可能为信号处理开辟新的途径.

(5) 局域波分析的数学基础理论研究　局域波分析是一种新的时频分析方法，对其研究也才刚刚起步，有许多数学基础理论方面的研究还有待于完善.

(6) 局域波分析应用领域的开拓　局域波分析尤其适用于非平稳信号的分析和处理，它一出现就已广泛应用于地球物理 [1,11,12]、振动工程 [6,7,13] 等领域. 进一步加强局域波分析在不同应用领域的研究具有重要意义.

参 考 文 献

[1] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, *et al.*, The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis, Proc. Roy. Soc., London. A, 1998, 454, 903–995.

[2] 马孝江，余泊，张志新，等，一种新的时频分析方法—局域波法，振动工程学报， 2000, 13(增刊), 24–29.

[3] B. Boashash, Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal, Part I: Fundamentals, Proc. IEEE, 1992, 80(4), 520–538.

[4] L. Cohen, Time-Frequency Analysis, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1995, Chapter 1.

[5] W. K. Melville, Wave modulation and breakdown, J. Fluid Mech., 1983, 128(3), 489–506.

[6] 张海勇，基于局域波法的非平稳随机信号分析中若干问题的研究， [博士论文], 大连，大连理工大学， 2001.

[7] Yu Bo, Ma Xiaojiang, A new method for the analysis of non-stationary nonlinear vibration signal and its use in machine fault diagnosis, Proc. of ICVE, Dalian, 1998, 668–671.

[8] 张海勇，马孝江，盖强，一种新的时变参数 AR 模型分析方法，大连理工大学学报， 2002, 42(2), 238–241.

[9] Zhang Haiyong, Ma Xiaojiang, GaiQiang, Wigner-Ville distribution based on intrinsic mode functions, Proc. of ICR, Beijing, 2001, 1015–1017.

[10] 张海勇，方差平稳随机信号的一种处理方法，电子与信息学报， 2002, 24(12), 1879–1884.

[11] X. Zhu, Z. Shen, S. D. Eckermann, *et al.*, Gravity wave characteristics in the middle atmosphere derived from the empirical mode decomposition method, J. Geophys. Res., 1997, 102(D14), 16545–16561.

[12] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, A new view of nonlinear water waves: the Hilbert spectrum, Annu. Rev. Fluid Mech., 1999, 31, 417–457.

[13] Zhang Haiyong, Ma Xiaojiang, Gai Qiang, The marginal spectrum of Hilbert spectrum and its applications in machinery faults diagnosis, Proc. of APVC, Hangzhou, 2001, 901–903.

A NEW METHOD FOR ANALYZING NONSTATIONARY SIGNAL—LOCAL WAVE ANALYSIS

Zhang Haiyong

(*Department of* C^{3}I, *Dalian Naval Academy, Dalian* 116018, *China*)

Abstract A new method for analyzing nonstationary signal designated as local wave analysis is introduced. It stems from the concept of instantaneous frequency, and it can describe accurately the local properties of dynamic data in the time-frequency plane. The basis of local wave decomposition is not fixed but changeable with the changing wave shape of the dynamic data. The decomposition is adaptive, and therefore highly efficient. Compared with the available time-frequency analysis methods, this method has many advantages. It is commonly used for analyzing nonstationary signal. The application of this method is discussed, and the related problems in this field that need further study are pointed out, too.

Key words Nonstationary signal, Instantaneous frequency, Local wave analysis, Local wave decomposition, Intrinsic mode function, Time-frequency analysis

张海勇： 男，1966 年生，博士，副教授，主要研究领域：非平稳信号的分析与处理、通信信号处理.