正交多子波包理论 [1]

陈俊丽　　杨新星　　焦李成

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室　西安　710071)

摘　要　该文用类似于从正交单子波基扩展到正交单子波包的概念，建立了多子波包的理论框架，并把有关单子波包的定义、概念和性质推广到一般的多子波包，给出了相应的证明.

关键词　多子波，多子波包，单子波

中图号　TN911.6, O177.6

1 引　言

信号分析的主要目的是寻找一种简单有效的信号变换方法，使信号所包含的重要特征能显示出来。在子波变换兴起之前， Fourier 级数展开和 Fourier 分析是有效的数学工具。目前，子波分析已成为信号分析的强有力的工具，它克服了 Fourier 变换的时一频窗口大小固定不变，窗口没有自适应性，不适于分析多尺度信号和突变过程的缺点。尽管选择良好性质的子波基，子波应用仍有许多限制。因为子波变换按等 Q 原则划分频率轴 [1]，即在高频部分，具有较宽的频带，而在低频部分具有较窄的频带。这些特点非常适合于分析含有长持续时间的低频分量和短持续时间的高频分量的信号，如语音、图像这一类信号。然而，并不是所有信号的特性都与子波变换相适应，对于含有高频平稳分量的信号或信号段，如周期高频现象中的纹理、皱褶等，子波分析明显不足。以雷达为例，飞机一类目标回波，其包络的起伏决定于目标相对于雷达的姿态变化，而多普勒频率则取决于目标的径向速度，两者无必然联系。如对目标运动无先验知识，则滤波器组应具有等宽特性，这正是雷达里广泛应用短时 Fourier 变换的缘故。

更一般地说，对某种信号或信号的某个时间段，当用滤波器组对信号进行分解时，等宽和等 Q 都不一定合适，应该按信号特性选用相应组合的滤波器组。作为对子波理论的补充， 1992 年， R. Coifman 和 V. Wickerhauser[2] 提出了子波包概念，大大改善了子波的分析性能。

最近，为了克服子波不能同时满足正交性、紧支撑、线性相位和高的逼近阶的缺点，人们提出了多子波理论 [3−5]，并给出了一些实际应用 [6,7]。由于多子波和单子波一样，也是以等 Q 原则来划分频率轴，因此同样存在对信号的高频段不能细分的缺点。为了使多子波对信号分解具有更广泛的适应性，我们将多子波推广到多子波包．建立起多子波包的理论框架，为多子波的全频带快速分解和实现奠定理论基础。

2 多子波

设多尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}(t) = (\phi_1(t), \cdots, \phi_r(t))^T$ 产生 V_0 空间的一组正交基，则 $\phi_j(t)$ 正交于 $\phi_l(t-k), j, l = 1, \cdots, r, k \in Z$，即 $\int \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^T(t-k)\mathrm{d}t = \delta_{0,k}\boldsymbol{I}, k \in Z$．由双尺度方程:

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = 2\sum_k \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{\Phi}(2t-k) \tag{1}$$

得正交性的必要条件:

[1] 2000-11-14 收到， 2001-03-14 定稿
国家自然科学基金资助课题（批准号 69772029 ）

$$\sum_k \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{H}_{2l+k}^T = \delta_{0,l} \boldsymbol{I} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{H}_k$ 为 $r \times r$ 矩阵。

如果相应的级联算法收敛于 $\boldsymbol{\Phi}(t)$[8]，则 (1) 式变为充分必要条件。

为了使相应于 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的多子波 $\boldsymbol{\Psi}(t) = (\psi_1(t), \cdots, \psi_r(t))^T$ 产生 W_0 的一组正交基, 则 $\boldsymbol{\Psi}(t-k)$ 满足下面等式: $\int \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^T(t-k)\mathrm{d}t = \delta_{0,k}\boldsymbol{I}, k \in Z$ 。另一方面, $V_1 = V_0 \oplus W_0$, $V_0 \perp W_0$, 因此 $\int \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Psi}^T(t-k)\mathrm{d}t = 0, k \in Z$ 。由 (1) 式和下面的双尺度方程

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \sqrt{2} \sum_k \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{\Phi}(2t-k) \tag{3}$$

得

$$\sum_k \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{G}_{2l+k}^T = \delta_{0,l} I, \qquad l \in Z \tag{4}$$

$$\sum_k \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{G}_{2l+k}^T = \boldsymbol{0}, \qquad l \in Z \tag{5}$$

满足 (4) 式和 (5) 式的 $\boldsymbol{G}_k$ 生成正交多子波。

3 多子波包

首先我们定义正交多尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的“多子波包”概念。

定义 设 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}$ 是满足 (1) 式和 (3) 式的正交多尺度函数和多子波函数。定义函数如下:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{w}_{2l} &= \sqrt{2} \sum_k \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{w}_l(2t-k) \\ \boldsymbol{w}_{2l+1} &= \sqrt{2} \sum_k \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{w}_l(2t-k) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{w}_0(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)$, $\boldsymbol{w}_1(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)$, 则函数 $\boldsymbol{w}_n, n = 2l$ 或 $2l+1, l = 0, 1, \cdots$, 成为关于正交尺度函数 $\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{\Phi}$ 的多子波包。

为了讨论 $\boldsymbol{w}_n(t)$ 的频域性质, 需要对非负整数 n 进行二进制展开, 即

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j 2^{j-1}, \quad \varepsilon_j \in [0, 1] \tag{7}$$

定理 1 设 n 是任意给定的非负整数, n 的二进制展开由 (7) 式给出, 则多子波包 $\boldsymbol{w}_n$ 的 Fourier 变换为

$$\hat{\boldsymbol{w}}_n(\omega) = \hat{\boldsymbol{w}}_0(0) \prod_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{H}_{\varepsilon_k}(e^{-i\omega/2^k}), \quad \omega \in R \tag{8}$$

证明 对 (6) 式两边进行 Fourier 变换得

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{w}}_{2l}(\omega) &= \boldsymbol{H}_0(e^{-i\omega/2})\hat{\boldsymbol{w}}_l(\omega/2)\\ \hat{\boldsymbol{w}}_{2l+1}(\omega) &= \boldsymbol{H}_1(e^{-i\omega/2})\hat{\boldsymbol{w}}_l(\omega/2)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{H}_0(e^{-i\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k \boldsymbol{H}_k e^{-ik\omega}$, $\boldsymbol{H}_1(e^{-i\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k \boldsymbol{G}_k e^{-ik\omega}$.

当 $n=0$ 时, 由 (7) 式可知 $\varepsilon_k = 0, k=1,2,\cdots$, 因此由 (9) 式, 得 $\hat{\boldsymbol{w}}_0(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{H}_{\varepsilon_k}(e^{-i\omega/2^k})\times\hat{\boldsymbol{w}}_0(0)$. 故当 $n=0$ 时, (8) 式的结论成立. 假设 (8) 式对于 $n<2^{s_0}$ 成立, 则当 $2^{s_0}\le n<2^{s_0+1}$ 时, 由 (7) 式的二进展开可知 $\varepsilon_k = \begin{cases}1, & k=s_0+1\\ 0, & k>s_0+1\end{cases}$. 因此 $n=\sum_{k=1}^{s_0+1}\varepsilon_k 2^{k-1}$, 则 $n/2 = \varepsilon_1/2 + \sum_{k=1}^{s_0}\varepsilon_{k+1}2^{k-1}$.

令 $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $n = 2\lfloor n/2\rfloor + \varepsilon_1$, 所以, 由式 (9) 得

$$\hat{\boldsymbol{w}}_n(\omega) = \boldsymbol{H}_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})\hat{\boldsymbol{w}}_{\lfloor n/2\rfloor}(\omega/2) \tag{10}$$

又因为 $\lfloor n/2\rfloor = \sum_{k=1}^{s_0}\varepsilon_{k+1}2^{k-1} < 2^{s_0}$, 由归纳假设得:

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{\lfloor n/2\rfloor}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{H}_{\varepsilon_{k+1}}(e^{-i\omega/2^{k+1}})\hat{\boldsymbol{w}}_0(0) \tag{11}$$

把 (11) 式代入 (10) 式即可得 (8) 式的结论。 证毕

定理 2 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 是正交多尺度函数, $\boldsymbol{w}_n$ 是相应的多子波包, 那么, 对于每个 $n\ge 0$, 有

$$<\boldsymbol{w}_n(t-m), \boldsymbol{w}_n(t-k)> = \delta(k-m)\boldsymbol{I}, \qquad m,k\in Z \tag{12}$$

证明 关于 n 用数学归纳法, 当 $n=0$ 时, $\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{\Phi}$, 满足正交性. 假设当 $n<N$ 时结论成立, 则当 $n=N$ 时

$$\begin{aligned}&<\boldsymbol{w}_N(t-n), \boldsymbol{w}_N(t-k)> = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\boldsymbol{w}}_N(\omega)\hat{\boldsymbol{w}}_N^*(\omega)e^{i\omega(k-m)}\mathrm{d}\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{H}_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})\hat{\boldsymbol{w}}_{\lfloor N/2\rfloor}(\omega/2)\hat{\boldsymbol{w}}^*_{\lfloor N/2\rfloor}(\omega/2)\boldsymbol{H}^*_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})e^{i\omega(k-m)}\mathrm{d}\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\int_{4\pi l}^{4\pi(l+1)}\boldsymbol{H}_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})\hat{\boldsymbol{w}}_{\lfloor N/2\rfloor}(\omega/2)\hat{\boldsymbol{w}}^*_{\lfloor N/2\rfloor}(\omega/2)\boldsymbol{H}^*_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})e^{i\omega(k-m)}\mathrm{d}\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi}\boldsymbol{H}_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\hat{\boldsymbol{w}}_{\lfloor N/2\rfloor}(\omega/2+2\pi l)\hat{\boldsymbol{w}}^*_{\lfloor N/2\rfloor}(\omega/2+2\pi l)\boldsymbol{H}^*_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})e^{i\omega(k-m)}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

利用归纳假设得 $\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\hat{\boldsymbol{w}}_{\lfloor N/2\rfloor}(\omega/2+2\pi l)\hat{\boldsymbol{w}}^*_{\lfloor N/2\rfloor}(\omega/2+2\pi l) = \boldsymbol{I}$. 因此

$$\begin{aligned}&<\boldsymbol{w}_N(t-n), \boldsymbol{w}_N(t-k)> = \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi}\boldsymbol{H}_{\varepsilon_1}e^{-i\omega/2}\boldsymbol{H}^*_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})e^{i\omega(k-m)}\mathrm{d}\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\omega(k-m)}\{\boldsymbol{H}_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})\boldsymbol{H}^*_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2}) + \boldsymbol{H}_{\varepsilon_1}(-e^{-i\omega/2})\boldsymbol{H}^*_{\varepsilon_1}(-e^{-i\omega/2})\}\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{13}$$

由多尺度的正交性得

$$\boldsymbol{H}_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})\boldsymbol{H}^*_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})+\boldsymbol{H}_{\varepsilon_1}(-e^{-i\omega/2})\boldsymbol{H}^*_{\varepsilon_1}(-e^{-i\omega/2})=\boldsymbol{I} \tag{14}$$

联合 (13) 式和 (14) 式可推导出 (12) 式结论。 证毕

定理 2 说明正交多尺度函数的子波包也是正交的。

定理 3 令 $\boldsymbol{\Phi}$ 是正交多尺度函数， $\boldsymbol{w}_n$ 是相应的多子波包，那么，对于每个 $l\geq 0$ ，有

$$<\boldsymbol{w}_{2l}(t-m),\boldsymbol{w}_{2l+1}(t-k)>=0, \qquad m,k\in Z \tag{15}$$

证明

$$<\boldsymbol{w}_{2l}(t-m),\boldsymbol{w}_{2l+1}(t-k)>=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\boldsymbol{w}}_{2l}(\omega)\hat{\boldsymbol{w}}^*_{2l+1}(\omega)e^{i\omega(k-m)}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{H}_0(e^{-i\omega/2})\hat{\boldsymbol{w}}_1(\omega/2)\hat{\boldsymbol{w}}^*_l(\omega/2)\boldsymbol{H}^*_1(e^{-i\omega/2})e^{i\omega(k-m)}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\int_{4\pi l}^{4\pi(l+1)}\boldsymbol{H}_0(e^{-i\omega/2})\hat{\boldsymbol{w}}_l(\omega/2)\hat{\boldsymbol{w}}^*_l(\omega/2)\boldsymbol{H}^*_1(e^{-i\omega/2})e^{i\omega(k-m)}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{4\pi}\boldsymbol{H}_0(e^{-i\omega/2})\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\hat{\boldsymbol{w}}_l(\omega/2+2\pi l)\hat{\boldsymbol{w}}^*_l(\omega/2+2\pi l)\boldsymbol{H}^*_1(e^{-i\omega/2})e^{i\omega(k-m)}\mathrm{d}\omega$$

由多子波正交性可知 $\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(\omega/2+2\pi l)\hat{\boldsymbol{w}}^*_l(\omega/2+2\pi l)=\boldsymbol{I}$, 因此

$$<\boldsymbol{w}_{2l}(t-m),\boldsymbol{w}_{2l+1}(t-k)>=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{4\pi}\boldsymbol{H}_0(e^{-i\omega/2})\boldsymbol{H}^*_1(e^{-i\omega/2})e^{i\omega(k-m)}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}e^{i\omega(k-m)}\{\boldsymbol{H}_0(e^{-i\omega/2})\boldsymbol{H}^*_1(e^{-i\omega/2})+\boldsymbol{H}_0(-e^{-i\omega/2})\boldsymbol{H}^*_1(-e^{-i\omega/2})\}\mathrm{d}\omega \tag{16}$$

由多子波的正交性得

$$\boldsymbol{H}_0(e^{-i\omega/2})\boldsymbol{H}^*_1(e^{-i\omega/2})+\boldsymbol{H}_0(-e^{-i\omega/2})\boldsymbol{H}^*_1(-e^{-i\omega/2})=\boldsymbol{0} \tag{17}$$

联合 (16) 式和 (17) 式可得 (15) 式结论。 证毕

由以上的定理，我们可以得到下面的多子波包的正交分解。

设 $\boldsymbol{w}_n$ 是由正交多尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 的多子波包，当 $n>0$, $n\in Z$ 时， $\boldsymbol{w}_n$ 生成的子空间为 $U^n_l=\mathrm{clos}_{L^2(R)}\langle 2^{j/2}\boldsymbol{w}_n(2^jt-k);k\in Z,j\in Z\rangle$ ，则有下面的分解结果。

定理 4 $U^n_{j+1}=U^{2n}_j\oplus U^{2n+1}_j$, $\forall n\geq 0$, $\forall j\in Z$ 。

定理 5 $W_j=\oplus^1_{r=0}U^{2+r}_{j-1}=\cdots=\oplus^{2^k-1}_{r=0}U^{2^k+r}_{j-k}=\cdots=\oplus^{2^j-1}_{r=0}U^{2^j+r}_0$ 。

而且对于每个 $m=0,1,\cdots,2^k-1$, $k=1,2,\cdots,j$ 和 $j=1,2,\cdots$, $\{2^{(j-k)/2}w_{2^k+m}(2^{j-k}t-l),l\in Z\}$ 形成 $U^{2^k+m}_{j-k}$ 的一个规范正交基。由定理 5 ，我们可以得到下面的推论。

推论 对于每个 $j=0,1,2,\cdots$, $L^2(R)=\oplus_{j\in Z}W_j=\cdots\oplus W_{-1}\oplus W_0\oplus U^2_0\oplus U^3_0\oplus\cdots$, $\{\boldsymbol{\Psi}_{j,k}\boldsymbol{w}_n(t-k),n\geq 2,k\in Z\}$ 是 $L^2(R)$ 的一个规范正交基。

定理 1 到定理 5 不仅给出了多子波包理论的基本框架，而且为建立多子波包的快速分解算法的构造方法奠定了基础。

5 结 论

因为多子波变换和单子波变换一样是按等 Q 原则划分频率轴，即在高频部分，具有较宽的频带，而在低频部分具有较窄的频带．这种变换适合于信号的慢起伏分量 (即低频分量) 有长的时宽，而快变分量 (即高频分量) 则是脉冲式的．然而，并不是所有信号的特性都与多子波变换的这种特点相适应，对于含有在高频段具有相当窄的带宽信号，多子波分析就不能满足实际问题的需要．因此，本文类似于从正交单子波基推广到正交单子波包的概念，给出了多子波包的理论框架，并把正交单子波包的定义、概念和性质推广到正交多子波包，给出了相应的证明．现在问题是：如何选择比较好的多子波包基？能否将有关单子波包基选择准则推广到多子波包是值得继续研究的问题．

参 考 文 献

[1] 赵松年，熊小芸，子波变换与子波分析，北京，电子工业出版社， 1997，第二章．

[2] R. R. Coifman, V. Wickerhauser, Entropy-based algorithms for best basis selection, IEEE Trans. on IT, 1992, IT-38(2), 713–718.

[3] J. S. Geronimo, D. P. Hardin, P. R. Massopust, Fractal function and wavelet expansions based on several scaling functions, J. Approx. Theory, 1994, 78(3), 373–401.

[4] X. G. Xia, J. S. Geronimo, D. P. Hardin, B. W. Suter, Design of prefilters for discrete multiwavelet transform, IEEE Trans. on SP, 1996, 44(1), 25–35.

[5] X. G. Xia, A new prefilter design for disctete multiwavelet transforms, IEEE Trans. on SP, 1998, 46(6), 1558–1570.

[6] V. Strela, P. N. Heller, G. Strang, P. Topiwala, C. Heil, The application of multiwavelet filter banks to image processing, IEEE Trans. on Image Processing, to be published.

[7] M. Cotronei, L. Puccio, An Application of Multiwavelet Analysis to Signal Compression. in Surface Fitting and Multiresolution Method, A. Le Mehaute, C. Rabut, and L. Schumaker, Eds. Nashville, TN: Vanderbit Univ. Press, 1997, 75–82.

[8] G. Strang. Eigenvalues of $(\downarrow 2)$ H and convergence of the cascade algorithm. IEEE Trans. on SP, 1996, 44(2), 233–238.

ORTHOGONAL MULTIWAVELET PACKET THEORY

Chen Junli　　Yang Xinxing　　Jiao Licheng

(Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, *China)*

Abstract In this paper, the goal is to generalize the notions and properties of wavelet packet to multiwavelet packet and to develop the theoretical framework of multiwavelet packet. Moreover, the proof is given.

Key words Multiwavelets, Multiwavelet packet, Single wavelet

陈俊丽：　女，1972 年生，博士生，研究方向为小波分析和雷达信号处理．
杨新星：　男，1970 年生，博士，研究方向为小波分析和雷达信号处理．
焦李成：　男，1959 年生，教授，博士生导师， IEEE 高级会员，研究方向为智能信号处理．