

文章编号:1000-6893(2007)增-0S49-08

基于空间算子代数的航天器多体动力学 递推实时仿真算法

孟占峰, 韩 潮

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100083)

Recursive Multi-body Dynamical Algorithm for Real-time Simulation of Spacecraft Using Spatial Operator Algebra

MENG Zhan-feng, HAN Chao

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics,
Beijing 100083, China)

摘 要: 进一步发展了空间算子代数符号体系, 给出了一组坐标系无关空间矢量, 张量和矢阵符号表示和相应的坐标投影规则。基于空间算子代数符号体系, 推导了适用于航天器实时仿真的无根、树状拓扑、开环多体动力学递推算法, 并根据投影规则给出了递推算法在惯性坐标系的投影方程。新的空间算子代数符号体系有符号定义严格, 推导过程力学概念清晰, 推导结果易于实时仿真程序实现的优点。推导的递推算法非常适合于正逆混合问题和变拓扑问题的求解, 可以满足多体航天器动力学实时仿真的要求。

关键词: 航天器; 多体动力学; 空间算子代数; 递推算法; 实时仿真

中图分类号: O313.7 **文献标识码:** A

Abstract: A new set of coordinate-free spatial vector tensor notation and frame projection rules in deriving motion equation of multi-body system using spatial operator algebra is introduced. A floppy base tree topology open chain recursive multi-body dynamical algorithm for real-time simulation of spacecraft using spatial operator algebra is derived. Inertial frame projection equations are derived based on projections rules. The advantages of the new notation system are strict, clear and easy for real-time code realization. The algorithm is readily to resolve the forward-inverse mixed problem and topology changed problem, achieving the requirement of real-time simulation of dynamics for multi-body spacecraft.

Key words: spacecraft; multi-body dynamics; spatial operator algebra; recursive algorithm; real-time simulation

为了适应多体系统逆动力学分析和实时仿真快速算法的需要, 提出了递推形式的动力学方程。这一方面的工作最早是由 Vereshchagin^[1] 于 1974 年提出的, 他应用递推公式推导了 Gibbs-Appel 形式运动方程, 该方程适用于带单自由度旋转铰或棱柱铰的链状拓扑结构, 方程通过动态规划进行求解。1979 年, Armstrong^[2] 推导了适用于三自由度球铰情况的动力学方程。1983 年, Featherstone 创造性地提出了铰接体算法 (articulated-body algorithm), 该算法的第 1 个版本^[3] 适用于链状拓扑单自由度铰的情况, 而第 2 个版本^[4] 包括了一般的铰链模型和更一般的拓扑结构, 并且速度更快。同时, Rodriguez^[5] 认识到递推形式的动力学方程和 Kalman 滤波方程在数学

形式上的一致性, 创造了空间算子代数 (spatial operator algebra), 并用其研究多体动力学问题。Jain^[6] 利用空间算子代数推导了链状拓扑多刚体递推动力学方程, 并对以前提出的一些算法进行了比较。之后的几年内, Jain 和 Rodriguez 基于空间算子代数, 推广并扩展了他们提出的递推形式的动力学方程的适用范围。文献[7]给出树状拓扑多刚体动力学方程的推导; 文献[8]给出了递推形式的柔性多体动力学方程; 文献[9]讨论了正逆混合动力学问题的处理办法; 文献[10]讨论了对于无根树的处理办法。两人这一系列卓越的理论工作, 基本完善了基于空间算子代数的多体递推动力学的理论体系, 为该理论在工程上的成功应用奠定了坚实的基础。

Jain 和 Rodriguez 基于空间算子代数体系, 带领 JPL 的同事们完成了树状拓扑柔性多体动力学实时仿真算法软件包 (dynamics algorithms

for real-time simulation, DARTS) 和基于 DARTS 的硬件在回路集成实时仿真环境 DShell (DARTS Shell) 开发工作^[11]。该平台成功地对 Galileo, Cassini 等航天器进行了地面仿真试验, 对航天器的研制工作起到了重要作用。

基于递推形式的适合于实时仿真需要的多体动力学建模方法在国内的研究还刚刚起步。空间飞行器总体设计部的杨雷和曲广吉^[12]利用铰链投影矩阵的方法推导了递推形式的树状柔性多体动力学方程, 是国内在该领域进行的较早研究。

本文进一步发展了空间算子代数符号体系, 重新定义了一套坐标系无关的空间矢量、张量和矢阵符号表示和相应的坐标投影规则。从矢量形式的 Newton-Euler 方程出发, 推导了适用于航天器实时仿真的无根、树状拓扑、开环多体动力学递推算法。新的空间算子代数符号体系有符号定义严格, 推导过程力学概念清晰, 推导结果易于实时仿真程序实现的优点。推导出的递推算法适合于正逆混合问题和变拓扑问题的求解, 可以满足复杂航天器动力学实时仿真的要求。

1 符号定义与说明

在推导公式之前说明一下后面推导过程中用到的变量和表示法。各种表示法的含义如表 1 所示。

表 1 变量说明
Table 1 Notations of variables

符号	含义	投影表示	维数
\vec{v}	矢量	\mathbf{v}	3×1
$\vec{\vec{v}}$	二阶张量	\mathbf{v}	3×3
$\underline{\underline{v}}$	空间矢量	\mathbf{v}	6×1
$\underline{\underline{\underline{v}}}$	空间张量	\mathbf{v}	6×6
$\hat{\underline{\underline{v}}}$	空间矢阵	\mathbf{v}	$6 \times n$

表中的矢量和二阶张量定义这里不再赘述, 仅对后面用到的一种特殊的张量表示法做一下说明。

如果矢量 \vec{A} 和矢量 \vec{B} 的叉积可以表示为

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{A} \times) \vec{B} = \vec{\vec{v}} \cdot \vec{B} \quad (1)$$

式中

$$\vec{\vec{v}} = \vec{A} \times \quad (2)$$

张量 $\vec{\vec{v}}$ 投影就是矢量 \vec{A} 的投影 \mathbf{A} 对应的反对称

矩阵 \mathbf{A}^\times 。式(2)可以理解为: 矢量 \vec{A} 和矢量 \vec{B} 的叉积可以看做并矢 $\vec{A} \times$ 和矢量 \vec{B} 的点积。

如果 \vec{U} 和 \vec{W} 表示两个矢量, 空间矢量 $\underline{\underline{v}}$ 可以表示为 $[\vec{U}, \vec{W}]^T$, 其投影 \mathbf{v} 为各个分量的投影, 即 $\mathbf{v} = [\mathbf{U}, \mathbf{W}]^T$ 。从定义可以看出, 空间矢量的定义与旋量的定义是一致的。

如果 $\vec{\vec{v}}_{11}, \vec{\vec{v}}_{12}, \vec{\vec{v}}_{21}, \vec{\vec{v}}_{22}$ 表示 4 个二阶张量, 则空间张量 $\underline{\underline{\underline{v}}}$ 可以表示为

$$\underline{\underline{\underline{v}}} = \begin{bmatrix} \vec{\vec{v}}_{11} & \vec{\vec{v}}_{12} \\ \vec{\vec{v}}_{21} & \vec{\vec{v}}_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\underline{\underline{\underline{v}}}$ 可以看作是两个空间矢量之间的映射算子。其投影为各个二阶张量投影组成的矩阵

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{11} & \mathbf{v}_{12} \\ \mathbf{v}_{21} & \mathbf{v}_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

空间矢阵 $\hat{\underline{\underline{v}}}$ 是由 n 个空间矢量构成的列阵, 如果 $\underline{\underline{u}}_1, \underline{\underline{u}}_2, \dots, \underline{\underline{u}}_n$ 表示 n 个空间矢量, 则空间矢阵 $\hat{\underline{\underline{v}}}$ 可以表示为

$$\hat{\underline{\underline{v}}} = [\underline{\underline{u}}_1, \underline{\underline{u}}_2, \dots, \underline{\underline{u}}_n] \quad (5)$$

其投影就是各个空间矢量投影的列向量构成的矩阵, 表示为

$$\mathbf{v} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \quad (6)$$

坐标系 $\hat{\underline{\underline{I}}}$ 可以看成是一个特殊的空间矢阵, 组成其的空间基矢量是坐标轴对应的 3 个平动空间单位矢量和 3 个转动空间单位矢量。

2 链状拓扑多刚体动力学

2.1 单刚体动力学方程

要建立多刚体动力学方程, 首先要研究单刚体的动力学方程。取多刚体中的任意第 k 个刚体作为研究对象。建立如下坐标系:

惯性坐标系 $\hat{\underline{\underline{I}}}_I$: Newton 定律在该坐标系下成立, 后面推导的关于矢量 \vec{a} 的绝对导数 $\dot{\vec{a}}$ 也是在该坐标系下求得的;

第 k 个刚体固连坐标系 $\hat{\underline{\underline{I}}}_k$: 原点在第 k 个刚体上的任意一点 O_k (从后面的推导可知, O_k 点为刚体之间的铰接点), 坐标系与刚体固连。

如图 1 所示, 第 k 个刚体在受到对任意点的外力 \vec{F}_k 和对 O_k 点的外力矩 \vec{N}_k 后, O_k 点有平动

速度 \vec{v}_k , $\hat{\Gamma}_k$ 有相对于 $\hat{\Gamma}_I$ 的转动角速度 $\vec{\omega}_k$ 。

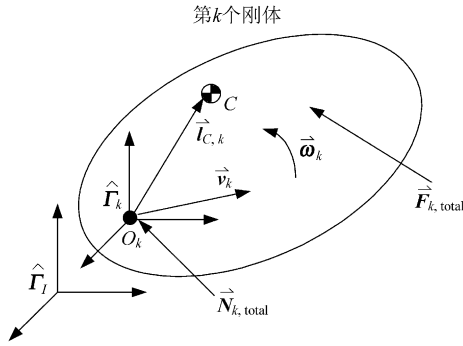


图1 单刚体的受力与运动关系

Fig. 1 The relations between force and motion variables of single rigid body

设第 k 个刚体的质量为 m , 质心在 C 点, C 的位置可以由从 O_k 指向 C 的矢量 $\vec{l}_{C,k}$ 表示, 转动惯量张量为 \vec{J}_k 。

第 k 个刚体对 O_k 点的角动量 \vec{h}_k 和动量 \vec{p}_k 可写为

$$\begin{cases} \vec{h}_k = \vec{J}_k \cdot \vec{\omega}_k + m_k \vec{l}_{C,k} \times \vec{v}_k \\ \vec{p}_k = -m_k \vec{l}_{C,k} \times \vec{\omega}_k + m_k \vec{v}_k \end{cases} \quad (7)$$

第 k 个刚体的 Newton-Euler 方程可列为

$$\begin{cases} \frac{d\vec{h}_k}{dt} + \vec{v}_k \times \vec{p}_k = \vec{N}_{k,total} \\ \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_{k,total} \end{cases} \quad (8)$$

式中: $\vec{F}_{k,total}$ 为作用在第 k 个刚体上的总外力; $\vec{N}_{k,total}$ 为作用在第 k 个刚体上 O_k 点的总外力矩。将式(7)代入式(8), 令第 k 个刚体的空间惯量张量为

$$\vec{M}_k \triangleq \begin{bmatrix} \vec{J}_k & m_k \vec{l}_{C,k} \times \\ -m_k \vec{l}_{C,k} \times & m_k \end{bmatrix} \quad (9)$$

第 k 个刚体的空间速度矢量 \vec{V}_k , 空间力矢量 $\vec{f}_{k,total}$ 分别可以写为

$$\vec{V}_k = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_k \\ \vec{v}_k \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_{k,total} \triangleq \begin{bmatrix} \vec{N}_{k,total} \\ \vec{F}_{k,total} \end{bmatrix} \quad (10)$$

第 k 个刚体的陀螺力空间矢量为

$$\vec{b}_k \triangleq \begin{bmatrix} \vec{\omega}_k \times \vec{J}_k \cdot \vec{\omega}_k \\ m_k \vec{\omega}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{l}_{C,k}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

式(8)写成空间算子形式为

$$\vec{M}_k \cdot \vec{V}_k + \vec{b}_k = \vec{f}_{k,total} \quad (12)$$

2.2 链状拓扑相邻刚体运动学关系

首先研究链状拓扑多刚体相邻刚体运动学关系, 之后再将其推广到树状拓扑。

为了讨论方便, 在讨论相邻刚体运动学关系之前, 先讨论铰链相对运动的表示方法。

如图2所示, O_{k-1} 为刚体 k 在刚体 $k-1$ 上的铰接点, 与其固连的坐标系为 $\hat{\Gamma}_{k-1}$ 。铰链 k 描述了坐标系 $\hat{\Gamma}_k$ 相对于坐标系 $\hat{\Gamma}_{k-1}$ 的运动关系。铰链 k 的状态变量用铰链位置变量 θ_k 和速度变量 β_k 表示。位置变量随时间的导数与速度变量的关系构成了铰链的运动学方程, 可以写为

$$\dot{\theta}_k = \mathbf{B}_k(\theta_k) \beta_k \quad (13)$$

式中: \mathbf{B}_k 为由位置变量 θ_k 决定的铰链配置矩阵, 由铰链自身性质和状态变量的选择决定; 位置变量 θ_k 的维数 r_k^p 描述了铰链 k 的位置自由度; 速度变量 β_k 的维数 r_k^v 描述了铰链 k 的速度自由度。

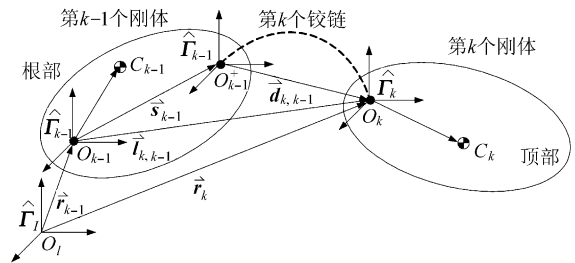


图2 相邻刚体运动学关系

Fig. 2 Kinematics relations of adjoining rigid-bodies

下面推导相邻刚体的运动学关系。

由图2可得矢量关系式:

$$\vec{l}_{k,k-1} = \vec{s}_{k-1} + \vec{d}_{k,k-1} \quad (14)$$

$$\vec{r}_k = \vec{r}_{k-1} + \vec{l}_{k,k-1} \quad (15)$$

式(14)在惯性坐标系 Γ_{k-1} 中求导, 注意到 \vec{s}_{k-1} 在 Γ_{k-1} 中固连, 有 $\dot{\vec{s}}_{k-1} = \vec{0}$, 得

$$\dot{\vec{l}}_{k,k-1} = \dot{\vec{d}}_{k,k-1} \quad (16)$$

注意到 $\hat{\Gamma}_{k-1}$ 与 $\hat{\Gamma}_{k-1}^+$ 固连, $\vec{d}_{k,k-1}$ 在 $\hat{\Gamma}_{k-1}$ 中相对导数 $\dot{\vec{d}}_{k,k-1}$ 与 $\vec{d}_{k,k-1}$ 在 $\hat{\Gamma}_{k-1}^+$ 中相对导数相等, 且 $\dot{\vec{d}}_{k,k-1}$ 表示 $\hat{\Gamma}_k$ 相对 $\hat{\Gamma}_{k-1}^+$ 的速度 $\delta \vec{v}_{k,k-1}$, 即

$$\dot{\vec{d}}_{k,k-1} = \dot{\vec{\delta v}}_{k,k-1} \quad (17)$$

式(15)在惯性坐标系 \hat{I}_I 中求导,得

$$\dot{\vec{v}}_k = \dot{\vec{v}}_{k-1} - \dot{\vec{l}}_{k,k-1} \times \dot{\vec{\omega}}_{k-1} + \dot{\vec{\delta v}}_{k,k-1} \quad (18)$$

相邻两物体之间的角速度关系为

$$\dot{\vec{\omega}}_k = \dot{\vec{\omega}}_{k-1} + \dot{\vec{\delta \omega}}_{k,k-1} \quad (19)$$

式中: $\dot{\vec{\omega}}_k$ 为第 k 个刚体的绝对角速度,即 \hat{I}_k 相对 \hat{I}_I 的角速度; $\dot{\vec{\omega}}_{k-1}$ 为第 $k-1$ 个刚体的绝对角速度,即 \hat{I}_{k-1} 相对 \hat{I}_I 的角速度; $\dot{\vec{\delta \omega}}_{k,k-1}$ 为第 k 个刚体相对于第 $k-1$ 个刚体的相对角速度,即 \hat{I}_k 相对 \hat{I}_{k-1} 的角速度。

式(18)和式(19)可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_k \\ \dot{\vec{v}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{I}} & \dot{\vec{0}} \\ -\dot{\vec{l}}_{k,k-1} \times & \dot{\vec{I}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_{k-1} \\ \dot{\vec{v}}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\vec{\delta \omega}}_k \\ \dot{\vec{\delta v}}_k \end{bmatrix} \quad (20)$$

定义从 O_{k-1} 点到 O_k 点的坐标转换算子

$$\dot{\vec{\Phi}}_{k,k-1} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\vec{I}} & \dot{\vec{0}} \\ -\dot{\vec{l}}_{k,k-1} \times & \dot{\vec{I}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

刚体 k 相对于刚体 $k-1$ 的相对空间速度为

$$\dot{\vec{V}}_k^{\delta} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\vec{\delta \omega}}_k \\ \dot{\vec{\delta v}}_k \end{bmatrix} \quad (22)$$

则式(20)可以简写为

$$\dot{\vec{V}}_k = \dot{\vec{\Phi}}_{k,k-1} \cdot \dot{\vec{V}}_{k-1} + \dot{\vec{V}}_k^{\delta} \quad (23)$$

铰链间的空间相对速度 $\dot{\vec{V}}_k^{\delta}$ 可以表示为

$$\dot{\vec{V}}_k^{\delta} = \dot{\vec{H}}_k \dot{\vec{\beta}}_k \quad (24)$$

式中: $\dot{\vec{H}}_k$ 为由铰链各个自由度对应的空间矢量构成的空间矢量; $\dot{\vec{\beta}}_k$ 为铰链速度变量。

由以上讨论,可以得到相邻刚体之间的空间速度关系为

$$\dot{\vec{V}}_k = \dot{\vec{\Phi}}_{k,k-1} \cdot \dot{\vec{V}}_{k-1} + \dot{\vec{H}}_k \dot{\vec{\beta}}_k \quad (25)$$

对式(25)求导,可得相邻刚体之间的空间加速度关系为

$$\dot{\vec{V}}_k = \dot{\vec{\Phi}}_{k,k-1} \cdot \dot{\vec{V}}_{k-1} + \dot{\vec{H}}_k \dot{\vec{\beta}}_k + \dot{\vec{a}}_k \quad (26)$$

其中,由速度依赖的惯性加速度和科氏加速度项

$\dot{\vec{a}}_k$ 为

$$\dot{\vec{a}}_k = \dot{\vec{\Phi}}_{k,k-1} \cdot \dot{\vec{V}}_{k-1} + \dot{\vec{H}}_k \dot{\vec{\beta}}_k \quad (27)$$

式中: $\dot{\vec{\Phi}}_{k,k-1}$ 和 $\dot{\vec{H}}_k$ 具体表达形式可以详见文献[6]。

2.3 相邻刚体之间的相互作用力

相邻刚体之间的相互作用力如图3所示。图中: $\dot{\vec{F}}_{k,k-1}$ 和 $\dot{\vec{N}}_{k,k-1}$ 分别为第 $k-1$ 个刚体通过铰点 O_k 对第 k 个刚体的作用力和力矩; $\dot{\vec{F}}_{k+1,k}$ 和 $\dot{\vec{N}}_{k+1,k}$ 分别为第 k 个刚体通过铰点 O_{k+1} 对第 $k+1$ 个刚体的作用力和力矩; $\dot{\vec{F}}_{k,\text{ext}}$ 和 $\dot{\vec{N}}_{k,\text{ext}}$ 分别为第 k 个刚体在铰点 O_k 处受到的外力和外力矩; $\dot{\vec{l}}_{k+1,k}$ 为从铰点 O_k 指向铰点 O_{k+1} 的矢量。

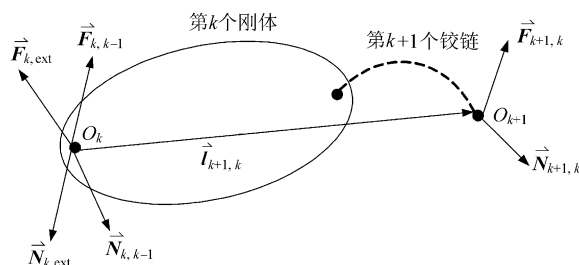


图3 两相邻刚体之间的作用力和力矩

Fig. 3 Forces and torques of two adjoining bodies

第 k 个刚体受到的总外力为

$$\dot{\vec{F}}_{k,\text{total}} = \dot{\vec{F}}_{k,k-1} - \dot{\vec{F}}_{k+1,k} + \dot{\vec{F}}_{k,\text{ext}} \quad (28)$$

第 k 个刚体在 O_k 点受到的总外力矩为

$$\dot{\vec{N}}_{k,\text{total}} = \dot{\vec{N}}_{k,k-1} - (\dot{\vec{N}}_{k+1,k} + \dot{\vec{l}}_{k+1,k} \times \dot{\vec{F}}_{k+1,k}) + \dot{\vec{N}}_{k,\text{ext}} \quad (29)$$

定义第 k 个刚体受到的空间总作用力 $\dot{\vec{f}}_{k,\text{total}}$ 和空间外力 $\dot{\vec{f}}_{k,\text{ext}}$ 分别为

$$\dot{\vec{f}}_{k,\text{total}} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{N}}_{k,\text{total}} \\ \dot{\vec{F}}_{k,\text{total}} \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{f}}_{k,\text{ext}} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{N}}_{k,\text{ext}} \\ \dot{\vec{F}}_{k,\text{ext}} \end{bmatrix} \quad (30)$$

第 $k-1$ 个刚体通过铰点 O_k 对第 k 个刚体的空间作用力 $\dot{\vec{f}}_k$, 第 k 个刚体通过铰点 O_{k+1} 对第 $k+1$ 个刚体的空间作用力 $\dot{\vec{f}}_{k+1}$ 分别可表示为

$$\dot{\vec{f}}_k = \begin{bmatrix} \dot{\vec{N}}_{k,k-1} \\ \dot{\vec{F}}_{k,k-1} \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{f}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{N}}_{k+1,k} \\ \dot{\vec{F}}_{k+1,k} \end{bmatrix} \quad (31)$$

式(28)和式(29)可以写为空间算子代数形式

$$\underline{f}_{k,\text{total}} = \underline{f}_k - \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot \underline{f}_{k+1} + \underline{f}_{k,\text{ext}} \quad (32)$$

3 铰接体算法

3.1 铰接体算法

铰接体算法最早是由 Featherstone^[3] 提出的,该算法基于这样一种假设,任何父节点对子节点的铰链间作用力都可以分解为

$$\underline{f}_k = \underline{P}_k \cdot \underline{\dot{V}}_k + \underline{z}_k \quad (33)$$

式中: \underline{P}_k 为铰接体惯量张量,表示铰接体的空间惯量对第 k 个刚体的影响; \underline{z}_k 为铰接体铰链力,表示铰接体间非零作用力对第 k 个刚体的影响。

将式(33)代入式(32)可得

$$\underline{f}_k = \underline{M}_k \cdot \underline{\dot{V}}_k + \underline{b}_k - \underline{f}_{k,\text{ext}} + \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot \underline{f}_{k+1} \quad (34)$$

根据式(33)的假设, \underline{f}_{k+1} 可以分解为

$$\underline{f}_{k+1} = \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\dot{V}}_{k+1} + \underline{z}_{k+1} \quad (35)$$

3.2 正问题的求解方法

第 k 个刚体通过铰链 $k+1$ 与第 $k+1$ 个刚体的相互作用空间力 \underline{f}_{k+1} 包括空间约束力和空间驱动力两部分,所以 \underline{f}_{k+1} 在铰链的自由子空间投影可得铰链的广义驱动力

$$\underline{T}_{k+1} = \underline{\hat{H}}_{k+1}^T \cdot \underline{f}_{k+1} \quad (36)$$

将式(26)修改下标,可得

$$\underline{\dot{V}}_{k+1} = \underline{\Phi}_{k+1,k} \cdot \underline{\dot{V}}_k + \underline{\hat{H}}_{k+1} \underline{\dot{\beta}}_{k+1} + \underline{a}_{k+1} \quad (37)$$

将式(37)和式(35)代入式(36),可得

$$\underline{T}_{k+1} = \underline{\hat{H}}_{k+1}^T \cdot [\underline{P}_{k+1} \cdot (\underline{\Phi}_{k+1,k} \cdot \underline{\dot{V}}_k + \underline{\hat{H}}_{k+1} \underline{\dot{\beta}}_{k+1} + \underline{a}_{k+1}) + \underline{z}_{k+1}] \quad (38)$$

由式(38)可以解得

$$\underline{\dot{\beta}}_{k+1} = (\underline{\hat{H}}_{k+1}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\hat{H}}_{k+1})^{-1} \cdot \{ \underline{T}_{k+1} - \underline{\hat{H}}_{k+1}^T \cdot [\underline{P}_{k+1} \cdot (\underline{\Phi}_{k+1,k} \cdot \underline{\dot{V}}_k + \underline{a}_{k+1}) + \underline{z}_{k+1}] \} \quad (39)$$

将式(35)、式(37)和式(39)代入式(34)可得

$$\underline{f}_k = \begin{bmatrix} \underline{M}_k + \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\Phi}_{k+1,k} \\ - \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\hat{H}}_{k+1} \\ (\underline{\hat{H}}_{k+1}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\hat{H}}_{k+1})^{-1} \\ \underline{\hat{H}}_{k+1}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\Phi}_{k+1,k} \end{bmatrix} \cdot \underline{\dot{V}}_k + \underline{b}_k - \underline{f}_{k,\text{ext}} + \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot (\underline{P}_{k+1} \cdot \underline{a}_{k+1} + \underline{z}_{k+1}) + \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\hat{H}}_{k+1} (\underline{\hat{H}}_{k+1}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\hat{H}}_{k+1})^{-1} \cdot [\underline{T}_{k+1} - \underline{\hat{H}}_{k+1}^T \cdot (\underline{P}_{k+1} \cdot \underline{a}_{k+1} + \underline{z}_{k+1})] \quad (40)$$

式(40)与式(33)比较对应项可得铰接体惯量递推关系式

$$\underline{P}_k = \underline{M}_k + \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\Phi}_{k+1,k} - \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\hat{H}}_{k+1} \cdot (\underline{\hat{H}}_{k+1}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\hat{H}}_{k+1})^{-1} \cdot \underline{\hat{H}}_{k+1}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\Phi}_{k+1,k} \quad (41)$$

和铰接体铰链力递推关系式

$$\underline{z}_k = \underline{b}_k - \underline{f}_{k,\text{ext}} + \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot (\underline{P}_{k+1} \cdot \underline{a}_{k+1} + \underline{z}_{k+1}) + \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\hat{H}}_{k+1} (\underline{\hat{H}}_{k+1}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\hat{H}}_{k+1})^{-1} \cdot [\underline{T}_{k+1} - \underline{\hat{H}}_{k+1}^T \cdot (\underline{P}_{k+1} \cdot \underline{a}_{k+1} + \underline{z}_{k+1})] \quad (42)$$

根据式(41)和式(42)计算完铰接体惯量和铰接体铰链力后,就可开始计算铰链广义坐标的加速度 $\underline{\dot{\beta}}_k$ 。将式(26)代入式(33)得

$$\underline{f}_k = \underline{P}_k \cdot (\underline{\Phi}_{k,k-1} \cdot \underline{\dot{V}}_{k-1} + \underline{\hat{H}}_k \underline{\dot{\beta}}_k + \underline{a}_k) + \underline{z}_k \quad (43)$$

第 k 个铰链处的相互作用力 \underline{f}_k 在铰链的自由子空间投影可得铰链的广义驱动力为

$$\underline{T}_k = \underline{\hat{H}}_k^T \cdot \underline{f}_k \quad (44)$$

将式(43)代入式(44)得

$$\underline{T}_k = \underline{\hat{H}}_k^T \cdot [\underline{P}_k \cdot (\underline{\Phi}_{k,k-1} \cdot \underline{\dot{V}}_{k-1} + \underline{\hat{H}}_k \underline{\dot{\beta}}_k + \underline{a}_k) + \underline{z}_k] \quad (45)$$

由式(45)可以解得

$$\underline{\dot{\beta}}_k = (\underline{\hat{H}}_k^T \cdot \underline{P}_k \cdot \underline{\hat{H}}_k)^{-1} \{ \underline{T}_k - \underline{\hat{H}}_k^T \cdot [\underline{P}_k \cdot (\underline{\Phi}_{k,k-1} \cdot \underline{\dot{V}}_{k-1} + \underline{a}_k) + \underline{z}_k] \} \quad (46)$$

对于航天器一类的无根树多体系统,基体的加速度推导如下。

由式(33)改写下标可得

$$\underline{f}_0 = \underline{P}_0 \cdot \underline{\dot{V}}_0 + \underline{z}_0 \quad (47)$$

由式(31)对 \underline{f}_k 的定义, \underline{f}_0 表示第 0 个刚体的父节点对第 0 个刚体的作用力, 而第 0 个刚体通过虚铰与惯性坐标系相连, 没有父节点, 所以

$$\underline{f}_0 = \underline{0} \quad (48)$$

将式(48)代入式(47)可以求得第 0 个刚体的加速度为

$$\underline{\dot{V}}_0 = -\underline{P}_0^{-1} \cdot \underline{z}_0 \quad (49)$$

3.3 逆问题的求解方法

将式(35)、式(37)代入式(34)得

$$\begin{aligned} \underline{f}_k = & (\underline{M}_k + \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\Phi}_{k+1,k}) \cdot \underline{\dot{V}}_k + \\ & \{ \underline{b}_k - \underline{f}_{k,\text{ext}} + \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot [\underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\hat{H}}_{k+1} \underline{\dot{\beta}}_{k+1} + \\ & (\underline{P}_{k+1} \cdot \underline{a}_{k+1} + \underline{z}_{k+1})] \} \end{aligned} \quad (50)$$

比较式(50)和式(33)可得铰接体惯量递推关系式

$$\underline{P}_k = \underline{M}_k + \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot \underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\Phi}_{k+1,k} \quad (51)$$

和铰接体铰链力递推关系式

$$\begin{aligned} \underline{z}_k = & \underline{b}_k - \underline{f}_{k,\text{ext}} + \\ & \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot [\underline{P}_{k+1} \cdot \underline{\hat{H}}_{k+1} \underline{\dot{\beta}}_{k+1} + \\ & (\underline{P}_{k+1} \cdot \underline{a}_{k+1} + \underline{z}_{k+1})] \end{aligned} \quad (52)$$

将式(33)代入式(44)得铰链驱动力矩的表达式

$$\underline{T}_k = \underline{\hat{H}}_k^T \cdot (\underline{P}_k \cdot \underline{\dot{V}}_k + \underline{z}_k) \quad (53)$$

式中: $\underline{\dot{V}}_k$ 由式(26)求出。

3.4 DARTS 符号体系^[7]引入

为了使推导结果更加清晰, 便于与文献[7]的结果进行比较, 参考文献[7]的符号体系, 引入以下符号定义:

第 k 个铰链的铰链惯量, 为一数值矩阵

$$\underline{D}_k = \underline{\hat{H}}_k^T \cdot \underline{P}_k \cdot \underline{\hat{H}}_k \quad (54)$$

容易证明, \underline{D}_k 是对称正定的。

空间矢阵

$$\underline{\hat{G}}_k = \underline{P}_k \cdot \underline{\hat{H}}_k \underline{D}_k^{-1} \quad (55)$$

$$\underline{\hat{K}}_{k,k+1} = \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot \underline{\hat{G}}_{k+1} \quad (56)$$

第 k 个铰链的铰接体投影算子 $\underline{\tau}_k$, 为一数值矩阵

$$\underline{\tau}_k = \underline{I} - \underline{\hat{G}}_k \cdot \underline{\hat{H}}_k^T \quad (57)$$

空间张量

$$\underline{\Psi}_{k,k+1} = \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \underline{\tau}_{k+1} \quad (58)$$

$$\underline{P}_k^+ = \underline{\tau}_k \underline{P}_k \quad (59)$$

第 k 个铰链处产生铰链加速度的有效铰链力为

$$\underline{\varepsilon}_k = \underline{T}_k - \underline{\hat{H}}_k^T \cdot \underline{z}_k \quad (60)$$

第 k 个铰链处的铰接体铰链加速度为

$$\underline{v}_k = \underline{D}_k^{-1} \underline{\varepsilon}_k \quad (61)$$

则铰接体惯量和铰接体铰链力递推关系可以重写为

$$\underline{P}_k = \underline{M}_k + \underline{\Phi}_{k+1,k}^T \cdot \underline{P}_{k+1}^+ \cdot \underline{\Phi}_{k+1,k} \quad (62)$$

铰接体铰链力

$$\underline{z}_k = \underline{b}_k - \underline{f}_{k,\text{ext}} + \underline{\Psi}_{k,k+1} \cdot \quad (63)$$

$$(\underline{P}_{k+1} \cdot \underline{a}_{k+1} + \underline{z}_{k+1}) + \underline{\hat{K}}_{k,k+1} \underline{T}_{k+1}$$

广义坐标加速度

$$\underline{\dot{\beta}}_k = \underline{v}_k - \underline{\hat{K}}_{k-1,k}^T \cdot \underline{\dot{V}}_{k-1} - \underline{\hat{G}}_k^T \cdot \underline{a}_k \quad (64)$$

4 空间符号体系的投影

为了进行数值计算, 需要将空间符号体系在相应的坐标系投影, 得到其分量的投影形式。这里将所有计算量全部投影到惯性坐标系 $\underline{\Gamma}_I$ 中。

由于投影过程基本类似, 这里仅以空间速度递推关系式为例进行说明。

速度递推的空间矢量表示形式为

$$\underline{V}_k = \underline{\Phi}_{k,k-1} \cdot \underline{V}_{k-1} + \underline{\hat{H}}_k \underline{\beta}_k \quad (65)$$

其投影为

$$\left. \begin{aligned} \underline{\hat{\Gamma}}_I^T \underline{V}_k &= \underline{\Gamma}_I^T \underline{\Phi}_{k,k-1} \underline{\hat{\Gamma}}_I \cdot \underline{\hat{\Gamma}}_I^T \underline{V}_{\lambda(k)} + \underline{\hat{\Gamma}}_{(k-1)}^T \underline{H}_k \underline{\beta}_k \\ \underline{\hat{\Gamma}}_I^T \underline{V}_k &= \underline{\hat{\Gamma}}_I^T \underline{\Phi}_{k,k-1} \underline{V}_{\lambda(k)} + \underline{\hat{\Gamma}}_{(k-1)}^T \underline{H}_k \underline{\beta}_k \\ \underline{V}_k &= \underline{\Phi}_{k,k-1} \underline{V}_{\lambda(k)} + \underline{\hat{\Gamma}}_I \underline{\hat{\Gamma}}_{(k-1)}^T \underline{H}_k \underline{\beta}_k \\ \underline{V}_k &= \underline{\Phi}_{k,k-1} \underline{V}_{\lambda(k)} + \underline{R}_{I,(k-1)} \underline{H}_k \underline{\beta}_k \\ \underline{V}_k &= \underline{\Phi}_{k,k-1} \underline{V}_{\lambda(k)} + \underline{R}_{(k-1)}^T \underline{H}_k \underline{\beta}_k \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

式中: $\underline{R}_{I,(k-1)}^+$ 为由 $\underline{\hat{\Gamma}}_{(k-1)}^+$ 到 $\underline{\hat{\Gamma}}_I$ 的空间坐标转换矩阵, 是由两个坐标系坐标转换矩阵 $\underline{C}_{I,(k-1)}^+$ 构成的对角阵, 即

$$\mathbf{R}_{I,(k-1)^+} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{I,(k-1)^+} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{I,(k-1)^+} \end{bmatrix} \quad (67)$$

其他各表达式的投影均按照此规则类似进行。

5 树状拓扑递推算法

将前面推导的链状拓扑多刚体动力学方程修改下标并作适应性修改,得出的树状拓扑多刚体动力学递推求解过程总结如下(下面计算过程中下标 $\lambda(k)$ 指第 k 个节点的父节点)。

5.1 正向位置和速度递推

(1)位置递推

对于第 $k(k=1, \dots, n)$ 个刚体,根节点 0 位置在惯性坐标系投影 \mathbf{r}_0 和根节点相对惯性坐标系的方向余弦 \mathbf{C}_0 已知。

①由当前时间的广义坐标 $\boldsymbol{\theta}_k$ 生成铰链 k 的相对位置 $\mathbf{d}_{k,\lambda(k)}$ 和相对转动 $\mathbf{C}_{k,\lambda(k)^+}$,这一步骤由铰链类型决定;

②各个刚体的位置矢量在惯性坐标系下的投影为

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{\lambda(k)} + \mathbf{C}_{\lambda(k)}^T (\mathbf{s}_{\lambda(k)}) \hat{\mathbf{r}}_{\lambda(k)} + \mathbf{C}_{\lambda(k)}^T \mathbf{C}_{\lambda(k)^+} (\mathbf{d}_{k,\lambda(k)}) \hat{\mathbf{r}}_{\lambda(k)}^+ \quad (68)$$

③刚体 k 相对于惯性坐标系的方向余弦为

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{C}_{k,\lambda(k)^+} \mathbf{C}_{\lambda(k)^+} \mathbf{C}_{\lambda(k)} \quad (69)$$

(2)速度递推

对于第 $k(k=1, \dots, n)$ 个刚体,根节点 0 的角速度和速度在惯性坐标系的投影 \mathbf{V}_0 已知。

①生成空间方向余弦矩阵 \mathbf{R}_k :

$$\mathbf{R}_k^T \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_k^T \end{bmatrix} \quad (70)$$

②生成铰链投影矩阵在刚体坐标系 Γ_k 的投影 \mathbf{H}_k^b 。 \mathbf{H}_k^b 由铰链类型和广义坐标当前值决定,为常值;

③铰链投影矩阵在惯性坐标系 Γ_I 的投影 \mathbf{H}_k 为时变值

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{R}_k^T \mathbf{H}_k^b \quad (71)$$

④计算铰点 $O_{\lambda(k)}$ 到铰点 O_k 的位移矢量在惯性坐标系 Γ_I 中的投影为

$$\mathbf{l}_{k,\lambda(k)} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{\lambda(k)} \quad (72)$$

⑤计算从 $O_{\lambda(k)}$ 点到 O_k 点的坐标转换算子 $\Phi_{k,\lambda(k)}$ 的投影为

$$\Phi_{k,\lambda(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I}_{k,\lambda(k)}^\times & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (73)$$

⑥空间速度递推关系式为

$$\mathbf{V}_k = \Phi_{k,\lambda(k)} \mathbf{V}_{\lambda(k)} + \mathbf{H}_k \boldsymbol{\beta}_k \quad (74)$$

(3)计算由速度决定的惯性加速度和科氏加速度在惯性空间 Γ_I 的投影为

$$\mathbf{a}_k = \dot{\Phi}_{k,\lambda(k)} \mathbf{V}_{\lambda(k)} + \dot{\mathbf{H}}_k \boldsymbol{\beta}_k \quad (75)$$

5.2 反向递推求解铰接体惯量和铰链力

(1)质量特性投影

对于第 $k(k=1, \dots, n)$ 个刚体:

①将 k 个刚体的转动惯量和质心位置转换到惯性坐标系 Γ_I 中

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{C}_k^T (\mathbf{J}_k) \hat{\mathbf{r}}_k \mathbf{C}_k \quad (76)$$

$$\mathbf{l}_{k,C} = \mathbf{C}_k^T (\mathbf{l}_{k,C}) \hat{\mathbf{r}}_k \quad (77)$$

②计算第 k 个刚体的空间陀螺力在惯性空间 Γ_I 的投影为

$$\mathbf{b}_k \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_k^\times \mathbf{J}_k \boldsymbol{\omega}_k \\ m_k \boldsymbol{\omega}_k^\times \boldsymbol{\omega}_k^\times \mathbf{l}_{C,k} \end{bmatrix} \quad (78)$$

③计算第 k 个刚体的空间惯量在惯性空间 Γ_I 的投影为

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_k & m_k \mathbf{l}_{C,k}^\times \\ -m_k \mathbf{l}_{C,k}^\times & m_k \end{bmatrix} \quad (79)$$

(2)铰接体惯量和铰链力递推

对于树状拓扑,在反向递推过程中节点的子节点不唯一,所以在求铰接体惯量和铰链力的过程中需要将所有子节点的附加项全部加入。递推过程如下:

对于第 $k(k=n, \dots, 1)$ 个刚体,向父节点进行铰接体惯量和铰接体铰链力投影:

对于每一个刚体 k ,置递推初值为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \mathbf{M}_k \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{b}_k - \mathbf{f}_{k,\text{ext}} \end{aligned} \right\}$$

①如果已知驱动力矩,求广义坐标加速度按如下公式递推:

a. 递推铰接体惯量为

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{H}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k \quad (80)$$

$$\mathbf{D}_k^{-1} = (\mathbf{H}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k)^{-1} \quad (81)$$

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k \mathbf{D}_k^{-1} \quad (82)$$

$$\mathbf{K}_{\lambda(k),k} = \Phi_{\lambda(k),k} \mathbf{G}_k \quad (83)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_k = \mathbf{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{H}_k^T \quad (84)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{\lambda(k),k} = \Phi_{\lambda(k),k} \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \quad (85)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \mathbf{P}_k \quad (86)$$

$$\mathbf{P}_{\lambda(k)} = \mathbf{P}_{\lambda(k)} + \Phi_{k,\lambda(k)}^T \mathbf{P}_k^+ \Phi_{k,\lambda(k)} \quad (87)$$

b. 递推铰接体铰链力为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{T}_k - \mathbf{H}_k^T \mathbf{z}_k \quad (88)$$

$$\mathbf{z}_{\lambda(k)} = \mathbf{z}_{\lambda(k)} + \boldsymbol{\Psi}_{\lambda(k),k} (\mathbf{P}_k \mathbf{a}_k + \mathbf{z}_k) + \mathbf{K}_{\lambda(k),k} \mathbf{T}_k \quad (89)$$

② 如果已知广义坐标加速度,求广义驱动力矩按如下公式递推:

• 递推铰接体惯量为

$$\mathbf{P}_{\lambda(k)} = \mathbf{P}_{\lambda(k)} + \boldsymbol{\Phi}_{k,\lambda(k)}^T \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Phi}_{k,\lambda(k)} \quad (90)$$

• 递推铰接体铰链力为

$$\mathbf{z}_{\lambda(k)} = \mathbf{z}_{\lambda(k)} + \boldsymbol{\Phi}_{k,\lambda(k)}^T (\mathbf{P}_k \mathbf{H}_k \dot{\boldsymbol{\beta}}_k + \mathbf{z}_k) \quad (91)$$

5.3 正向加速度递推

(1) 基体的加速度初值计算:

$$\dot{\mathbf{V}}_0 = -\mathbf{P}_0^{-1} \mathbf{z}_0 \quad (92)$$

(2) 已知广义驱动力矩,求广义坐标加速度:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (93)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{K}_{\lambda(k),k}^T \dot{\mathbf{V}}_{\lambda(k)} - \mathbf{G}_k^T \mathbf{a}_k \quad (94)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k,\lambda(k)} \dot{\mathbf{V}}_{\lambda(k)} + \mathbf{H}_k \dot{\boldsymbol{\beta}}_k + \mathbf{a}_k \quad (95)$$

(3) 已知广义坐标加速度,求广义驱动力矩:

$$\dot{\mathbf{V}}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k,\lambda(k)} \dot{\mathbf{V}}_{\lambda(k)} + \mathbf{H}_k \dot{\boldsymbol{\beta}}_k + \mathbf{a}_k \quad (96)$$

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{H}_k^T (\mathbf{P}_k \dot{\mathbf{V}}_k + \mathbf{z}_k) \quad (97)$$

6 结论

基于空间算子代数符号体系,推导了适用于航天器实时仿真的无根、树状拓扑、开环多体动力学递推算法,并根据投影规则给出了递推算法在惯性坐标系的投影方程。改进的空间算子符号体系严格区分了坐标无关的空间算子和其在坐标系下的投影的概念。在推导过程中明确了文献[7]中各个量的投影坐标系,为算法实现奠定了基础。推导过程中采用了 Featherstone^[4]的铰接体的概念对广义质量阵进行分解,这与文献[6]中基于 Kalman 滤波公式的方法不同。而推导结果与文献[6]一致。

对于大型展开天线,带空间机械臂的卫星等复杂多体航天器,多刚体模型已经不能满足要求,部件的柔性特性是必须要考虑的问题。如何在已有的多刚体动力学基础上推导适合实时仿真需要的、通用的柔性多体动力学方程是下一步工作的重点。

参 考 文 献

- [1] Vereshchagin A F. Computer simulation of the dynamics of complicated mechanisms of robot-manipulators[J]. Engineering Cybernetics, 1974, (6): 65-70.
- [2] Armstrong W W. Recursive solution to the equations of

motion of an N-link manipulator[C]//Fifth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Canada: Montreal, 1979: 1343-1346.

- [3] Featherstone R. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias[J]. The International Journal of Robotics Research, 1983, 2(1): 13-30.
- [4] Featherstone R. Robot dynamics algorithms[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1987.
- [5] Rodriguez G. Kalman filtering, smoothing and recursive robot arm forward and inverse dynamics[J]. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1987, 3(6): 624-639.
- [6] Jain A. Unified formulation of dynamics for serial rigid multibody systems[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1991, 14(3): 531-542.
- [7] Rodriguez G, Jain A, Kreutz-Delgado K. Spatial operator algebra for multibody system dynamics[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1992, 40(1): 27-50.
- [8] Jain A, Rodriguez G. Recursive dynamics for flexible multibody systems using spatial operators[C]//JPL Publication 90-26, Jet Propulsion Laboratory. CA: Pasadena, 1990.
- [9] Jain A, Rodriguez G. An analysis of the kinematics and dynamics of underactuated manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1993, 9(4): 411-422.
- [10] Jain A, Rodriguez G. Base-invariant symmetric dynamics of free-flying manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1995, 11(4): 585-597.
- [11] Biesiadeck J J, Henriquez D A, Jain A. A reusable, real-time spacecraft dynamics simulator[C]//16th Digital Avionics Systems Conference. USA: AIAA/IEEE, 1997: 2-14.
- [12] 曲广吉. 航天器动力学工程[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2001: 223-244.
- Qu G J. Spacecraft dynamics engineering [M]. Beijing: China Science and Technology Press, 2001: 223-244. (in Chinese)

作者简介:



孟占峰(1980-) 男,博士研究生。主要研究方向为:柔性多体航天器动力学建模、仿真与控制方法。

Tel: 010-82316536

E-mail: mengzf@gmail.com



韩潮(1960-) 男,博士,教授。主要研究方向:航天器轨道姿态动力学与控制。

Tel: 010-82339583

E-mail: hanchao@buaa.edu.cn

(责任编辑:刘振国)