

## 用电磁场算子理论求波导复合系统的本征值<sup>1</sup>

邢 锋 徐 诚 王 颖 刘 韦 宋文森

(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

**摘 要** 该文用并矢格林函数方法通过虚拟边界的电场和磁场的耦合求解波导复合结构的本征值。所采用的并矢格林函数没有奇异项,可以用标量格林函数来表示并进行计算,因此不仅可以计算横电与横磁模的基模和高次模式,还可以计算存在两个孪生模式的复合系统。该文同时还对经典场论中常用的一些定理,如面旋度定理进行了探讨。

**关键词** 并矢格林函数, 本征值, 面旋度定理

**中图分类号** TN814

### 1 引 言

用格林函数求解复合结构的谐振腔问题曾引起过广泛的讨论<sup>[1-3]</sup>。由于考虑了解的完备性,经典场论中电磁场的并矢格林函数表示形式十分复杂,限制了它的实际应用,因而在这些文献中所用的都是标量格林函数,即只是考虑最低模式的特殊情况。在经典场论中更常用的是通过本征函数展开来匹配耦合边界上的“阻抗”来求复合系统的本征值<sup>[4]</sup>,尽管也能得到同样的结果,但是在理论上缺乏严格性。电磁场的算子理论把并矢格林函数化为两个标量格林函数进行运算<sup>[5]</sup>,从而解决了经典场论中并矢格林函数的复杂形式和“奇异项”在实际应用中造成的困难,采用这种标量化的并矢格林函数形式可以解决含有 TE 和 TM 耦合的复杂电磁系统的边值问题<sup>[6,7]</sup>。文献 [8] 给出了将这一方法用于横电模分析的方法和计算结果,其中用面矢量格林定理导出从矢量积分到标量积分的简捷的变换,但该方法并不适合于横磁模式的计算,针对这一问题本文对面矢量格林定理进行了分析和讨论,给出了适合于横磁模的变换和计算结果,在此基础上提出了存在孪生模的系统的本征问题的解析方法。虽然现在电磁场的各种数值方法发展十分迅速,但解析方法在计算量和计算精度等方面仍具有优越性,而且数值方法中的很多问题都与解析方法有理论上的联系,因而研究解析方法仍具有重要的理论和实际意义。

### 2 并矢格林函数的标量形式与复合系统的本征问题

图 1 表示由两个规则波导系统耦合在一起的复合系统,其中  $S_d$  表示金属边界,而虚线  $S_l$  表示耦合边界,它是一种实际上并不存在的虚拟边界,该虚拟边界将系统分为两个完整的矩形。

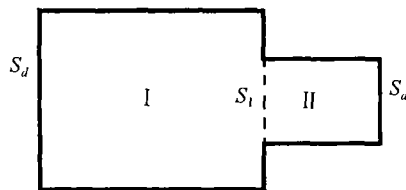


图 1 复合系统示意图

<sup>1</sup> 2001-12-05 收到, 2002-04-18 改回  
国家自然科学基金资助项目 (60071007)

由电磁场的算子理论可知, 该系统的并矢格林函数为<sup>[6,7]</sup>

$$\begin{aligned} \bar{G}_{II}^I &= \bar{G}_{mII}^I + \bar{G}_{nII}^I = \nabla \times \nabla' \times (d d \bar{G}_{mII}^I(\mathbf{R}, \mathbf{R}')/k_c^2) \\ &+ \frac{1}{k^2} \nabla \times \nabla \times \nabla' \times \nabla' \times (d d \bar{G}_{nII}^I(\mathbf{R}, \mathbf{R}')/k_c^2) \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $d$  为领示矢量, 可以取任意方向, 通常取  $x, y$  或  $z$  中的任一个作下标分别表示对应 I 区和 II 区的并矢格林函数, 此时虚拟边界也看作金属边界.  $G_{mII}^I$  和  $G_{nII}^I$  分别表示 I 和 II 区中的  $m$  和  $n$  类标量格林函数:

$$G = \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda^2 - k^2} \psi(\lambda, \mathbf{R}) \psi(\lambda, \mathbf{R}') \quad (2)$$

此处采用了格林函数的通用形式, 对于不同区域的  $m$  和  $n$  类标量格林函数可分别代入不同区域和对于不同类的本征值和本征函数. 与经典理论中的并矢格林函数相比实际上并没有多少差别, 只是从算子及函数空间理论根本不会产生经典理论中的奇异项, 也不需要任何并矢运算. 根据广义函数理论, 不论格林函数还是并矢格林函数都是带有奇异性的广义函数, 不能进行解析计算, 只有它与某个函数的泛函形式才有实在的内容. 因此整个并矢格林函数的问题中只要求标量格林函数就行了, 而且由于在并矢格林函数中并乘是没有实际意义的, 因为两个矢量函数的空间坐标是不同的, 所以对于并矢的转置符号也没有意义.  $m$  类本征函数可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi_m + k^2 \psi_m &= 0, & \text{在域 } v \text{ 内} \\ \partial \psi_m / \partial n &= 0, & \text{在边界 } S_{\perp} \text{ 上} \\ \psi_m &= 0, & \text{在边界 } S_{//} \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

这里  $S_{\perp}$  和  $S_{//}$  表示与领示矢量垂直和平行的边界,  $n$  类本征函数只需用把这两类边界条件交换一下即可.

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi_n + k^2 \psi_n &= 0, & \text{在域 } v \text{ 内} \\ \psi_n &= 0, & \text{在边界 } S_{\perp} \text{ 上} \\ \partial \psi_n / \partial n &= 0, & \text{在边界 } S_{//} \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

通过并矢格林函数的方法把虚拟边界上的电场和磁场耦合起来<sup>[6]</sup>, 得到

$$\begin{aligned} \sum_v A_v \left\{ \sum_{\mu} \frac{1}{\mu^2 - k^2} \int_{S_I} \frac{\mathbf{F}_{II}(\mu, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{II}(\chi, \mathbf{R})}{k_{\mu} k_{\chi}} ds \int_{S_I} \frac{\mathbf{F}_{II}(\mu, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{II}(v, \mathbf{R}')}{k_{\mu} k_v} ds' \right. \\ \left. + \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda^2 - k^2} \int_{S_I} \frac{\mathbf{F}_I(\lambda, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{II}(\chi, \mathbf{R})}{k_{\lambda} k_{\chi}} ds \int_{S_I} \frac{\mathbf{F}_I(\lambda, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{II}(v, \mathbf{R})}{k_{\lambda} k_v} ds' \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$v = 1, 2, \dots, N, \quad \chi = 1, 2, \dots, N$

这里  $F_I$  和  $F_{II}$  分别表示 I 区和 II 区的归一化磁矢量本征函数:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_n = \frac{1}{k_c k} \nabla \times \nabla \times (\psi_m \mathbf{d}) + \frac{1}{k_c} \nabla \times (\psi_n \mathbf{d}) \quad (6)$$

$\psi_m$  和  $\psi_n$  也必须是归一化的.  $k_c$  是垂直于领示矢量  $d$  的横向本征值, 它是为了使矢量本征函数归一化所必须加的归一化系数. I 区和 II 区的本征值已分别用  $\lambda$  和  $\mu$  来表示,  $v$  表示虚拟边界上虚拟的切向电场对于 II 区的本征函数展开时, 展开函数的本征值, 而  $\chi$  则是对于虚拟边

界上对磁场进行匹配时, 加权函数的本征值,  $k$  为待求的复合系统的本征值, (5) 式即为本征方程, 解该方程可求出复合系统的本征值。

### 3 求横电模本征问题的高次模式及面旋度定理的讨论

文献 [9] 讨论了如图 2 所示的波导复合系统, 取  $\mathbf{y}$  为领示矢量, 此时在整个本征函数的运算过程中  $y$  方向是可分离的, 在这种情况下不论对于 I 区还是 II 区本征函数都是正交的, 所以 (5) 式中的积分可以分离为分别对  $M$  类和  $N$  类函数的内积的积分, 即此类问题中, 复合系统依然可以分离为横电模和横磁模。整个计算的问题主要就是计算其中的 4 个面积分的问题。在对横电模的本征值的计算中, 应用了面矢量格林定理, 这一定理可以直接从面旋度定理推导出来<sup>[10]</sup>, 把 (5) 式中的矢量波函数的积分要变换为相应的标量波函数的积分, 以其中一个对于  $\mathbf{F}_I \cdot \mathbf{F}_{II}$  的积分为代表来进行化简。

$$\begin{aligned}
 \int_{S_I} \mathbf{F}_I(\lambda, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{II}(v, \mathbf{R}) ds &= \int_{S_I} \left[ \frac{1}{\lambda^2} \nabla \times \nabla \times \psi_{m\lambda}^I \mathbf{y} \right] \cdot \left[ \frac{1}{v^2} \nabla \times \nabla \times \psi_{mv}^{II} \mathbf{y} \right] ds \\
 &= \int_{S_I} \frac{1}{\lambda^2 v^2} [\nabla \times \psi_{mv}^{II} \mathbf{y}] \cdot [\nabla \times \nabla \times \nabla \times \psi_{m\lambda}^I \mathbf{y}] ds + \oint_l \frac{1}{v^2 \lambda^2} [\nabla \times \psi_{mv}^{II} \mathbf{y}] \\
 &\quad \times [\nabla \times \nabla \times \psi_{m\lambda}^I \mathbf{y}] \cdot \mathbf{t} dl \\
 &= \int_{S_I} \frac{1}{v^2} [\nabla \times \psi_{mv}^{II} \mathbf{y}] \cdot [\nabla \times \psi_{m\lambda}^I \mathbf{y}] ds \\
 &= \int_{S_I} \frac{1}{v^2} \psi_{m\lambda}^I \mathbf{y} \cdot [\nabla \times \nabla \times \psi_{mv}^{II} \mathbf{y}] \cdot ds + \oint_l \frac{1}{v^2 \lambda^2} \psi_{m\lambda}^I \mathbf{y} \cdot [\nabla \times \psi_{mv}^{II} \mathbf{y}] \cdot \mathbf{t} dl \\
 &= \int_{S_I} \frac{1}{v^2} \psi_{m\lambda}^I \mathbf{y} \cdot [-\mathbf{y} \nabla^2 \psi_{mv}^{II} + \nabla \nabla \cdot \psi_{mv}^{II} \mathbf{y}] ds = \int_{S_I} \psi_{mv}^{II} \psi_{m\lambda}^I ds \quad (7)
 \end{aligned}$$

这里已对文献 [9] 中的公式中的归一化系数作了改正。在公式推导中认为所有函数在  $y$  方向都是不变的, 这里应用了两次面矢量格林定理, 所谓面矢量格林定理就是把  $S_I$  面看成是两面都与  $S_I$  面平行的厚度为无限薄的长方体, 在这一体积内厚度方向的场可以看成不变。有了 (7) 式就可以很容易地从系数行列式等于零求出系统的本征值。由于其结果已在文献 [9] 中给出, 这里不在重复。

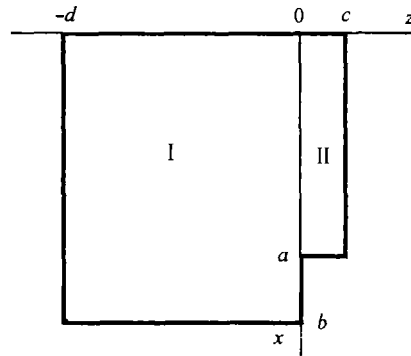


图 2 以  $\mathbf{y}$  为领示矢量时  $xz$  方向的横截面图

需要指出的是无法将 (7) 式用于横磁模的情况, 对于横磁模, 磁本征函数为

$$\mathbf{F}_{n\lambda} = \frac{1}{k_c} \nabla \times \psi_{n\lambda}(x, z) \mathbf{y} \quad (8)$$

其中  $\psi_{n\lambda}$  应满足

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 \psi_{n\lambda} + \lambda^2 \psi_{n\lambda} &= 0, & \text{在域 } v \text{ 内} \\
 \psi_{n\lambda} &= 0, & \text{在边界 } S \text{ 上}
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中边界  $S$  包括所有的导体边界和匹配边界即 I 区和 II 区的整个边界。如果把 (8) 式中的  $N$  类矢量波函数的积分进行类似于横磁模中的面矢量格林定理的变换, 把  $\mathbf{F}_I \cdot \mathbf{F}_{II}$  的积分化简为类似于 (7) 式的结果:

$$\begin{aligned} \int_{S_I} \mathbf{F}_I(\lambda, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{II}(v, \mathbf{R}) ds &= \int_{S_I} \left[ \frac{1}{k_c^I} \nabla \times \psi_{n\lambda}^I \mathbf{y} \right] \cdot \left[ \frac{1}{k_c^{II}} \nabla \times \nabla \times \psi_{nv}^{II} \mathbf{y} \right] ds \\ &= \int_{S_I} \frac{1}{k_c^I k_c^{II}} [\psi_{n\lambda}^{II} \mathbf{y}] \cdot [\nabla \times \nabla \times \psi_{nv}^I \mathbf{y}] ds + \oint_l \frac{1}{k_c^I k_c^{II}} [\psi_{n\lambda}^{II} \mathbf{y} \times \nabla \times \psi_{nv}^I \mathbf{y}] \cdot [\psi_{nv}^{II} \mathbf{y}] \cdot t dl \\ &= \int_{S_I} \frac{1}{k_c^I k_c^{II}} \psi_{m\lambda}^{II} \mathbf{y} \cdot [-\mathbf{y} \nabla^2 \psi_{nv}^I + \nabla \nabla \cdot \psi_{nv}^I \mathbf{y}] ds = \frac{v^2}{\lambda} \int_{S_I} \psi_{nv}^{II} \psi_{n\lambda}^I ds = 0 \end{aligned}$$

则无法再进行下面的运算了。因为在  $S_I$  面上  $\psi_{n\lambda}$  为零, 所以整个积分也为零了。这说明面旋度定理不是一个普遍的定理, 因而由此推导的面矢量格林定理也同样不是一个普遍的定理。只有在法向导数为零的面上, 如 (3) 式的条件下才适用。由于旋度运算只是三维空间下所特有的运算, 为了进行面旋度定理的证明, 必须把面变成一个极薄的长方体, 而假定体内的函数在厚度方向是不变的。在有旋度运算的情况下, 这一做法就不合理了, 在厚度方向上, 不管厚度有多薄, 它的厚度方向的导数仍不等于零。对于任何欧氏空间内可以分离的运算符, 如散度与梯度运算符, 垂直于平面方向的导数不会产生二维平面内的场, 所以可以建立面梯度和面散度定理。但是面旋度定理<sup>[10]</sup>:

$$\iint_S \nabla_s \times \mathbf{F} ds = \oint_L (\mathbf{m} \times \mathbf{F}) dl$$

中定义了一个横向的旋度, 它的意思是对矢量取散度后, 去掉与  $S$  面垂直的分量, 成为平面上的矢量, 但这一公式对于横磁模的情况是不成立的, 所以必须用另外的方法来计算横磁模的本征问题。

#### 4 横磁模的本征值的计算

由于 (5) 式中的积分是在  $z = 0$  处进行, 所以 (9) 式的解可简化为

$$\begin{cases} \psi_{n\lambda}^I \mathbf{y} &= -\frac{1}{bd} \sin \frac{l\pi}{b} x \sin \frac{j\pi}{d} z \mathbf{y} \\ \psi_{nv}^{II} \mathbf{y} &= -\frac{1}{ac} \sin \frac{l'\pi}{a} x \sin \frac{j'\pi}{c} z \mathbf{y} \end{cases}$$

用  $\mathbf{y}$  代替  $\mathbf{d}$ , 可以得到归一化的  $N$  类矢量本征函数

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_n^I &= \nabla \times \psi_{n\lambda}^I \mathbf{y} = -\frac{(2 - \delta_j^0)}{bdk_{c1}} \frac{j\pi}{d} \sin \frac{l\pi}{b} x \cos \frac{j\pi}{d} z \mathbf{x} + \frac{(2 - \delta_l^0)}{bdk_{c1}} \frac{l\pi}{b} \cos \frac{l\pi}{b} x \sin \frac{j\pi}{d} z \mathbf{z} \\ \mathbf{F}_n^{II} &= \nabla \times \psi_{nv}^{II} \mathbf{y} = -\frac{(2 - \delta_{j'}^0)}{ack_{c2}} \frac{j'\pi}{c} \sin \frac{l'\pi}{a} x \cos \frac{j'\pi}{c} z \mathbf{x} + \frac{(2 - \delta_{l'}^0)}{ack_{c2}} \frac{l'\pi}{a} \cos \frac{l'\pi}{a} x \sin \frac{j'\pi}{c} z \mathbf{z} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

并直接对 (10) 式的结果来求积分, 式中的第二项为零, 可以去掉, 但对于第一项在求出积分之前, 先不要代入  $z = 0$ , 因为还要对它进行和式运算, 在和式运算后再代入。把 (5) 式写成矩阵方程的形式

$$\sum_{v=1}^N A_v W_{v\chi} = 0, \quad \chi = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

并令  $W_{v\chi} = W_{v\chi 1} + W_{v\chi 2}$ , 以分别表示 (5) 式中对于  $\mu$  和  $\lambda$  的和式。由于不考虑  $y$  方向的场变化, 每个区的本征值和  $k_c$  相同, 即

$$\mu^2 = k_{c2}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \quad \text{和} \quad \lambda^2 = k_{c1}^2 = \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{d}\right)^2$$

下面我们来计算  $W_{v\chi 1}$  和  $W_{v\chi 2}$ , 把上式和 (10) 式代入 (5) 式的相应的部分, 注意现在矢量本征值  $\mu$  和  $\lambda$  已分别由正整数  $m, n$  和  $l, j$  所代替, 同样用  $m', n'$  和  $l', j'$  来代替  $v$  和  $\chi$ , 并且注意由于实际上只有当  $j = j'$  时积分才不等于零, 这样分母中的  $k_c^2$  正好与从对三角函数微分所得到的分子相抵消。因而可得

$$W_{v\chi 1} = \sum_{m=0}^{N'} \sum_{n=0}^{N'} \frac{(2 - \delta_n^0)}{ac} \frac{(2 - \delta_n^0)}{(m\pi/a)^2 + (n\pi/c)^2 - k^2} \int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{c} z \sin \frac{l'\pi}{a} x \cos \frac{j'\pi}{c} z dx \\ \times \int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x' \cos \frac{n\pi}{c} z' \sin \frac{m'\pi}{a} x' \cos \frac{n'\pi}{c} z' dx' \quad (12)$$

和

$$W_{v\chi 2} = \sum_{l=0}^{N'} \sum_{j=0}^{N'} \frac{1}{bd} \frac{(2 - \delta_j^0)}{(l\pi/b)^2 + (j\pi/d)^2 - k^2} \int_0^a \sin \frac{l\pi}{b} x \cos \frac{j\pi}{d} z \sin \frac{l'\pi}{b} x \cos \frac{j'\pi}{d} z dx \\ \times \int_0^a \sin \frac{l\pi}{b} x' \cos \frac{j\pi}{d} z' \sin \frac{m'\pi}{a} x' \cos \frac{n'\pi}{c} z' dx' \quad (13)$$

可以把  $W_{v\chi 2}$ ,  $W_{v\chi 1}$  的公式变换为没有病态积分的形式<sup>[6]</sup>:

$$W_{v\chi 2} = \frac{2}{b} \sum_{l=1}^{N'} \int_0^a dx' \int_0^a dx \left\{ \left[ \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{N'} \frac{(2 - \delta_j^0)}{(j\pi/d)^2 - k_{g2}^2} \cos \frac{j\pi}{d} z \cos \frac{j\pi}{d} z' \right] \sin \frac{l\pi}{b} x \sin \frac{l'\pi}{b} x \right\} \\ \times \sin \frac{l\pi}{b} x' \sin \frac{m'\pi}{a} x' \\ = \frac{2}{b} \sum_{l=1}^{N'} \int_0^a \sin \frac{l\pi}{b} x' \sin \frac{m'\pi}{a} x' dx' \int_0^a \sin \frac{l\pi}{b} x \sin \frac{l'\pi}{b} x dx \\ \times \begin{cases} -\frac{1}{k_{g2}} \frac{\cos k_{g2}(d - z') \cos k_{g2}z}{\sin k_{g2}d}, & 0 > z > z' \\ -\frac{1}{k_{g2}} \frac{\cos k_{g2}(d - z) \cos k_{g2}z'}{\sin k_{g2}d}, & z' \leq z < d \end{cases} \quad (14)$$

对现在这个问题来说, 矩阵元素中  $z$  方向的函数与求和式有关, 先必须保留, 在求出源函数后, 就可以代入  $z$  和  $z'$  等于 0, 使 (14) 式中的格林函数得以简化。其中  $k_{g2} = \sqrt{k^2 - (l\pi/b)^2}$ 。当  $l\pi/b > k$  时, (14) 式中的正弦和余弦函数都变换成虚宗量的函数, 即双曲正切函数。先求积分

$$\int_0^a \sin \frac{l\pi}{b} x' \sin \frac{m'\pi}{a} x' dx' = (-1)^{m'} (2 - \delta_{m'}^0) \frac{bm'}{al} \frac{\sin(l\pi a/b)}{(l\pi/b)} \left(1 - \left(\frac{m'b}{la}\right)^2\right)^{-1}$$

把上式及另一个类似的积分代入 (14) 式, 并用  $m'$  和  $l'$  代替  $v, \chi$  得

$$W_{m'l'2} = (-1)^{m'+l'} (2 - \delta_{m'}^0)(2 - \delta_{l'}^0) \sum_{l=0}^{N'} \frac{bm'}{al} \frac{bl'}{al} \left[ \frac{\sin(l\pi a/b)}{(l\pi/b)} \right]^2 \\ \times \frac{-\cot k_{g2}d}{k_{g2}b[1 - (m'b/(la))^2][1 - (l'b/(la))^2]} \quad (15)$$

式中当  $l = 0$  而  $m'$  或  $l'$  不等于零时是奇点, 这时  $W_{m'l'2} = 0$ . 当  $m'$  和  $l'$  都等于零时, 和式的第一项, 按极限运算法则应为 1. 当  $l\pi/b > k$  时, 令  $k_{g2} = \sqrt{(l\pi/b)^2 - k^2}$ . 这时

$$W_{m'l'2} = (-1)^{m'+l'} (2 - \delta_{m'}^0)(2 - \delta_{l'}^0) \sum_{l=0}^{N'} \frac{bm' bl'}{al al} \left[ \frac{\sin(l\pi a/b)}{(l\pi/b)} \right]^2 \times \frac{-\coth k_{g2} d}{k_{g2} b [1 - (m'b/(la))^2][1 - (l'b/(la))^2]} \tag{16}$$

$W_{m'l'1}$  的结果更简单, 因为积分:

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x' \sin \frac{m'\pi}{a} x' dx' = \frac{a}{(1 + \delta_m^0)} \delta_{mm'}$$

此处  $\delta_{mm'}$  为一般的克内道尔  $\delta$  函数,  $\delta_m^0$  表示  $m = 0$  时函数值取 1, 否则取 0. 格林函数的形式与 II 区类似, 只是用  $c$  代替  $d$ , 用  $k_{g1}$  代替  $k_{g2}$ . 由此可得

$$W_{m'l'1} = \sum_{m=0}^{N'} (2 - \delta_{0m})^2 \delta_{mm'} \delta_{ml'} \frac{-\cot k_{g1} c}{k_{g1}} = (2 - \delta_{0m})^2 \delta_{m'l'} \frac{-\cot k_{g1} c}{k_{g1} a} \tag{17}$$

$W_{m'l'1}$  是一个对角矩阵. 同样当  $m\pi/a > k$  时, 令  $k_{g1} = \sqrt{(m\pi/a)^2 - k^2}$ .

$$W_{m'l'1} = \sum_{m=0}^{N'} (2 - \delta_{0m})^2 \delta_{mm'} \delta_{ml'} \frac{-\coth k_{g1} c}{k_{g1}} = (2 - \delta_{0m})^2 \delta_{m'l'} \frac{-\coth k_{g1} c}{k_{g1} a} \tag{18}$$

计算图 2 所示波导复合系统的本征值, 其尺寸取为  $b = \pi/10, c = \pi/25, d = 4\pi/25$ , 表 1 和表 2 给出了计算结果. 表 1 中的 1, 2 栏中的数据为矩形波导 (未切角) 和波导 I 中各模式精确的本征值, 3, 4, 5 栏分别为  $a$  取  $\pi/25, 2\pi/25$  和  $3\pi/25$  时复合系统各模式的本征值, 从表中的数据可以看出, 在各模式下, 复合系统的本征值介于两矩形波导的本征值之间, 且本征值随横截面的减小而增大, 这与实际情况是相符合的; 表 2 中的数据为  $a$  取  $2\pi/25$  时, 采用本文中的方法和有限差分法得到的复合系统的本征值, 对比结果表明, 两种方法的计算结果相吻合.

表 1 不同尺寸的矩形波导和复合系统的本征值

波型模式		TE <sub>10</sub>	TE <sub>20</sub>	TE <sub>21</sub>	TE <sub>30</sub>	TE <sub>40</sub>	TM <sub>11</sub>	TM <sub>21</sub>	TM <sub>31</sub>
矩形波导 本征值	1	5.000	10.000	14.142	15.000	20.000	11.180	14.142	18.027
	2	6.667	13.333	16.667	20.000	26.667	12.018	16.667	22.361
复合系统 本征值	3	5.799	10.500	14.080	17.280	20.620	10.900	14.420	21.077
	4	5.228	10.390	14.695	16.231	20.136	11.069	14.890	20.339
	5	4.892	10.218	14.212	15.115	20.099	11.160	14.293	20.139

表 2 与有限差分法计算结果的对比

波型模式		TE <sub>10</sub>	TE <sub>20</sub>	TE <sub>21</sub>	TE <sub>30</sub>	TE <sub>40</sub>	TM <sub>11</sub>	TM <sub>21</sub>	TM <sub>31</sub>
算子理论	1	5.228	10.390	14.695	16.231	20.136	11.069	14.890	20.339
有限差分	2	5.219	10.421	14.043	16.712	19.818	11.680	15.961	20.265

### 5 讨论和展望

本文及文献 [9] 所给出的计算波导复合结构的传播常数, 虽然其结果可由经典的模式匹配方法求得, 但所用的方法完全不同. 文中所述方法的优点不仅在于其数学上的严密性和物理概

念上的合理性, 而更在于这一方法中, 实际上已经同时考虑了横电模式与横磁模式, 只是为了分析方便起见, 假定了场在  $y$  方向不变后, 才把这两类模式分离为独立的模式. 因而这一方法只要稍加改进, 就可以应用到横电模与横磁模耦合在一起的任意三维系统的情况, 如在  $y$  方向也切去一矩形块而形成的三维不均匀谐振腔的本征值问题, 此类问题的解决将对一大类微波系统的计算提供一种简单而有效的方法.

### 参 考 文 献

- [1] A. G. Millamson, The resonant frequency and tuning characteristics of a narrow-gap reentrant cylindrical cavity, IEEE Trans. on MTT., 1976, MTT-24(4), 182-187.
- [2] M. Jaworski, On the resonant frequency of a resonant cylindrical cavity, IEEE Trans. on MTT., 1987, MTT-26(4), 256-260.
- [3] 张昭洪, 吴鸿适, 耦合腔结构特性研究, 电子学报, 1986, 14(1), 7-15.
- [4] 宋文森, 李镇淮, 双重入腔的场计算, 电子科学学刊, 1987, 9(5), 441-450.
- [5] 宋文森, 求解电磁场并矢格林函数的新方法, 电子科学学刊, 1989, 11(2), 164-175.
- [6] 宋文森, 并矢格林函数和电磁场的算子理论, 合肥, 中国科技大学出版社, 1991, 第 9 章.
- [7] 宋文森, 现代电磁场理论的数学基础——矢量偏微分算子, 北京, 科学出版社, 1999, 第 5 章.
- [8] Xu Cheng, Zhang Xiaojuan, Song Wenmiao, Calculating the cutoff frequencies of heteromorphic waveguide by operator theory, 2000 5th International Symposium on Antenna, Propagation and EM Theory, Beijing, 2000, 281-284.
- [9] Xiaojuan Zhang, Cheng Xu, Wenmiao Song, Calculating higher mode characteristics of heteromorphic waveguide by operator theory, Proceedings of 2000 Asia-Pacific Microwave Conference, Sydney, 2000, 970-974.
- [10] 戴振铎, 鲁述, 电磁场理论中的并矢格林函数, 武汉, 武汉大学出版社, 1995, 附录 A.4.

## COMPUTATION OF THE EIGENVALUE OF COMPOUND WAVEGUIDE SYSTEM BY ELECTROMAGNETIC OPERATOR THEORY

Xing Feng    Xu Cheng    Wang Ying    Liu Wei    Song Wenmiao

(*Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

**Abstract** The eigenvalues of compound waveguide system are solved by using the method of dyadic Green's function by matching the electric and magnetic field on a virtual boundary. As the chosen dyadic Green's function has no singularity and can be calculated by scalar Green's function, the method can be applied not only in the computation of dominant and higher modes for TE and TM waves, but also in the computation of compound system with twin modes. In addition, some theorems in classical field theory such as rotation theorem on surface are discussed in this paper.

**Key words** Dyadic Green's function, Eigenvalue, Rotation theorem on surface

邢 锋: 男, 1966 年生, 博士生, 从事电磁场与微波技术方面的研究工作.

徐 诚: 男, 1972 年生, 博士生, 从事电磁场与微波技术方面的研究工作.

王 颖: 女, 1970 年生, 博士生, 从事电磁场与微波技术方面的研究工作.

刘 韦: 男, 1976 年生, 硕士生, 从事电磁场与微波技术方面的研究工作.

宋文森: 男, 1938 年生, 研究员, 博士生导师, 从事电磁场与微波技术方面的研究工作, 著有专著两本, 发表论文 100 多篇.