第32卷 第15期 计 算 机 工 程 2006年8月
Vol.32 № 15 Computer Engineering August 2006
·网络与通信· 文章编号：1000—3428(2006)15—0115—02 文献标识码：A 中图分类号：TP393.06

基于凸函数理论的 Hopfield 网络稳定性分析

李玉萍[1]，张素庆[2]，叶世伟[2]
(1. 中国地震局地壳应力研究所，北京 100085；2. 中国科学院研究生院，北京 100049)

摘 要：讨论连接权值不对称或激活函数非单调的离散时间 Hopfield 网络稳定性分析。引入新的能量函数，利用凸函数的性质证明随状态的更新网络能量函数单调下降从而得出网络收敛的充分条件。对于激活函数为非单调的连续函数而网络连接权值对称，则当网络连接权值矩阵的最大特征值和神经元激活函数的导数下确界之积大于–1 时，网络全并行收敛。对于网络激活函数为单调连续函数，网络连接权值为非对称矩阵时，神经元激活函数导数的最大值和连接权值矩阵的 2-范数之积小于 1 时，网络全并行收敛。

关键词：Hopfield 网络；凸函数次梯度；共轭函数

Stability Analysis to Hopfield Network Based on Convex Function Theory

LI Yuping[1], ZHANG Suqing[2], YE Shiwei[2]
(1. Institute of Crustal Dynamics, China Earthquake Administration, Beijing 100085;
2. Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

【Abstract】This paper discusses stability of discrete time Hopfield network with the sequential weight which is asymmetry or with the activation function which is non-monotonic. New energy function is imported, then it proved that the energy function of network is declined monotonously with the updating of the state using the properties of convex function, gained the sufficient condition of the network convergence in the end. To the activation function that is non-monotonic sequential function, when product of the maximum characteristic value of the network connecting weight matrix and the infimum of the derivative to the activation function of the nerve cell more than -1, the network convergences concurrently. At the same time, to the network activation function is monotonous sequential function, and the network connecting weight is asymmetry matrix, when the product of the maximum value of derivative to the nerve cell and the matrix of the two-norm to the connecting weight value is less than 1, the network convergences concurrently.

【Key words】Hopfield network; Subgradient of convex function; Conjugate function

1 概述

在将Hopfield网络应用于优化计算时,一般使用连续时间的Hopfield网络模型。但目前大多数的实现仍然在数字计算机上，即使连续时间的Hopfield网络，仍然需要进行离散化。因此，离散时间的Hopfield网络(Discrete Time Hopfield Network，DTHN)的研究显得很有意义[1]。在文献[1]中，给出了当神经激活函数为单调增加的连续函数时，权值矩阵对称的DTHN收敛到唯一最小点的充分条件，但证明相当繁琐。实际上DTHN是一个非线性的差分迭代系统，研究其稳定性目前主要有两种方法：一是压缩映射的不动点原理[2]；二是所谓的Lyapnov直接方法[3]。本文中利用Lyapnov直接方法研究DTHN的稳定性。

联想记忆(Associative Memory，AM)是神经网络理论的一个重要组成部分，也是神经网络用于智能控制、模式识别与人工智能等领域的一个重要功能[4]。它主要利用神经网络的良好容错性，使不完整的、污损的、畸变的输入样本恢复成完整的原型，适于识别、分类等用途。经国内外学者数十年对神经网络和联想记忆的研究，已提出了许多联想记忆模型和学习方法[5]；进行了相应的稳定性和记忆容量计算等方面的研究[6]。对联想记忆的研究需要明确对联想记忆网络的基本要求：(1)联想记忆须具有一定的容错性，即吸引子要有一定的吸引域；(2)须具有较大的记忆容量；(3)技术上可行的。Hopfield网络联想记忆存在的重要问题是：存在着所谓的“伪状态”，由于伪状态的存在使联想记忆网络的容错性差、记忆容量小。对此，对现有联想记忆网络进行改进，研究如何通过减小甚至消除伪状态的吸引域，来提高联想记忆网络的容错性，增大记忆容量。主要从系统的以下 3 方面考虑：(1)调节系统的动力学特性；(2)改变连接权矩阵；(3)修改神经元激活函数，使用非单调增加的激活函数[7]。另外，神经元之间连接权值对称一般是不易实现的，所以研究连接权值不对称时网络的稳定性分析[9]一般都需要假定神经元激活函数为连续可微的，利用的基本工具是压缩映射定理[10]，从而需要的条件都比较强且不易验证，给实际应用带来很大不便。在文献[7]提出使用非单调函数作为神经元激活函数时，网络稳定性分析又有很大困难。

2 凸函数的简单介绍

对于凸函数简单定义和性质，都可以在文献[8]中找到。

基金项目：中国科学院研究生院院长基金资助项目(YZJJ200206)；国家自然科学青年项目基金资助项目(60203027)

作者简介：李玉萍(1968—)，女，高工，主研方向：计算机网络与通信；张素庆，硕士生，叶世伟，博士、副教授

收稿日期：2006-03-06 **E-mail：**zhangsq190@163.com

根据凸函数次梯度的性质，不仅能够对离散状态的 DTHN 动力学行为进行分析，而且能够将它们和连续状态的 DTHN 稳定性条件完全统一起来。

对于$f(\cdot)$为$R^n \to (-\infty,\infty]$的凸函数，记$P(f)=\{(x,\alpha): x\in R^n, \alpha\in R, f(x)\le \alpha\}$和$ED(f)=\{x: x\in R^n, f(x)<+\infty\}$则$f(\cdot)$为正常凸函数，如果它无处取$-\infty$ 且不恒等于$+\infty$。

定义凸函数$f(\cdot)$支撑集如下：$L(f)=\{(a,b): a\in R^n, b\in R, \forall x\in R^n$。有$a^Tx-b\le f(x)\}$。同时定义它的闭为：$\mathrm{cl}\, f(x)=\sup_{(a,b)\in L(f)}\{a^Tx-b\}$。$f(\cdot)$为闭凸函数的条件为：$\mathrm{cl}\, f(x)=f(x)$。

定义 1 若凸函数 $f(\cdot)$在 x 处 $f(x)<+\infty$,定义 $f(\cdot)$在 x 处的次梯度：

$$\xi\in\partial f(x) \Leftrightarrow \text{对任给y有} f(y)\ge f(x)+\xi^T(y-x) \quad (1)$$

性质 1 $\partial f(x)$为一个闭的凸集。

定义 2 设$f(x)$为 $R^n\to(-\infty,+\infty]$ 的凸函数，定义$f(x)$的共轭函数为$f^*(\xi)=\max\limits_{\mathbf{x}\in R^n}\{x^T\xi - f(x)\}$。

性质 2 设 $f(x)$为 $R^n\to(-\infty,+\infty]$ 的凸函数，则共轭函数 f^*也是凸函数，且 $P(f^*)=L(f)$此外 $f^{**}=\mathrm{cl}(f)$。

性质 3 设$f(x)$为R^n上的凸函数，则$\xi\in\partial f(x)$的充要条件为$f^*(\xi)=\xi^Tx-f(x)$。

性质 4 设$f(x)$为R^n上的凸函数，若$\xi\in\partial f(x)$，则$x\in\partial f^*(\xi)$。若$x\in\partial f^*(\xi)$且$f(x)$在x点是闭的，则$\xi\in\partial f(x)$。

下面研究共轭函数的性质，它是分析 DTHN 的基础，其结果见文献[13]。

定理 1 设 $f(\mathbf{x})$ 为 $R^n\to(-\infty,+\infty]$ 的闭凸函数，$f^*(\xi)$为 $R^n\to(-\infty,+\infty]$ 的闭凸函数，设$ED(f^*)=\{\xi: f^*(\xi)<+\infty, \xi\in R^n\}=\Omega$为$R^n$的凸集，矩阵A为正定对称矩阵。那么，$f(\mathbf{x})-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 为凸函数充要条件是 $\frac{1}{2}\xi^T\mathbf{A}^{-1}\xi-f^*(\xi)$ 为在Ω内的凸函数。

引理 1 设 $\varphi(x)$ 为连续单调非减一元函数，$k=\sup\limits_{x\ne y}\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}<+\infty$,令 $\Phi(x)=\int_0^x\varphi(s)ds$，则 $\frac{k}{2}x^2-\Phi(x)$ 为凸函数。

证明：由凸函数的定义直接验证即可。

引理 2 设 $\varphi(x)$ 为连续一元函数，$k=\inf\limits_{x\ne y}\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}>-\infty$，令 $\Phi(x)=\int_0^x\varphi(s)ds$，则 $\Phi(x)-\frac{k}{2}x^2$ 为凸函数。

证明：由凸函数的定义直接验证即可。

3 DTHN 模型的稳定性

首先如下定义的 DTHN 模型的运行方式：

$$x(n+1)=\varphi(Wx(n)) \quad (2)$$

其中 W 为神经网络的连接权值；$\varphi(\cdot)$表示激活函数，即$\varphi(x)=(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2),...,\varphi_n(x_n))^T$，其中神经元 i 的激活函数 $\varphi_i(\cdot)$ 为连续函数。在式(2)描述的 DTHN 模型中，没有假定网络中神经元连接权值对称，也没有假定激活函数单调可微等。另外在式(2)中没有出现偏置，其实已经将神经元的偏置看作激活函数的平移参数，即 $\varphi_b(x)=\psi(x+b)$，将 b 看作激活函数的参数从而不出现神经元的净输入中，这样做可以使得我们的分析简洁。对于式(2)中的$\varphi(x)$，定义 n 元函数为

$$\Phi(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i}\varphi_i(s)ds \quad (3)$$

定义式(2)的 DTHN 模型的能量函数为

$$E(x)=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{W}\mathbf{x}-\Phi(Wx) \quad (4)$$

定理 2 在由式(2)描述的DTHN模型中，网络连接权值对称。设神经元 i 的激活函数 $\varphi_i(x)$ 为一元连续函数,$k_i=\inf\limits_{x\ne y}\frac{\varphi_i(y)-\varphi_i(x)}{y-x}$,记$K=\mathrm{diag}[k_1,k_2,\dots,k_n]$。同时假设对所有的$n$, $x(n)$有界。记$F(x)=\frac{1}{2}x^TWx+\Phi(Wx)$，其中$\Phi(x)$由式(3)定义。若$F(x)$为凸函数，则DTHN模型(2)全并行收敛。

(1)若 W+WKW 为正定矩阵，则 DTHN 模型(2)全并行样收敛。

证明：(1)显然$F(x)$为连续可微凸函数，则$F(x(n+1))-F(x(n))-\nabla F(x(n))^T(x(n+1)-x(n))\ge 0$。

对于全并行模式，由式(2)可得

$$\nabla F(x(n))=Wx(n)+W\Phi(Wx(n))=Wx(n)+Wx(n+1)$$

从而

$$E(x(n))-E(x(n+1))\ge 0 \quad (5)$$

由式(5)得 $E(x(n))\ge E(x(n+1))$，即能量函数单调减少。又由题设 $x(n)$有界，所以全并行更新模式收敛。

(2)由K的定义，根据引理 2 的结论，可知$\Phi(x)-x^TKx/2$为凸函数，其中$\Phi(x)$由式(3)定义。从而$\Phi(Wx)-x^TWKWx/2$为凸函数。若W+WKW为正定矩阵，$\frac{1}{2}x^TWx+\Phi(Wx)=\frac{1}{2}x^T(W+WKW)x+\Phi(Wx)-x^TWKWx/2$ 为凸函数。由结论(1)可得由式(2)描述的DTHN模型全并行收敛。 证毕。

若神经元激活函数除了一个平移常数外都相同，这时K为$\mu\cdot I$,其中I为单位矩阵。这时定理2中(2)的条件变为$W+\mu\cdot W^2$为正定矩阵。注意$\mu<0$ (它为非单调函数导数的下界)，所以W必为正定矩阵且$\lambda+\mu\cdot\lambda^2>0$,其中$\lambda$为W的任意特征值。从而$\mu>-1/\lambda_{max}$，其中$\lambda_{max}$为W的最大特征值。

假设神经元激活函数为单调非减的一元连续函数。对由式(2)描述的 DTHN 模型，定义能量函数为

$$E_2(x)=\Phi(Wx)+\Phi^*(x)-x^TWx \quad (6)$$

显然，根据共轭函数的定义，能量函数$E_2(x)$非负。

定理 3 设神经元i的激活函数 $\varphi_i(x)$ 为连续单调非减一元函数，$k_i=\sup\limits_{x\ne y}\frac{\varphi_i(y)-\varphi_i(x)}{y-x}$，记$K=\mathrm{diag}[k_1,k_2,\dots,k_n]$。若$K^{-1}-W^TKW$为正定矩阵，则DTHN模型(2)全并行收敛。

证明：记 $G(x)=\Phi^*(x)-\frac{1}{2}x^TK^{-1}x$，$H(x)=\frac{1}{2}x^T(K^{-1}-W^TKW)x$。根据矩阵K的定义和引理 2，$\frac{1}{2}x^TKx-\Phi(x)$为凸函数，从而$F(x)=\frac{1}{2}x^TKx-\Phi(x)$为凸函数；另外由推论 1 的结论可得$\Phi^*(x)-\frac{1}{2}x^TK^{-1}x$为凸函数，即$G(x)$为x的凸函数。对任给$\xi\in\partial\Phi^*(x(n+1))$，从而$\xi-K^{-1}x(n+1)\in\partial G(x(n+1))$，由次梯度的定义

$$G(x(n))\ge G(x(n+1))+(\xi-K-1x(n+1))T(x(n)-x(n+1))$$

由式(4)有 $Wx(n)\in\partial\Phi^*(x(n+1))$，所以可得到

$$G(x(n))\ge G(x(n+1))+(Wx(n)-K-1x(n+1))T(x(n)-x(n+1)) \quad (7)$$

对于任给的$\xi\in\partial\Phi(Wx(n))$,从而 $KWx(n+1)-\xi\in\partial F(Wx(n))$,由次梯度的定义

$$F(Wx(n+1))\ge F(Wx(n))+(KWx(n)-\xi)T(Wx(n+1)-Wx(n))$$

由式(3)描述的$\Phi(\cdot)$的定义有 $x(n+1)\in\partial\Phi(Wx(n))$，可得到

$$F(Wx(n+1))\ge F(Wx(n))+(KWx(n)-x(n+1))T(Wx(n+1)-Wx(n)) \quad (8)$$

由式(7)+式(8)得

（下转第 131 页）