中国科学 (D 辑)
第 32 卷 第 10 期 SCIENCE IN CHINA (Series D) 2002 年 10 月

控制大气污染的一个数学理论框架*

朱 江 曾庆存
(中国科学院大气物理研究所国际气候与环境科学中心, 北京 100029)

摘要 讨论了如何利用大气污染的数值预报结果和模式进行大气污染最优控制设计的理论框架问题. 提出了以控制污染源排放量为控制手段的大气污染最优控制问题, 其目的是在事先预报的天气条件下, 通过可行的控制手段使得一个城市的大气污染物浓度在一个选定的地域和时间段内保持在某一可容许的指标之内, 同时又使控制的代价(包括控制导致的工艺提高的耗资或工厂减产的经济损失, 或生活的不便性等)为最小. 基于伴随模式的最优化方法, 推导了求解这一问题的数学方法和相应的计算公式. 由于最优控制方案是根据预报的天气条件计算出来的, 而预报结果都是有误差的, 因此事先计算出的最优控制方案的实施效果会受到天气条件预报误差的影响. 利用伴随算子模式方法, 给出了这一问题的一个近似的却高效的算法, 可以计算不同时刻和地点预报的风场、温度场和污染物初值的不确定性对最优控制效果的影响.

关键词 大气污染 最优控制 数值模式

近年来我国主要由工业废气, 交通排放以及居民生活能耗所造成的城市空气污染的问题越来越严重, 公众对这一关系到生活质量的重要因素的意识也越来越强. 我国的许多大城市也相应地开展了城市空气质量监测和预报工作. 政府也对空气污染进行了有效的治理, 例如一些工厂被搬离, 燃煤小锅炉等也被逐渐禁止使用, 或改造为使用较清洁的能源, 汽车废气排放也通过提高汽车排放的标准来进行控制. 这些措施都是长期的, 旨在从根本上控制乃至最终消除城市的严重污染. 然而, 由于天气条件对空气污染的影响很大. 因此, 与长期的控制措施相匹配, 还需要一种能够根据天气条件对大气污染进行控制的灵活控制方法. 在国外, 就因为汽车尾气过分严重, 而根据天气预报情况对汽车的行驶实施经常性的灵活限制(通过单、双号等方法). 这种大气污染的灵活性控制是对长期的污染控制和治理的补充, 也是有效地控制突发性的严重污染的主要方法. 然而, 这样的控制需要提前制定, 并且要有科学根据, 否则会带来一些社会矛盾. 同时, 也要考虑这种灵活性控制的经济性, 因为进行控制必然会带来一定的资金投入或经济损失, 甚至带来暂时的生活的不便. 因此需要发展具有如下特性的污染控制的理论和方法. 第一, 控制方法能够紧密结合天气条件对污染物的影响来进行更精确的描述和计算, 而不是仅靠定性分析而由人们推想得到; 第二, 控制应该是最优的, 在能够把污染控制到一定程度的条件下, 代价是最小的.

目前我国在不少大中城市已经建立较好的空气污染观测网络, 大气污染的数学模型也发展到了一个较为成熟的阶段, 空气污染的数值预报也达到了可以对公众公布的精度. 因此如

2002-04-20 收稿, 2002-05-26 收修改稿
* 中国科学院"吸引海外杰出人才"项目"自然控制论研究"资助

何利用这些有效的工具和预报产品, 对大气污染的控制方案进行事先的规划就成为十分值得研究的科学问题. 这样一个比以往方法更精确, 更多地利用天气状况预报和污染程度观测信息的调控方法, 必将会使控制方案建立在科学基础上, 而且是定量的, 可以减少投资、减少经济损失和生活不便. 在这种背景下, 曾庆存[1, 2]提出了基于自然控制论思想的区域污染控制问题. 其讨论的问题包括工厂选址的问题. 更早的类似工作有 Marchuk[3]. 本文的目的是在他们的想法基础上更加详细地讨论对已有污染源进行最优控制的问题, 为今后发展这样的控制方案进行理论上的设计. 本文与他们的工作的区别在于问题的数学提法更精确, 具体的求解方法也更可行. 此外本文还讨论了相应的最优控制的不确定性问题.

1　条件和问题的提法

在这里讨论的进行大气污染的最优控制离不开以下客观条件: 污染预报模式, 观测网络,资料同化系统, 控制实施系统, 控制决策系统以及控制不确定性的分析系统. 前 3 个条件也就是污染数值预报的条件, 其中预报模式(为描述流体运动的平流、扩散和化学反应方程组)根据观测网络和资料同化系统提供的初、边值条件对此后污染物浓度的变化进行预测. 这可以简单地记为:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=F(Q,\boldsymbol{V},T,\cdots)+Q_s, \tag{1}$$

其中 Q 是污染物浓度的向量, T 是大气的温度场, $\boldsymbol{V}$ 是风场, Q_s 是污染物的源项, 它们都是(x,t)的函数, 其中 x 记为三维空间变量. 这里我们采用了简凑的表达式(1)可以使书写简化, 但并不失去一般性. 关于具体的大气污染的数值模式和预报的表述可参见雷孝恩等[4].

记方程(1)的空间区域为Ω, 边界为$\partial\Omega$. 边界包括自然边界(如陆地)和人为(即为了计算上的方便, 常截取大气中的一块有限空间作为Ω)边界. 边界条件一般根据边界种类的不同(如人为边界还可以分为入流和出流边界)而采取不同的边界条件方案, 这里为使讨论简洁而又不失一般性, 记为

$$b(Q)=0,\quad x\in\partial\Omega. \tag{2}$$

如果要在初始时刻 t_0 对此后某一时间段$[t_0, t_1]$内的污染进行控制, 就要知道污染物在这期间的状况. 这就必须知道初始的状况

$$Q(x,t_0)=Q_0(x), \tag{3}$$

而这可由观测网络和资料同化系统得到. 在$[t_0, t_1]$时间段的污染物的源项 Q_s 也应视为已知, 其实它包括确知的源(如排污工厂、汽车等的排污特性)和不太确知的源(一般所谓的“面源”或流入Ω的“外界源”), 后者一般可从较长时间的观测网络和其他方法得到. 在$[t_0, t_1]$时间段的温度、风场等则和 Q 一起由预报模式算出.

对污染进行控制的主要办法是对污染源的排放进行控制, 这里假设一个对污染源进行控制的实施系统已经具备, 因此把一个带控制项的污染模型简写为:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Q}{\partial t}=F(Q,V,T,\cdots)+Q_s\cdot(1-u), \quad t\in(t_0,t_2],\\
&\frac{\partial Q}{\partial t}=F(Q,V,T,\cdots)+Q_s, \qquad\qquad t\in(t_2,t_3],\\
&Q(x,t)\big|_{t=t_0}=Q_0(x),
\end{aligned} \tag{4}$$

其中 u 是时间和空间的归一化函数, 其值介于 0 和 1 之间, 描述了对污染源控制的力度. 比如在某污染源处取值为 0.9, 就表明此处污染源的排放被减少了 90%. 当然 u 是还有其他客观限

制的，比如说在某些污染源，无法进行控制，这时 u 的值即为零. 总之，控制的容许集要根据实际情况确定下来.

几个重要的概念也需要说明：控制时间段、目标时间段，计算区域和目标区域. 控制时间段记为$[t_0, t_2]$，它是指实施污染源排放控制的时间段. 而目标时间段记为$[t_1, t_3]$，它是指在这段时间里，污染物在某一区域(即为目标区域Ω_0)的浓度应不大于某一目标值，显然，$t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$. 计算区域 Ω 是模式覆盖的范围，应该包含目标区域和需要控制的排放源. 模式方程(4)的时间积分段$[t_0, t_3]$，空间区域是Ω. 是另外一个重要的概念是控制总代价. 它应该包括由于减少污染源的排放导致的工厂设备投资或产值减少等直接和间接的因素. 在本文中暂时采取简单的处理(即加权的 L_2 范数，见下)，但理论上对一般的可微函数都可以处理.

在这些条件的基础上，我们提出了下面的大气污染最优控制的原则：(P1)通过在时间段$[t_0, t_2]$对污染源的可行控制，目标时间内和目标区域内的污染物浓度必须小于一个指定的目标值；(P2)控制的总代价最小. 写成数学表达式就是：在下面约束的条件下，

$$\begin{aligned} &Q(x,t) \leqslant c, && (x,t) \in \Omega_0 \times [t_1, t_3], \\ &0 \leqslant u(x,t) \leqslant u_0(x,t), && (x,t) \in \Omega \times [t_0, t_2], \end{aligned} \tag{5}$$

(其中 $u_0(x, t) \leqslant 1$ 是事先给定的，表示对不同污染源排放控制的上限)，求一个最优的控制方案，使得控制的总代价最小：

$$J(u) = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_2} u(x,t)^2 w(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x, \tag{6}$$

其中 $w(x, t)$是非负的权重函数，反映控制一个相对单位污染源所需付出的代价. 更接近实际的提法(见 Zeng[1, 2])，应是用泛函 J_1 代替(6)中的 J，

$$J_1(u) = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_2} u(x,t) w(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x, \tag{6$'$}$$

不过，求解满足(4)，(5)的 J_1 的最小值在计算上碰到的困难要更多些，故我们宁愿用(6)式. 使用(6)式的另外一个优点是 L_2 范数得到的结果更光滑些，最优解的稳定性可能更好些(见 Zhu 等[5]).

上面的(4), (5)和(6)式组成了一个完整的带约束的偏微分方程最优控制问题.

2 解决方法

2.1 罚函数法

求解上面的问题可以首先采用罚函数法，把对状态变量的不等式约束 $Q(x, t) \leqslant c$ 去掉. 为此定义一个新的代价函数：

$$J_{new}(u) = J(u) + \gamma J_2(Q), \tag{7}$$

其中

$$J_2(Q) = \int_{\Omega_0} \int_{t_1}^{t_3} (Q(x,t) - c)^2 v_\beta (Q(x,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x, \tag{8}$$

而

$$v_\beta(p) = \begin{cases} 1, & \text{if } p \geqslant c \\ \exp[-(p-c)^2 / \beta, & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{9}$$

这里当 β 趋于零时，v_β趋于阶梯函数. 对小的$\beta > 0$, J_2 描述了违反 $Q(x, t) \leqslant c$ 这个约束的惩罚. 在实际计算中如果β太小，由于计算误差的关系，函数v_β就几乎和阶梯函数一样了. 我们在研

究泥沙淤积最优控制问题中也应用了这样的罚函数方法，取得了较好的结果(Zhu 等[5]). 其他的罚函数方法可以参见 Lin[6]. 原则上(7)式中γ取值越大，约束 $Q(x, t)\leqslant c$ 就越趋向于满足，通常计算中是从小到大取几个γ值，然后根据结果定个合适的值.

2.2　导数的计算

下面可以采用伴随方法求出新的代价函数的导数:

$$\frac{\partial J_{new}}{\partial u}=2wu+Q_sQ^*, \tag{10}$$

其中 Q^*是伴随变量，满足下面的方程:

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t}=-\left[\frac{\partial F(Q,V,T,\cdots)}{\partial Q}\right]^T Q^*+[2\gamma v_\beta(Q)\cdot(Q-c)+\gamma(Q-c)^2v'_\beta(Q)]\cdot\chi|_{\Omega_0\times[t_1,t_3]}, \tag{11}$$

这里$\chi\big|_{\Omega_0\times[t_1,t_3]}$为示性函数，即为时间、空间的函数，在 $\Omega_0\times[t_1,t_3]$取值为 1，否则取值为 0. 注意到(10)式的计算区域也是Ω, 积分时间段是$[t_0, t_3]$, 不过时间积分次序是反的，即从 $t = t_3$ 开始，积分到 $t = t_0$，其终值条件(实为该伴随问题的初值，给在起算时刻 t_3)为:

$$Q^*(x, t_3)=0, \tag{12}$$

导数公式(10)式和伴随方程(11)式的导出可以用 Lagrange 乘子法和分部积分公式得到，详细见附录.

下面简单地以一个例子说明(11)式的右边第一项的意义. 假设 Q 是某一污染物的浓度，而(1)式是一个简单的平流方程:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=u\frac{\partial Q}{\partial x}+v\frac{\partial Q}{\partial y}+w\frac{\partial Q}{\partial z}+Q_s,$$

那么

$$F(Q,V,T,\cdots)=u\frac{\partial Q}{\partial x}+v\frac{\partial Q}{\partial y}+w\frac{\partial Q}{\partial z}+Q_s,$$

而

$$\frac{\partial F(Q,V,T,\cdots)}{\partial Q}=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z},$$

是一个算子. 在这个例子中, (11)式的右边第一项为

$$-\left[\frac{\partial F(Q,V,T,\cdots)}{\partial Q}\right]^T Q^*=-u\frac{\partial Q^*}{\partial x}-v\frac{\partial Q^*}{\partial y}-w\frac{\partial Q^*}{\partial z}.$$

2.3　有界约束最优化算法

另外，关于控制变量的不等式约束 $0\leqslant u(x,\ t)\leqslant u_0(x,\ t)$可以用有界约束最优化(Bounded constrained optimization)算法来解决. 有界约束最优化算法目前已经较为成熟，软件也可以从网上等方便地获得，这里就不详细说明，可参见 Byrd 等[7]和 Zhu 等[8].

2.4　详细计算步骤

尽管上面都是在连续的情形下讨论的. 要在计算机上计算，总得用数值求解法，为此要将模式离散化. 不过，上面的连续情形的讨论完全可以搬到离散的情形，比如把模式方程写成差分方程，连续的伴随方程变成差分模式的伴随模式，同样可以相应地导出(10)~(12)式离散的

形式. 这里采用连续的形式主要目的是更加节省篇幅. 我们讨论过一个类似的离散理论, 是关于泥沙淤积最优控制问题的, 可参见 Zhu 等[5].

下面给出具体的计算步骤: (i) 设定 $k = 0$, 给出一个 u 的第一猜值 $u^{(0)}$; (ii) 对给定的 $u^{(k)}$, 从 $t=t_0$ 到 $t=t_3$ 积分模式(4), 并记录结果; (iii)计算代价函数(6); (iv) 以(12)为终值条件, 从 $t = t_3$ 开始, 积分伴随模式(11)到 $t = t_0$; (v) 利用(10)计算代价函数的梯度; vi) 利用有界优化(bounded constrained optimization)算法更新 $u^{(k)}$; (vii) 检验最优性条件是否满足; (viii) 如果是, 停止, 否则设定 $k = k+1$, 回到第 2 步.

3 最优控制效果对误差的敏感性

从上面的讨论可以看到, 上述的污染最优控制方案是通过确定性的方法计算出来的, 其结果依赖于所用到的预报风场、边界层温度层结、污染物初始分布以及污染预报模式等. 不可避免的是这些信息都不是准确无误的, 因此要考虑这些误差对最终计算出的最优控制方案的影响, 也即对最优控制的不确定性进行分析. 这里我们先讨论当风场、温度场和污染物初始分布的不确定性对最优控制效果的影响. 换句话说, 就是在事先预报的风场、温度场和污染物初始分布下, 我们可以依据上面的方法计算出最优的控制方案, 同时也就知道了这一控制的效果(比如 J_2 的值可以是一个好的指标), 那么我们要问：风场、温度场和污染物初始分布的小扰动(误差)对这一控制效果的影响有多大？这是本节讨论的主要问题. 更广义的敏感性问题, 如对模式误差的敏感性、对模式参数的敏感性等可以用类似的方法来研究, 这里暂不详细讨论.

设在给定的风场 $\boldsymbol{V}$、温度场 T 和初始浓度分布 Q_0 下, 上面计算出的最优控制是 u^{op}, 而在此控制下的浓度为 $Q^{op}(x, t)$, 它们满足方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial Q^{op}}{\partial t} = F(Q^{op}, V, T, \cdots) + Q_s \cdot (1 - u^{op}), \quad t \in (t_0, t_2], \\
&\frac{\partial Q^{op}}{\partial t} = F(Q^{op}, V, T, \cdots) + Q_s, \quad t \in (t_2, t_3], \\
&Q^{op}(x,t)|_{t=t_0} = Q_0(x),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

其控制效果的一个指标是 $f(Q^{op})$. 这里 $f(\cdot)$是一个标量, 是衡量离控制目标多远的一个度量, 并且不是唯一的. 例如可以取为 $J_2(Q)$, 或者 Q 在控制区域和控制时间内的浓度平均值等. 在实际应用中还可选取多个指标函数, 并且对其敏感性都进行分析.

如果风场 $V(x, t)$、温度场 $T(x, t)$和初始浓度分布 $Q_0(x)$都有误差, 分别设为$\delta V(x, t)$, $\delta T(x,t)$ 和$\delta Q_0(x)$, 那么在控制 u^{op} 下新的浓度 Q' 满足下面方程:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial Q'}{\partial t} = F(Q', V+\delta V, T+\delta T, \cdots) + Q_s \cdot (1 - u^{op}), \quad t \in (t_0, t_2], \\
&\frac{\partial Q'}{\partial t} = F(Q', V+\delta V, T+\delta T, \cdots) + Q_s, \quad t \in (t_2, t_3], \\
&Q'(x,t)|_{t=t_0} = Q_0(x) + \delta Q_0(x),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

其指标函数应该为 $f(Q')$.

从而 $\delta V(x,t)$, $\delta T(x,t)$ 和 $\delta Q_0(x)$ 对指标函数的影响为 $\delta f = f(Q') - f(Q^{op})$. 下面来找出$\delta f$

与 $\delta V(x,t)$, $\delta T(x,t)$ 和 δQ_0=(x)的关系. 这里只考虑一阶的关系, 即 $\dfrac{\partial f}{\partial V}$, $\dfrac{\partial f}{\partial T}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial Q_0}$, 那么可以利用伴随方程有效地计算.

(14)减(13)式, 得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Q'-Q^{op}}{\partial t}=F(Q',V+\delta V,T+\delta T,\cdots)-F(Q^{op},V,T,\cdots),\\&Q'(x,t)-Q^{op}(x,t)|_{t=t_0}=\delta Q_0(x),\end{aligned}\tag{15}$$

记 $\delta Q=Q'-Q^{op}$, 那么(14)式的切线性方程(即精确到二阶的近似)为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \delta Q}{\partial t}=\frac{\partial F(Q^{op},V,T,\cdots)}{\partial Q}\delta Q+\frac{\partial F(Q^{op},V,T,\cdots)}{\partial T}\delta V+\frac{\partial F(Q^{op},V,T,\cdots)}{\partial T}\delta T,\\&\delta Q(x,t)|_{t=t_0}=\delta Q(x).\end{aligned}\tag{16}$$

考虑如下的伴随方程,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Q^*}{\partial t}=-\left[\frac{\partial F(Q^{op},V,T,\cdots)}{\partial Q}\right]^T Q^*+\frac{\partial f}{\partial Q}\Big|_{Q=Q^{op}}\cdot\chi|_{\Omega_0\times[t_1,t_3]},\\&V^*=\left[\frac{\partial F(Q^{op},V,T,\cdots)}{\partial T}\right]^T Q^*,\\&T^*=\left[\frac{\partial F(Q^{op},V,T,\cdots)}{\partial T}\right]^T Q^*,\end{aligned}\tag{17}$$

和终值条件:

$$Q^*(x,t_3)=0.\tag{18}$$

可以验证(见附录),

$$\frac{\partial f}{\partial Q_0}=Q^*(x,t_0),\frac{\partial f}{\partial V}=V^*,\frac{\partial f}{\partial T}=T^*.\tag{19}$$

注意到伴随方程(11)和(17)式第一个方程只是“强迫项”不同, 因此在实际计算中可以采用同一伴随模式, 通过改变强迫项来分别计算. 而伴随方程(17)式的第 2, 3 个方程是诊断方程, 可以在积分(17)式第一个方程的过程中诊断计算出来. 伴随程序应从离散的模式本身来构造, 这方面已经有许多文献和软件(例如 Rostaing 等[9], 朱江等[10]).

4　结语

这里讨论的是一些基本的理论问题, 或者说是一个理论框架. 其他重要的问题和实际数值计算还必须细化. 下一步我们需要研究的具体问题包括: 最优控制数值试验、建立控制过程中的观测反馈和实时控制更新的理论和算法, 以及如何定义更好的污染控制代价函数. 另外, “物质条件”的现状(即目前的预报模式、观测网络和资料同化系统), 能否使这一构想现在就能在实际中应用, 只有通过实践检验才可得知. 通过对这一理论构想的进一步研究和试验, 至少可以使我们为改进预报模式、增加观测站点、发展先进的资料同化系统等提供帮助和产生促进作用, 并进一步提高我们对大气污染机理及其调控主要方法的认识.

参 考 文 献

1 Zeng Q C. Natural Cybernetics. Bulletin of Chinese Academy of Sciences, 1996 (1): 16~21
2 Zeng Q C. Silt sedimentation and relevant engineering problem-An example of natural cybernetics. Mathematical Research, 1995, Vol.87. ICIAM95 (Proceedings of the Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Hamburg, Germany, July 3~7, 1995), Kirchgassner K, Mahrenholtg O, Mennicken R, ed. Akademie Verlag
3 Marchuk G I. Mathematical models in environmental problems. Studies in Mathematics and Its Applications (Vol. 16). Amsterdam: North-Holland, 1982
4 雷孝恩，张美根，韩志伟，等. 大气污染数值预报基础和模式. 北京：气象出版社, 1998. 321
5 Zhu J, Zeng Q, Guo D, et al. Optimal control of sedimentation in navigation channels. Journal of Hydraulic Engineering, 1999, 125(7): 750~759
6 Lin T W. Well-behaved penalty functions for constrained optimization. J Chinese Inst of Engrg, 1990, 13(2): 157~166
7 Byrd R H, Lu P, Noceda J. A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimizatio. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1995,16(5): 1190~1200
8 Zhu C, Byrd R H, Nocedal J. L-BFGS-B: Algorithm 778: L-BFGS-B, FORTRAN routines for large scale bound constrained optimization. ACM Transactions on Mathematical Software, 1997, 23(4): 550~560
9 Rostaing N, Damas S, Galligo A. Automatic differentiation in Odyssee. Tellus, 1993, 45(A): 558~568
10 朱 江，郭冬建，刘 卓. IAP 正压模式的伴随模式及其二阶伴随模式的构造. 中国科学, D 辑, 1997, 27(3): 277~283

附录

1．导数公式(10)及伴随方程(11)的导出

引入 Lagrange 乘子(也称伴随变量) $Q^*(x,t)$，$(x,t)\in \Omega\times[t_0,t_3]$，定义 Lagrange 函数

$$
\begin{aligned}
L(Q,Q^*,u) = & \int_\Omega \int_{t_0}^{t_2} Q^*\left[\frac{\partial Q}{\partial t} - F(Q,V,T) - Q_s(1-u)\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
& + \int_\Omega \int_{t_2}^{t_3} Q^*\left[\frac{\partial Q}{\partial t} - F(Q,V,T) - Q_s\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
& + J(u) + \gamma J_2(Q),
\end{aligned} \tag{A}
$$

这里把 Q, Q*和 u 看成独立的变量. 如果 Q,u 是代价函数 $J_{new} = J(u) + \gamma J_2(Q)$ 的局部极小，而 Q*是相应的伴随变量的必要条件是(Q,Q^*,u)为 L 的一个鞍点，从而有

$$
\frac{\partial L}{\partial Q} = 0. \tag{B}
$$

利用分部积分公式

$$
\int_0^t Q^* \frac{\partial Q}{\partial t}\mathrm{d}t = Q^*Q_0^t - \int_0^t Q\frac{\partial Q^*}{\partial t}\mathrm{d}t, \tag{C}
$$

从(A), (B)和(C)可得

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial Q^*}{\partial t} = -\left[\frac{\partial F(Q,V,T,\cdots)}{\partial Q}\right]^T Q^* + [2\gamma\nu_\beta(Q) \quad \cdot(Q-c) + \gamma(Q-c)^2\nu'_\beta(Q)] \ \cdot \chi\big|_{\Omega_0\times[t_1,t_3]}, \\
& Q^*(x,t_3) = 0.
\end{aligned} \tag{D}
$$

由(A)可以求出

$$
\frac{\partial L}{\partial u} = 2wu + Q_sQ^*, \quad t\in[t_0,t_2]. \tag{E}
$$

如果状态变量 Q 和控制变量 u 满足(4)，那么代价函数 J_{new} 关于 u 的导数等于 Lagrange 函数 L 关于 u 的导数，即(10)成立.

2．导数公式(19)及伴随方程(17), (18)式的推导

类似上面的推导，不过把代价函数变成 f，控制变量从 u 变成 Q_0, V 和 T.