

一种自适应多子波预滤波器的设计¹

杨新星 焦李成

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘 要 该文设计了一种自适应多子波预滤波器, 解决了由于多子波的尺度函数不具有低通特性而带来的离散多子波变换的初始化问题. 分析和实验结果表明了预滤波算法具有良好的逼近性能.

关键词 自适应预滤波器, 多子波变换, 多尺度函数

中图分类号 TN911.72, O177.6

1 引 言

在最近十年中, 由于单子波函数的时频局部性特点和单子波具有快速变换算法 (即 Mallat 分解和重构算法), 单子波变换已被国内外学者广泛研究和应用. 但是, 单子波函数不能同时具有正交性, 紧支撑性, 线性相位性和高的逼近界 (或者高的消失矩) 的性能. 而这些性质在如图像压缩的一些实际应用中是非常必要的. 为了克服这些缺点, 人们提出了多子波理论^[1,2] 并已有了一些实际应用. 尽管多子波理论上比单子波有很多优点, 但是由于没有像单子波那样可以直接利用的 Mallat 多分辨分析分解和重构算法, 到目前为止, 在实际应用中并没能充分利用这些特点和发挥出多子波的潜力. 因此, 建立合理有效的多子波分解算法, 初始化是必要的. 最近国内外有许多学者从事这方面工作, 并提出了一些预滤波器的设计方法^[3,4], 其思想都是基于从均匀采样的信号点来逼近多子波系数, 且在文献 [5] 中提出了一种设计预滤波器的准则, 但这种准则只对第一步离散多子波分解效果较好. Xia, *et al.* 在最近的文献 [5] 中改进了文献 [3] 中的设计方法, 结合单子波和多子波的思想提出了一种新的预滤波器设计算法, 但此算法的逼近精度还不能满足某些高精度应用要求. 基于上述理由, 本文设计了一种自适应多子波预滤波器来逼近多子波系数. 分析和实验结果表明该算法设计简单并且具有较高的逼近精度.

2 问题的引出

对于 N 个紧支撑尺度函数 $\phi_l(t) (l = 1, 2, \dots, N)$, 及相应的 N 个母子波函数 $\psi_l(t) (l = 1, 2, \dots, N)$, 已知 $\phi_l(t - k)$, $k \in Z$ 相互正交, 并且 $\psi_{l,j,k} \triangleq 2^{j/2} \psi_l(2^j t - k) (l = 1, 2, \dots, N)$ 形成 $L^2(R)$ 空间的一组正交基. 设

$$\Phi(t) \triangleq (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)), \quad \Psi(t) \triangleq (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t)),$$

则

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_k H_k \Phi(2t - k) \quad (1)$$

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \sum_k G_k \Phi(2t - k) \quad (2)$$

其中 H_k, G_k 为 $N \times N$ 矩阵. 由正交多子波的性质可知

¹ 1999-09-03 收到, 2000-06-15 定稿

国家自然科学基金 (No. 69772029) 和国家部级基金赞助项目

$$H(w)H^T(w) + H(w + \pi)H^T(w + \pi) = I_N \quad (3)$$

$$G(w)G^T(w) + G(w + \pi)G^T(w + \pi) = I_N \quad (4)$$

$$H(w)G^T(w) + H(w + \pi)G^T(w + \pi) = 0_N \quad (5)$$

$H(w)$, $G(w)$ 分别为 H_k , G_k 的频谱, 上标 T 表示复共轭转置, I_N , 0_N 分别为单位阵和零矩阵.

对于任意固定 $j \in Z$, 设 V_j 是由 $\phi_{l,j,k} \triangleq 2^{j/2} \phi_l(2^j t - k)$ ($l = 1, 2, \dots, N, k \in Z$) 形成的子空间, 则 $V_j, j \in Z$ 构成 $L^2(R)$ 的一个多分辨率分析.

设 $f \in V_j$, 则

$$f(t) = \sum_{l=1}^N \sum_k c_{l,J,k} \phi_{l,J,k}(t) = \sum_{l=1}^N \sum_k c_{l,J_0,k} \phi_{l,J_0,k}(t) + \sum_{l=1}^N \sum_{J_0 \leq j < J} \sum_k d_{l,j,k} \psi_{l,j,k}(t) \quad (6)$$

其中 $c_{l,J_0,k} = \int f(t) \phi_{l,J_0,k}(t) dt$, $d_{l,j,k} = \int f(t) \psi_{l,j,k}(t) dt$.

设 $c_{J_0,k} \triangleq (c_{1,J_0,k}, c_{2,J_0,k}, \dots, c_{N,J_0,k})^T$, $d_{j,k} \triangleq (d_{1,j,k}, d_{2,j,k}, \dots, d_{N,j,k})^T$
由矩阵方程 (1), (2) 式可得分解公式:

$$c_{j-1,k} = \sum_n H_{n-2k} c_{j,k} \quad (7)$$

$$d_{j-1,k} = \sum_n G_{n-2k} c_{j,k} \quad (8)$$

和重构公式

$$c_{j,n} = \sum_k (H_{n-2k}^T c_{j-1,k} + G_{n-2k}^T d_{j-1,k}) \quad (9)$$

从分解公式可以看出, 只要从信号 $f(t)$ 确定了 $c_{j,k}$, 则就可以从信号 $f(t)$ 确定多子波变换系数 $c_{J_0,k}$, $d_{j,k}$ ($J_0 \leq j < J, k \in Z$). 在单子波中, 由于单尺度函数具有低通特性, 所以当 $J \rightarrow \infty$ 时, $c_{J,k} = 2^{-J/2} f[k/2^J]$. 但是由于多尺度函数不具有低通特性, 所以无论 J 取多大, 多子波系数 $c_{j,k}$ 都不可能直接从信号 $f(t)$ 的采样点得到. 因此多子波的预滤波是必不可少的. 基于一般的正交紧支撑多尺度函数, 下面本文给出了一般的设计方法, 即一种自适应预滤波算法.

3 预滤波器设计

为了用 FIR 预滤波器 $q(n)$ 来计算子波系数, 首先需要信号的采样点 $x(n) = f(\frac{n}{J})$ 进行预滤波以获得新的序列 $x'(n)$, 预滤波器 $q(n)$ 的长度设为 $M + 1$, 则

$$x'(k) = \sum_{n=0}^M x(n+k)q(n) \quad (10)$$

$$q(n) \triangleq (q_1(n), q_2(n), \dots, q_N(n))^T, \quad x'(n) \triangleq (x'_1(n), x'_2(n), \dots, x'_N(n))^T$$

剩下的问题就是确定 $q(n)$.

设信号 $f(t)$ 在 V_J 空间的 q 投影和正交投影分别定义为

$$P_q^J f = 2^{-J/2} \sum_k x'(k) \Phi(2^J t - k), \quad P_J f = \sum_k c_{J,k} \Phi(2^J t - k)$$

信号 $f(t)$ 在 V_J 空间的 q 投影误差定义为 $E_q = \|f - P_q^J f\|_2$ 。因为 $\|f - P_q^J f\|^2 = \|f - P_J f + P_J f - P_q^J f\|^2 = E_p^2 + E_s^2$ ，其中 E_p ， E_s 分别为正交投影误差和系统误差，可分别定义如下： $E_p^2 = \|f - P_J f\|^2$ ， $E_s^2 = \|P_J f - P_q^J f\|^2 = \left| \sum_k [2^{-J/2} x'(k) - c_{J,k}]^T \Phi(2^J t - k) \right|^2 = \sum_k |c_{J,k} - 2^{-J/2} x'(k)|^2$ 。因此 $E_q^2 = E_p^2 + E_s^2$ 。

由此可以看出预滤波器的设计可以减小系统误差 E_s ，换句话说设计预滤波器的目的就是使 E_s 尽可能小，从而达到逼近理论子波系数的目的。因为

$$c_{J,k} = 2^{J/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Phi(2^J t - k) dt = \frac{2^{J/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-2^J w) \hat{\Phi}(w) e^{-i w k} dw$$

$$2^{-J/2} x'(k) = 2^{-J/2} \sum_n x(n) q(n - k) = \frac{2^{J/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-2^J w) Q(w) e^{-i w k} dw$$

其中 $Q(w) = \sum_n q(n) e^{-i w n}$ ，所以对于带宽为 $2^{J+1}\pi$ 的带限信号 $f(t)$ 有

$$E_s^2 = \sum_k |c_{J,k} - 2^{-J/2} x'(k)|^2 = \frac{2^{J-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(-2^J w)|^2 |Q(w) - \hat{\Phi}(w)|^2 dw$$

$$= \frac{2^{J-1}}{\pi} \left[\sum_{m,n} A_{mn} q^T(m) q(n) - 2 \sum_n C_n^T q(n) + D \right] \quad (11)$$

其中

$$A_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(-2^J w)|^2 \cos((m - n)w) dw \quad (12)$$

$$C_n = \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(-2^J w)|^2 \operatorname{Re}(\hat{\Phi}(w) e^{i n w}) dw \quad (13)$$

且 $C_n = (C_{1n}, C_{2n}, \dots, C_{Nn})^T$ ， $D = \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(-2^J w)|^2 |\hat{\Phi}(w)|^2 dw$ 。

为了求得 $q(n)$ 预滤波器，可以通过求下面的偏导：

$$\frac{\partial E_s^2}{\partial q_l(n)} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad n \in Z \quad (14)$$

得到

$$A \tilde{Q} = C^T$$

其中

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} A_{00}, & A_{01}, & \cdots, & A_{0M} \\ A_{10}, & A_{11}, & \cdots, & A_{1M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M0}, & A_{M1}, & \cdots, & A_{MM} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}} \triangleq \begin{bmatrix} q_1(0), & q_2(0), & \cdots, & q_N(0) \\ q_1(1), & q_2(1), & \cdots, & q_N(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_1(M), & q_2(M), & \cdots, & q_N(M) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} C_{10}, & C_{11}, & \cdots, & C_{1M} \\ C_{20}, & C_{21}, & \cdots, & C_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{N0}, & C_{N1}, & \cdots, & C_{NM} \end{bmatrix}$$

求解上面的矩阵方程可得

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}^T$$

这就确定了自适应预滤波器 $q(n)$ 。

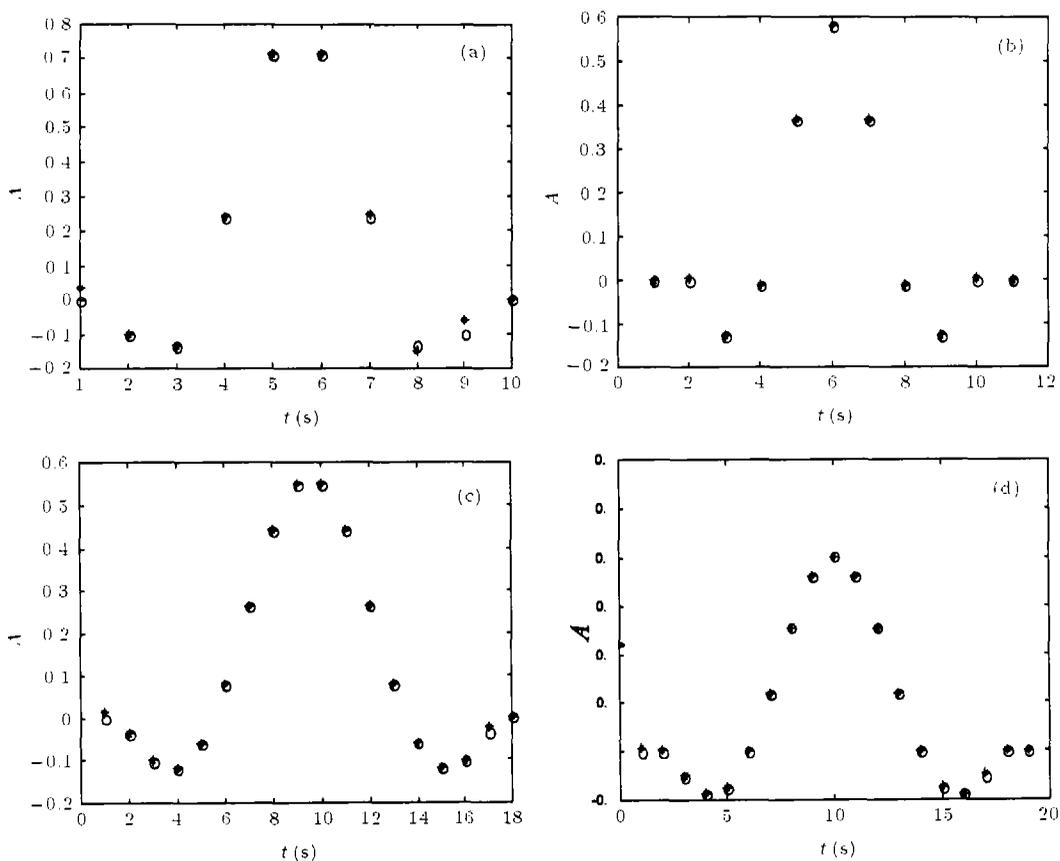


图 1 理论子波系数和预滤波后子波系数

- (a) $J = 1, N = 5$ 时 $\phi_1(t)$ 对应的子波系数;
 - (b) $J = 1, N = 5$ 时 $\phi_2(t)$ 对应的子波系数;
 - (c) $J = 2, N = 5$ 时 $\phi_1(t)$ 对应的子波系数;
 - (d) $J = 2, N = 5$ 时 $\phi_2(t)$ 对应的子波系数.
- 表示理论子波系数, * 表示预滤波后的子波系数

4 模拟结果

图 1 是选用 GHM 构造的多子波基, 信号取较为不利的矩形频谱信号, 即 $f(t) = \text{sinc}(t) = \sin \pi t / (\pi t)$ 时, 不同尺度空间上的理论子波系数和预滤波后的子波系数, ‘○’ 表示理论子波系数, ‘*’ 表示预滤波后的子波系数, 纵坐标 A 表示归一化子波系数。从图中可以看到中间部分的理论子波系数和预滤波后的子波系数几乎重合, 两边的理论子波系数和预滤波后的子波系数的误差较大, 这是信号截断的必然结果。表 1 列出了当 $J = 1 \sim 2$, $N = 2 \sim 5$ 时 E_s 所对应的值, 从这个表中可以看到信号经过预滤波后, 把信号放在 V_2 空间, 就可以满足较高的误差精度。

表 1 $J = 1 \sim 2$, $N = 2 \sim 5$ 时系统误差 E_s 所对应的值

N		2	3	4	5
J	1	0.05395675086010	0.02169148633691	0.01066165976014	0.00582003263617
	2	0.01849274742377	0.00366034186481	0.00135787477043	0.00104036107776

J 表示子波的尺度因子; N 表示预滤波器的长度

5 结 论

本文提出了一种自适应多子波预滤波器设计算法。分析和模拟结果表明, 此方法设计的预滤波器长度较短并且具有较高逼近精度和设计简单等特点, 它不仅可用于子波信号与图像处理, 还可应用于多子波网络、智能计算、目标识别与分类等诸多领域。

参 考 文 献

- [1] Cohn, I. Daubechies, G. Plonka, Regularity of refinable function vectors, *J. Fourier Anal. Appl.*, 1997, 3(2), 295-324.
- [2] G. Plonka, Approximation order provided by refinable function vectors, *Constr. Approx.*, 1997, 13(2), 221-224.
- [3] X. G. Xia, J. S. Geronimo, D. P. Hardin, B. W. Suter, Design of prefilters for discrete multiwavelet transforms, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1996, 44(1), 25-35.
- [4] P. N. Heller, *et al.*, Multiwavelet filter banks for data compression, in *Proc. IEEE ISCAS*, Washington, 1995, 1796-1799.
- [5] X. G. Xia, A new prefilter design for discrete multiwavelet transforms, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 46(6), 1558-1570.

DESIGN OF ADAPTIVE MULTIWAVELET PREFILTER

Yang Xinxing Jiao Licheng

(Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071 China)

Abstract This paper proposes an adaptive multiwavelet prefilter. The prefilter deals with the multi-wavelet initialization problem resulting from the non-lowpass property of multiscaling functions. Theory analysis and simulation results show that the approximation accuracy of the prefiltering algorithm is satisfactory.

Key words Adaptive prefilter, Multiwavelet transform, Multiscaling function

杨新星: 男, 1970 年生, 博士生, 主要研究兴趣为小波理论及其在图像处理和无线通信中的应用、智能信号及数字信号处理。

焦李成: 男, 1959 年生, 教授, 博士生导师, 现任西安电子科技大学研究生部主任, 长期以来从事智能信号处理及非线性理论研究。