

# 基于图像局部结构的扩散平滑

严家斌<sup>1,2</sup>, 刘贵忠<sup>1</sup>

(1. 西安交通大学电子与信息工程学院, 西安 710049; 2. 中南大学信息物理工程学院, 长沙 410083)

**摘要:** 各向异性扩散平滑去噪的主要特点是扩散方向的选择性与定向扩散能力, 有效表征信号或图像的局部结构特征是各向异性扩散的基础, 传统的梯度表示方法极易受到噪声干扰。该文在分析图像局部结构表征方式的基础上, 定义一个图像的局部各向异性强度参数  $M$ , 提出一个新的扩散方程。试验测试显示, 新扩散模型相对于 ALM 模型与 CAZ 模型具有更好的噪声压制能力和定向扩散能力, 信噪比分别提高了 0.1 dB~0.8 dB 和 0.3 dB~1.2 dB。

**关键词:** 各向异性扩散; 图像局部结构; 图像去噪与增强

## Diffusion Smoothing Based on Local Structure of Image

YAN Jia-bin<sup>1,2</sup>, LIU Gui-zhong<sup>1</sup>

(1. School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049;  
2. School of Info-Physics and Geomatics Engineering, Central South University, Changsha 410083)

**【Abstract】** The selectivity of diffusion direction and the ability of directional diffusion are the main characteristics of anisotropic diffusion filter. Efficient expression of local feature of signal or image is the base of anisotropic diffusion. Traditional gradient expression is always disturbed by noise. This paper defines an intension parameter of image local anisotropy and proposes a novel diffusion model by analyzing image local structure expression manner. The results of tests indict the proposed method possesses better abilities of de-noising and directional diffusion, compared with ALM model and CAZ model, and signal-noise ratios improves by 0.1 dB~0.8 dB and 0.3 dB~1.2 dB respectively.

**【Key words】** anisotropic diffusion; local structure of image; image de-noising and enhancement

图像的平滑去噪与增强是图像处理中的一项重要内容, 自文献[1]提出各向异性扩散平滑滤波以来, 各向异性扩散已成为一种非常有效的多尺度图像分析方法, 并在图像的去噪、增强、分割、边界探测等方面得到广泛应用<sup>[2-4]</sup>。作为一种定向扩散能力的滤波方法, 其相对于传统的线性低通滤波器(如高斯滤波), 不仅能平滑噪声、提取到图像的总体趋势特征, 还能保护图像的边缘、纹理等特征信息<sup>[1,3]</sup>。然而噪声的存在使得梯度的估计值中出现许多与图像特征无关的信息, 严重干扰了图像特征信息的检测, 甚至出现误检<sup>[3]</sup>。弱边界信息的梯度幅值相对较小, 往往会被平滑, 造成这类信息的模糊化。因此, 以梯度的幅值作为扩散速度及方向的约束参数不利于排除噪声干扰和保护弱边缘信息。

### 1 各向异性扩散模型

Koenderink及Witkin<sup>[5]</sup>的早期研究发现, 信号(或图像)的低通滤波过程(如高斯滤波)完全等价于以图像为初值的热传导方程的解, 即

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \Delta u(x, y, t)$$
$$u(x, y, 0) = u_0$$
(1)

其解具有如下形式:

$$u(x, y, t) = G_t \cdot u_0(x, y)$$
$$G_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-(x^2+y^2)/4t}$$

其中,  $u_0(x, y)$  表示初始图像。对于这类滤波过程, 若采用较大的滤波参数, 将会平滑大量的边界信息, 导致提取边界位置出现错误; 若采用较小值, 虽然能较精确提取到边界的位置

信息, 但也可能产生许多由噪声引起的虚假边界信息。因此, 选择一个合适的滤波参数, 使之既能准确提取边界的位置信息又能有效压制噪声干扰是这类线性滤波方法的关键。为了改进其不足, 文献[1]提出了经典的各向异性扩散模型, 用非线性扩散方程替代常系数热传导扩散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla u|)\nabla u)$$
$$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$
(2)

其中,  $g$  为光滑非增函数, 是梯度幅值的函数, 通常具有如下 2 种形式:  $g_k(|\nabla u|) = 1/(1+(|\nabla u|/k)^2)$ ;  $g_k(|\nabla u|) = e^{-(|\nabla u|/k)^2}$ 。其中,  $g(s) \geq 0, g(0) = 1$ , 当  $s \rightarrow \infty$  时,  $g(s) \rightarrow 0$ ; 当阈值参数  $k$  趋于无穷大时, 式(2)退化为式(1)。在图像的边缘或边界区域具有较大的梯度幅值, 因此, 它有较小的扩散系数  $g$  值, 并实行弱平滑达到保护的目的; 若梯度值较小, 则有较大的  $g$  值, 模型在扩散点就产生较强的平滑, 起到压制噪声的目的。尽管各向异性扩散模型具有良好的定向扩散性能, 在应用中仍然存在一些缺陷, 主要表现在当图像被噪声严重污染时, 图像的梯度模值可能存在较大波动, 会导致大量虚假边缘<sup>[3]</sup>, 不利于图像信息特征的提取; 另一方面, 模型是不稳定的, 例如, 当  $s \cdot g$  呈降函数时会导致反扩散, 使扩散过程变得不稳定。

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(60272072)

**作者简介:** 严家斌(1968-), 男, 博士后, 主研方向: 图像及地球物理信号处理; 刘贵忠, 教授、博士生导师

**收稿日期:** 2007-06-10 **E-mail:** cspyry@csu.edu.cn

为了更好地保护边缘、纹理等特征信息,文献[3]提出了基于平均曲率运动(mean curvature motion)的扩散方法——ALM 模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|G \cdot \nabla u|) |\nabla u| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (3)$$

ALM 模型将扩散方向固定在与梯度垂直的方向,并以  $g(|\nabla G \cdot u|)$  的速度平滑图像,取得了较好的实验结果,但对角点及铰接点的保护不够,有过平滑的现象出现。文献[2]改进了这一算法,提出 CAZ 模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|G_\sigma \cdot \nabla u|) |\nabla u| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} - (1 - g(|G_\sigma \cdot \nabla u|))(u - u_0)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (4)$$

该模型加入了  $(1-g)$  来平衡扩散项与约束项,虽然模型对特征有较强的保护作用,但其效果受高斯平滑尺度参数影响,重要的边缘(如角点和铰接点处)仍然会被明显地平滑化。

## 2 图像各向异性的表征与新的扩散模型

各向异性扩散的主要目的是对图像的特征信息提供足够的保护同时有效压制噪声。若能在扩散前提取到图像的局部结构信息,在扩散中根据此信息使扩散更具方向性,那么就有可能更好地保护这些结构特征。图像的局部结构信息可用如下矩阵表示:

$$D1 = \begin{bmatrix} u_x^2 & u_x u_y \\ u_x u_y & u_y^2 \end{bmatrix}$$

其中,  $u_x, u_y$  分别表示在  $x, y$  方向的一阶导数;  $D1$  通常称为结构张量矩阵(structure tensor matrix)。对上述矩阵进行奇异值分解:

$$D1 = (w_1 \ w_2) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

其中,  $(w_1 \ w_2)$  表示特征矢量,指示图像局部灰度变化的最大方向和最小方向;  $(\lambda_1 \ \lambda_2)$  表示相应的特征值,特征值大小表示特征矢量方向上灰度的变化强度,较大特征值的特征矢量对应于图像灰度变化较大的方向(如梯度方向),而较小的对应变化较小的方向(如等值线方向),为了避免噪声对梯度计算的影响,可采用高斯核函数正则化。通过分析特征值的大小及关系可表征出图像的局部结构特征。设  $\lambda_1 \ \lambda_2$  [6], 则:

(1)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , 表示局部区域为常量区域; (2)  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 表示常量区域为各向同性结构区域; (3)  $\lambda_1 \gg \lambda_2 = 0$ , 表示直线边界; (4)  $\lambda_1 \ \lambda_2 \gg 0$ , 表示角点。为了加快扩散过程,可以对情形(1)、情形(2)取向同性扩散。

由于  $(\lambda_1 \ \lambda_2)$  表示不同方向上的图像灰度变化强度,因此可以定义表征图像的局部各向异性强度的特征参数  $M$ :

$$M = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (5)$$

显然有  $0 \leq M \leq 1$ ,  $M = 0$  表示图像局部区域为常量区域或各向同性区域;  $M = 1$  表示为各向异性区域,如图像的边缘区等。在图像各向异性区中提高其局部区域的结构参数  $(\lambda_1 \ \lambda_2)$  的对比度就如同增强了图像的局部特征[6],因此,扩散中对于图像的特征区(如边缘、纹理区),应使  $g \rightarrow 0$ ,即在梯度方向不扩散,而在等值线方向予以较大的扩散系数值。扩散模型的改进如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g(|G \cdot \nabla u|) \Delta u - (u - u_0) & M = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = g(|G \cdot \nabla u|) |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - (1 - M)(u - u_0) & 0 < M < 1 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

当  $M=0$  时,扩散点的邻域区域为各向同性区,采用各向同性的线性滤波能提高平滑速度;当  $0 < M < 1$  时,扩散点的邻域存在各向异性,扩散点可能是边缘点或边界点,应赋予较小扩散速度,进行平均曲率运动的扩散,保护图像的特征区域。

## 3 数字计算方法

首先对式(7)离散,并采用中心差分计算梯度及二阶导数。梯度模值的计算如下[7]:

$$|\nabla u|_{i,j} = \left[ \left( \max(dx^- u_{i,j}, 0) \right)^2 + \left( \min(dx^+ u_{i,j}, 0) \right)^2 + \left( \max(dy^- u_{i,j}, 0) \right)^2 + \left( \min(dy^+ u_{i,j}, 0) \right)^2 \right]^{1/2}$$

其中,

$$dx^- u_{i,j} = u_{i,j} - u_{i-1,j}$$

$$dx^+ u_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j}$$

$$dy^- u_{i,j} = u_{i,j} - u_{i,j-1}$$

$$dy^+ u_{i,j} = u_{i,j+1} - u_{i,j}$$

利用 Neumann 边值条件,式(6)的迭代公式可表示为

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \Delta t Z(u_n(x, y)) & n = 0, 1, 2, \dots, N, M = 0 \\ Z(u_n(x, y)) = g(|G \cdot \nabla u|) \Delta u - (u - u_0) \\ u_{n+1} = u_n + \Delta t Z1(u_n(x, y)) & 0 < M < 1 \\ Z1(u_n(x, y)) = g(|G \cdot \nabla u|) |\nabla u| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} - (1 - M)(u - u_0) \end{cases} \quad (7)$$

## 4 实验测试

Lena, Boat, Cameraman, Panda 图像分别采用 ALM、CAZ 及本文的模型(式(7))进行对比测试,在每次扩散中首先采用式(6)计算图像的局部各向异性强度,然后按式(8)进行扩散平滑。扩散中的时间尺度采用文献[8]中的扩散平衡估计的方法。为了便于计算,图像灰度都被归一化到[0,1],测试图像分别被强度不等的高斯噪声污染,噪声强度(方差)参数分别为 0.005, 0.01, 0.015, 0.2, 0.025, 0.03;迭代步长为 0.2;  $k=0.1$ 。信噪比(SNR)定义为

$$SNR = 20 \lg \frac{\sum \sum u_0(i, j)^2}{\sum \sum [u(i, j) - u_0(i, j)]^2}$$

扩散平滑的对比结果如表 1 所示。

表 1 方法对比测试

测试图像	信噪比/dB	ALM/dB	CAZ/dB	Improved/dB
Lena	0.005	31.848	42.363	42.509
	0.010	26.100	38.954	39.058
	0.020	20.381	35.470	35.539
	0.030	17.200	32.756	32.924
Boat	0.005	36.400	47.270	47.489
	0.010	30.555	43.813	44.141
	0.020	24.824	41.147	41.400
	0.030	21.604	39.713	39.624
Camera	0.005	35.461	44.324	44.582
	0.010	29.700	40.664	41.101
	0.020	23.843	36.834	37.621
	0.030	20.480	34.615	35.393
Panda	0.005	31.384	40.583	40.641
	0.010	25.571	36.701	36.737
	0.020	20.072	32.572	32.632
	0.030	16.964	29.701	29.907

根据表 1, 本文的方法相对 CAZ 模型提高了 0.1 dB~0.8 dB, 相对 ALM 模型则提高了 0.3 dB~1.2 dB。例如, 256×256 的 Lena 图像被噪声强度为 0.01 的噪声污染时, 信噪比为 26.1 dB, 采用本方法滤波后, 提高到了 39.387 dB, 而 CAZ 及 ALM 模型则分别为 39.058 dB 及 38.954 dB; 当被强度为 0.025 的噪声污染后, 信噪比为 18.714 dB, 用本方法、CAZ 及 ALM 模型滤波后分别为 35.084 dB, 34.375 dB 和 34.208 dB, 分别提高了 0.33 dB, 0.43 dB 及 0.71 dB, 0.88 dB。Lena 图像平滑滤波的客观效果和边界检测结果如图 1 所示。可以看到, 使用本方法扩散平滑后的图像更自然, 边界检测效果也与原始图像更接近。

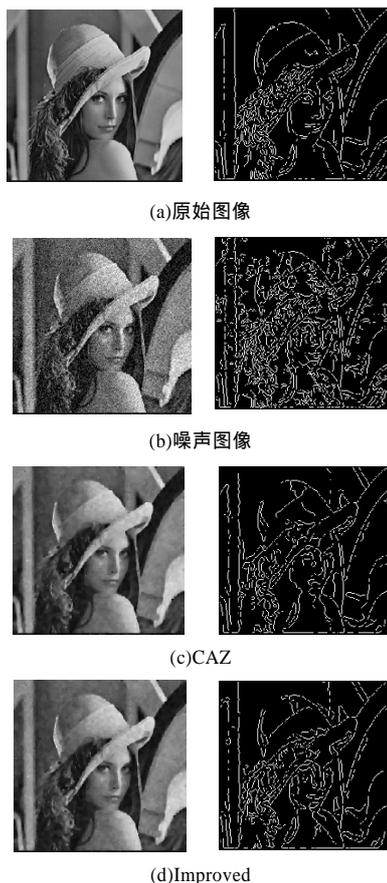


图 1 Lena 在噪声为 0.01 时扩散平滑及边界检测结果

图 2~图 5 分别为 Boat, Cameraman, Panda, Lena 测试图像在 3 种扩散模型下的信噪比, 图中的横坐标表示被不同强度的噪声污染后图像的信噪比, 纵坐标表示扩散平滑后的信噪比。显然, 本文的方法比 CAZ 与 ALM 模型有更好的噪声压制能力。

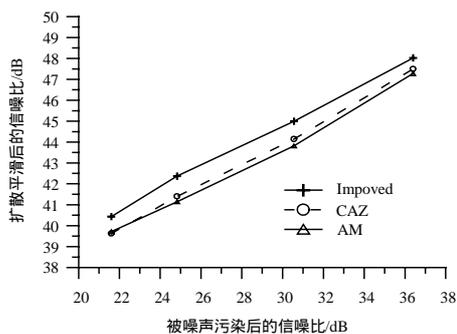


图 2 Boat 图像滤波对比

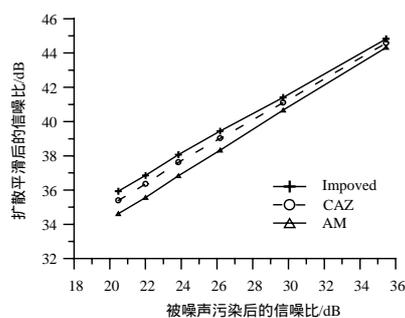


图 3 Camera 图像滤波对比

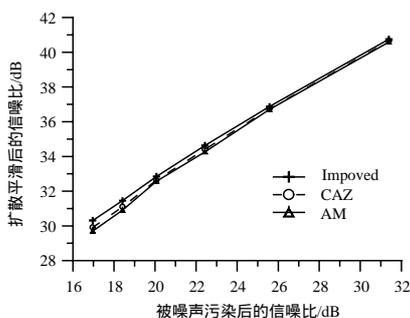


图 4 Panda 图像滤波对比

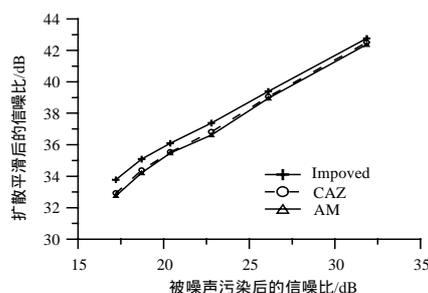


图 5 Lena 图像滤波对比

## 5 结束语

本文通过分析图像结构矩阵, 定义了一个新的图像局部各向异性强度参数  $M$ , 并导出了基于图像各向异性强度的新的扩散方程。本扩散模型在各向异性强度较小的区域, 如各向同性区、常量值区域, 进行较快的平滑扩散; 而在各向异性较强的区域进行基于平均曲率运动扩散。实验结果显示模型在噪声的压制能力方面明显优于 ALM 模型与 CAZ 模型, 具有更好的定向扩散能力与特征保护能力。

## 参考文献

- [1] Perona P, Malik J. Scale-space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion[J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639.
- [2] Barcelos C A Z, Boaventura M, Silva E C. A Well Balanced Flow Equation for Noise Removal and Edge Detection[J]. IEEE Trans. on IP, 2003, 12(7): 751-763.
- [3] Alvarez L, Lions P L, Morel J M. Image Selective Smoothing and Edge Detection Nonlinear Diffusion II[J]. SIAM J. of Numerical Analysis, 1992, 29(3): 845-866.
- [4] Chen Yunmei, Vemuri B C, Wang L. Image De-noising and Segmentation via Nonlinear Diffusion[J]. Computers and Mathematics with Application, 2000, 39(5/6): 131-139.

(下转第 54 页)