

# 噪声条件下多基线相位干涉仪解模糊算法

周亚强 陈 翥 皇甫堪 孙仲康

(国防科技大学电子科学与工程 信号处理实验室 长沙 410073)

**摘要:** 针对多基线相位干涉仪在宽带测向时存在的问题, 该文提出了一种基于中国余数定理的相位差解模糊算法, 研究了噪声条件下正确解模糊的条件。该方法选择基线长度满足一定的参差关系, 从而解决了测向精度与最大不模糊角度之间的矛盾。计算机仿真证明了该方法的有效性。

**关键词:** 相位干涉仪, 解模糊, 中国余数定理, 参差

中图分类号: TN973 文献标识码: A 文章编号: 1009-5896(2005)02-0259-03

## Algorithm of Solving Multi-baseline Interferometer Phase Difference Ambiguity in Noisy Circumstance

Zhou Ya-qiang Chen Zhu Huangfu Kan Sun Zhong-kang

(School of Electronic Sci. and Eng., Nat. Univ. of Defense Tech., Changsha 410073, China)

**Abstract** For the problem of multi-baseline interferometer in wideband direction finding, a algorithm of solving multi-baseline interferometer phase difference ambiguity based on Chinese remainder theorem is given and the condition of correctly solving ambiguity in noisy circumstance is studied. The algorithm selects baseline length satisfied stagger qualification, thereby solving conflict between accuracy of direction finding and maximum unambiguity angle. The performance of the algorithm is effectively demonstrated by computer simulation.

**Key words** Interferometer, Solving ambiguity, Chinese remainder theorem, Stagger

### 1 引言

相位干涉仪由于其高的测向精度, 在高精度单站无源定位中有着十分重要的意义。单基线相位干涉仪存在着测向精度和最大不模糊角度之间的矛盾<sup>[1,2]</sup>。通常采用多基线的方法来解决这一矛盾, 其中最短的基线长度小于半波长, 从而在较大范围内获得一个无模糊角度<sup>[3-5]</sup>。但是, 在高精度单站无源定位应用中, 由于主要以雷达为研究对象, 要求相位干涉仪有一个宽的频率覆盖范围, 这时上述的多基线方法存在一些问题。在宽带测向中, 螺旋天线是常用的天线, 它能覆盖宽频段。天线的物理尺寸由最低的工作频率决定, 其直径可近似等于  $\lambda_{\max}/2$ , 但是最短的基线长度由最高的工作频率决定:  $l_{\min} \leq \lambda_{\min}/2$ , 这通常导致天线直径大于最短基线长度, 其结果是如果干涉仪中用螺旋天线来覆盖宽频段, 那么必然在高输入频率端有相位模糊问题。

为了解决这一问题, 受多频连续波测距技术的启发, 本文提出了一种基于中国余数定理的相位差解模糊算法, 该方法选择基线长度满足一定的参差关系, 从而解决了测向精度与最大不模糊角度之间的矛盾。

### 2 问题的数学模型

假设一维  $M$  基线相位干涉仪如图 1 所示, 其基线长度

分别为  $l_i$  ( $i=1, \dots, M$ ), 波长为  $\lambda$  的信号由与天线视轴夹角为  $\theta$  的方向传播而来。对应基线  $l_i$  的最大不模糊角度为  $\arcsin[\lambda/(2l_i)]$ , 基线  $l_i$  对应的模糊相位差  $\phi_i$  为

$$\begin{aligned} \phi_i &= 2\pi l_i \sin\theta / \lambda \pmod{2\pi} \\ &= 2\pi f l_i \sin\theta / c \pmod{2\pi}, \quad i=1, \dots, M \end{aligned} \quad (1)$$

令  $k_i$  表示用基线  $l_i$  测向时的模糊数, 将上式转换成目标方位角的形式为

$$\sin\theta = k_i c / (f l_i) + c \phi_i / (2\pi f l_i), \quad i=1, \dots, M \quad (2)$$

现取一基本基线长度  $l_0$ , 并令  $l_i = l_0 / m_i$  ( $i=1, \dots, M$ ), 代入式(2)并整理可得

$$\frac{\sin\theta}{c/(f l_0)} = k_i m_i + \frac{\phi_i}{2\pi} m_i, \quad i=1, \dots, M \quad (3)$$

令  $c/(f l_0) = P$ ,  $\sin\theta/P = L$ ,  $r_i = \phi_i m_i / (2\pi)$ ,  $i=1, \dots, M$ , 则式(3)可以表示为

$$L = k_i m_i + r_i, \quad i=1, \dots, M \quad (4)$$

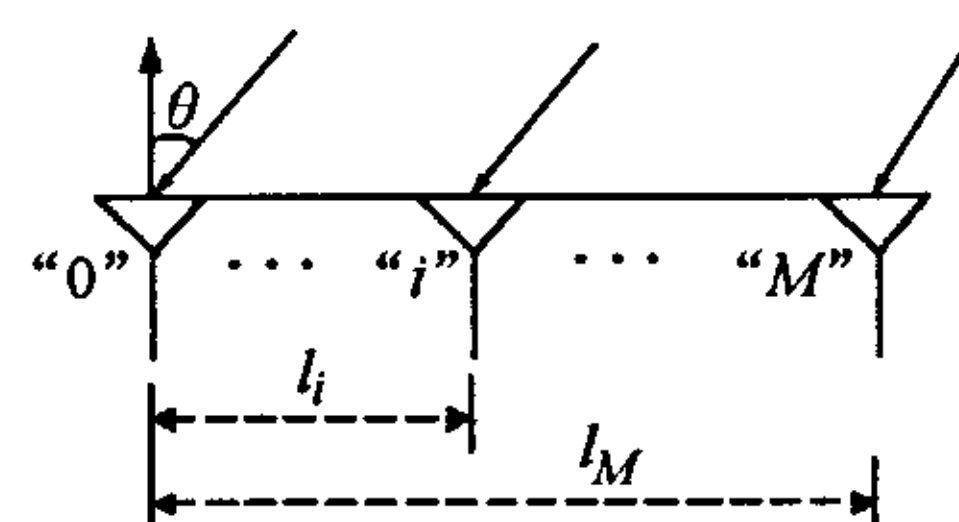


图 1 一维  $M$  基线相位干涉仪原理图

在无噪声的理想情况下,式(4)为一个除数为整数的实数域内的同余方程组。如果选择  $m_i$  ( $i=1, \dots, M$ ) 两两互素, 根据中国余数定理, 式(4)在由  $m = m_1 \cdots m_M$  所决定最大不模糊角度范围内有唯一解。此时的最大无模糊角度为

$$\theta_{\text{unamb}} = \arcsin\left(c \prod_i^M m_i / (f l_0)\right) \quad (5)$$

其中  $\theta_{\text{unamb}}$  表示最大不模糊角度。

### 3 噪声条件下解模糊算法

#### 3.1 噪声条件下解模糊原理

上面的分析可见, 在理想无噪声情况下, 中国余数定理非常巧妙地解决了干涉仪相位模糊问题。然而在实际噪声条件下, 相位差测量中包含误差, 导致剩余数中有误差, 剩余数的误差可能引起灾难性的后果。所以, 必须研究噪声条件下中国余数定理在相位干涉仪解模糊中的问题。

假设由于噪声而在真实相位差  $\phi_i$  上产生了大小为  $\delta(\phi_i)$  的误差 ( $i=1, \dots, M$ ), 令  $q_i = \delta(\phi_i) m_i / (2\pi)$  表示归一化相位差测量误差, 式(4)应改写为

$$L_i = k_i m_i + r_i + q_i, \quad i=1, \dots, M \quad (6)$$

给出  $(k_1, \dots, k_M)$  的求解准则: 求解  $(k_1, \dots, k_M)$ , 使得

$$W = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M |l_i - l_j| \text{ 最小, 其中 } 0 \leq k_i \leq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M p_j, \quad (i=1, \dots, M)。$$

进而可求得  $L_1, L_2, \dots, L_M$ , 从而得到目标真实方位角估计值和最大不模糊方位角分别为

$$\hat{\theta} = \arcsin\left(\frac{P}{M} \sum_{i=1}^M L_i\right) = \arcsin\left(\frac{c}{M f l_0} \sum_{i=1}^M L_i\right) \quad (7)$$

$$\theta_{\text{unamb}} = \arcsin\left(\lceil 4q \rceil P \prod_{i=1}^M p_i\right) = \arcsin\left(P \prod_{i=1}^M m_i / (\lceil 4q \rceil)^{M-1}\right) \quad (8)$$

#### 3.2 噪声条件下正确解模糊的条件

文献[6]讨论了瞬时频率估计中正确解模糊所需的参差比, 文献[7-9]讨论了多频连续波测距雷达用参差频率测距的方法, 并给出了正确解模糊的条件, 其中的解模糊方程与式(6)在数学意义上相同, 类似的推导可得出对式(6)进行正确解模糊的条件, 如下面定理1所述。

**定理1** 令  $m_i = \lceil 4q \rceil p_i$ , 其中  $q = \max_{i \in \{1, \dots, M\}} (|q_i|)$  表示最大的归一化噪声,  $\lceil \cdot \rceil$  表示上取整 ( $i=1, 2, \dots, M$ ), 且  $p_1, p_2, \dots, p_M$  两两互素, 则当相位测量误差  $\delta(\phi_i)$  分布在  $[-2\pi q / (m_i)_{\text{max}}, 2\pi q / (m_i)_{\text{max}}]$  范围内时, 可以对式(6)正确解模糊。

#### 3.3 噪声条件下正确解模糊所需的最低信噪比

在一定信噪比(SNR)条件下, 单信道相位测量误差的均方根值为  $\sigma_{\phi_i} = 1/\sqrt{2\text{SNR}}$ 。而由内部噪声引起的正交两个通

道相位差误差的均方根值  $\sigma_{\phi}$  为其  $\sqrt{2}$  倍, 则可得相位差误差的均方根值为  $\sigma_{\phi} = 1/\sqrt{\text{SNR}}$ 。为了保证能够尽量可靠地解模糊, 应尽可能的保证下式成立。

$$D \cdot \sigma_{\phi} \leq [\delta(\phi_i)]_{\text{max}} \quad (9)$$

其中  $[\delta(\phi_i)]_{\text{max}}$  表示相位差测量误差的最大值,  $D$  是一常量, 一般取  $D=3$ , 上式可写成

$$\text{SNR} \geq \left[ 9(m_i)_{\text{max}}^2 / (4\pi^2 q^2) \right] \quad (10)$$

上式即为多基线干涉仪正确解模糊所需的信噪比。

### 4 实验仿真研究

仿真中取最大不模糊角度  $\theta_{\text{max}} = \pm 35^\circ$ , 取  $q = 0.2499$ , 由于  $\lceil 4q \rceil = 1$ , 所以  $p_i = m_i$ 。其它参数的选择见表1。由表可见,  $l_0 = 3m$ ,  $p_i = 3, 5, 7$ , 在  $2 \sim 18\text{GHz}$  的宽频段上有  $\theta_{\text{unamb}} \geq 35^\circ$ , 正确解模糊所需的最低信噪比  $\text{SNR} = 22.5\text{dB}$ , 下面的仿真实验以这组参数为例。

表1 仿真数据的选择

参差 重 数	$l_0$ (m)	$P_i$	基线长 (m)		2 GHz	18GHz	正确解 模糊 最低 SNR(dB)
			$l_{\text{min}}$	$l_{\text{max}}$	$\theta_{\text{unamb}}$	$\theta_{\text{unamb}}$	
3	3	3,5,7	0.428	1	$>35^\circ$	$35.7^\circ$	22.5

假设辐射源频率  $f = 2\text{GHz}$ , 则  $P = c/(f l_0) = 0.005$ 。假定目标方位角  $\theta = 30^\circ$ , 则有  $L = \sin\theta/P = 10$ 。得到的模糊相位分别为  $\phi_1 = 2\pi/3$ ,  $L = 3 \times 3 + (2\pi/3)/(2\pi) \times 3$ ,  $\phi_2 = 0$ ,  $L = 2 \times 5 + 0 \times 5$ ,  $\phi_3 = 6\pi/7$ ,  $L = 1 \times 7 + (6\pi/7)/(2\pi) \times 7$ 。

由上面的式子, 正确的解模糊解应为  $k_1 = 3, k_2 = 2, k_3 = 1$ 。在噪声的情况下,  $q_i$  是均方根值为  $\sigma_q = (m_{i\text{max}}/2\pi) \cdot (1/\sqrt{2\text{SNR}})$  的白噪声, 针对不同的信噪比, 求得相应的噪声均方根值  $\sigma_q$ 。通过求  $W$  的最小值进行解模糊处理, 观察正确解模糊的最低信噪比。作 10000 次 Monte-Carlo 仿真实验, 得到正确解模糊的统计概率和信噪比的关系曲线, 如图2所示。仿真中假定  $q_i$  在  $[-3\sigma_q, 3\sigma_q]$  范围内服从独立均匀分布。

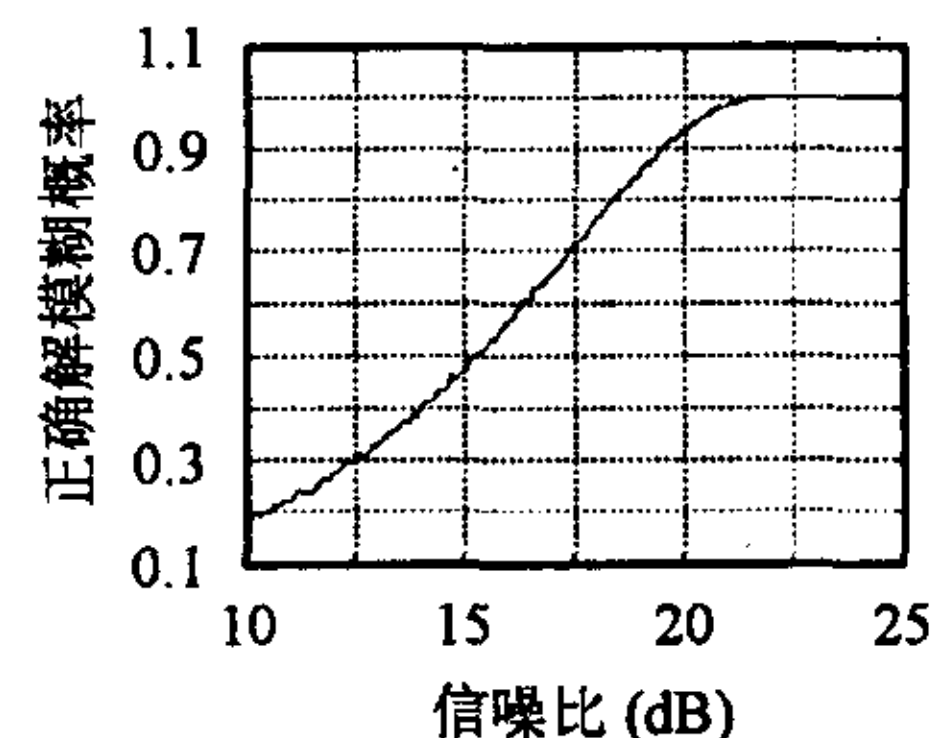


图2 正确解模糊概率与 SNR 曲线

从仿真结果看, 在 SNR 略小于 22.5dB 处, 正确解模糊概率有一个明显的转折点, 当 SNR 在大于转折点的范围内

时, 能够正确解模糊; SNR 在小于转折点的范围内时, 随着 SNR 的降低, 求解错误的概率大大增加。

## 5 结论

本文提出了一种基线长度满足参差关系的多基线相位干涉仪解模糊算法, 该算法不需要限制最短基线长度小于半波长, 从而解决了干涉仪在宽带测向时存在的问题, 分析了噪扰条件下正确解模糊的条件, 并给出了正确解模糊所需的最低信噪比, 计算机仿真表明这一解模糊算法的有效性。

## 参 考 文 献

- [1] McCormick W S, Tsui J B Y, Bakkie V L. A noise insensitive solution to an ambiguity problem in spectral estimation[J]. *IEEE Trans. on AES*, 1989, 25(5): 729 – 732.
- [2] Malloy N J. Analysis and synthesis of general planar interferometer arrays. *IEEE ICASSP-83*, 1983: 352 – 355.
- [3] Zoltowski M D, Mathews C P. Real-time frequency and 2-D angle estimation with sub-Nyquist spatiotemporal sampling[J]. *IEEE Trans. on SP*, 1994, 42(10): 2781 – 2794.
- [4] Sundaram K R, Mallik R K, Murthy U M S. Modulo conversion method for estimation the direction of arrival. *IEEE Trans. on AES*, 2000, 36(4): 1391 – 1396.

- [5] Jacobs E, Ralston W E. Ambiguity resolution in interferometry. *IEEE Trans. on AES*, 1981, 17(2): 766 – 779.
- [6] Addison E R, Frost E L. Resolution of ambiguous radar using a floating bin correlator. *Proceedings of IEEE 1982 International Radar Conference, Washington, 1982: 35 – 41.*
- [7] 许邦建. 多频连续波测距雷达关键理论、算法的研究和软硬件实现. [博士论文], 国防科技大学电子科学与工程学院, 2001.9.
- [8] 皇甫堪. 多频连续波测距中的若干问题研究. 技术报告, 国防科技大学电子科学与工程学院, 2002, 3.
- [9] 沈福民, 贾永康. 相位测距中的解模糊技术. *西安电子科技大学学报*, 1997, 24(1): 52 – 57.

周亚强: 男, 1975 年生, 博士生, 研究方向为高精度单站无源定位技术、高精度测向技术、阵列信号处理.

程 鑫: 男, 1974 年生, 讲师, 博士, 主要研究流域为现代信号处理.

皇甫堪: 男, 1939 年生, 教授, 博士生导师, 电子学会会员, 目前研究领域为现代信号处理、雷达信号处理、多频连续波测距雷达.

孙仲康: 男, 1931 年生, 教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 目前研究领域为高精度单站无源定位技术.