

# 基于网络演算的 GPS 系统性能边界模型与分析

张连明<sup>1,2</sup>, 陈志刚<sup>1</sup>

(1. 中南大学信息科学与工程学院, 长沙 410083; 2. 湖南师范大学物理与信息科学学院, 长沙 410081)

**摘要:** 网络演算是一种用来求解网络性能确定性边界问题的定量分析新工具。该文归纳网络演算基本理论, 给出了基于漏桶调节器的通用处理器共享系统框架。基于网络演算推导并建立了该系统框架下的队列长度、延迟/延迟抖动以及有效带宽等性能边界模型。对它们进行了实例分析, 结果表明, 利用网络演算理论分析提供保证服务的网络性能边界问题时, 具有较好的实用性和有效性。

**关键词:** 网络演算; 通用处理器共享; 队列长度; 延迟; 有效带宽

## Performance Bound Model and Analysis of Generalized Processor Sharing by Network Calculus

ZHANG Lianming<sup>1,2</sup>, CHEN Zhigang<sup>1</sup>

(1. College of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083;

2. College of Physics and Information Science, Hunan Normal University, Changsha 410081)

**【Abstract】** Network calculus is a new quantitative analysis tool for obtaining deterministic bounds on network performance. This paper summarizes some results of network calculus and presents a framework of generalized processor sharing based on leaky bucket regulator. It derives the bounds on queue size, delay and effective bandwidth by network calculus. Examples and results are presented to demonstrate the practicability and validity of the approach, which is practical and well suited for analyzing performance bounds in guaranteed service networks.

**【Key words】** Network calculus; Generalized processor sharing; Queue size; Delay; Effective bandwidth

通用处理器共享(GPS)是由Parekh和Gallager<sup>[1]</sup>提出的一种理想的、连续工作型(Work-conserving)的公平调度策略。同时, 它也是一个基于分组长度无限可分假设的流体理论模型。由于GPS为响应不同的服务请求提供了一种方法, 因此它成为保证服务(Guaranteed Service)网络等领域中的一个研究热点。目前对GPS的研究主要有<sup>[2,3]</sup>: 基于EBB和WBB过程的GPS的队列长度和延迟统计上界研究, 队列长度分布的渐进行为研究, 基于MMPP与高斯过程以及重尾(Heavy Tailed)分布的GPS性能分析等。从上述的研究成果可以发现, 所有对GPS的研究都是基于概率论或随机过程的传统排队论方法。在实时语音和视频等非弹性(Inelastic)业务流所占比重越来越大的虚拟交换(Virtual Circuit Switched)网络、保证服务网络与集成调度(Aggregate Scheduling)网络中, 传统排队论方法很难满足性能分析要求。

由R L Cruz和C S Chang开创并由J Y Le Boudec等人发展起来的网络演算(Network Calculus)是一种新的网络队列系统性能定量分析的、重要而有效的数学工具<sup>[4]</sup>。与传统排队论方法相比, 网络演算的最大优点在于它能给网络队列性能提供确定性(deterministic)的分析。目前, 对网络演算的研究包括各种类型网络领域中的保证服务质量(Quality of Service, QoS)控制、调度与缓存分配策略以及最大延迟计算等方面<sup>[4,5]</sup>。

本文利用网络演算推导出了 GPS 系统的缓冲区队列长度、延迟/延迟抖动以及有效带宽等确定性性能边界模型, 并在此基础上进行了实例分析。

### 1 GPS 系统

在GPS系统中, 所有输入业务流划分为许多会话

(Session), 每个会话既可由单个微业务流(flow)组成, 也可由具有相似QoS的多个微业务流组成。对于一个有 $N$ 个会话、输出链路带宽为 $R$ 的GPS系统, 若会话 $i$ 被赋予的权重为 $\mu_i(\mu_i > 0)$ , 则该GPS系统中正在等待服务的会话 $i$ 在时间间隔 $[s, t]$ 内得到的服务 $S_i(s, t)$ 满足下列关系式<sup>[1]</sup>:

$$\frac{S_i(s, t)}{S_j(s, t)} \geq \frac{\mu_i}{\mu_j}, j = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

GPS系统具有如下两个特性:

(1) 保证最小带宽。这一特性能够确保不同类型业务流之间相互独立, 一个业务流不受其它类型的业务流的不良行为所影响;

(2) 动态共享带宽容量。在任意时间内, 所有非空队列会话按照它们的权重比例动态分配总带宽容量, 这样可以确保统计复用增益是最大的。

### 2 网络演算

网络演算是最小加代数(min-plus algebra)和最大加代数(max-plus algebra)在网络应用中的一系列重要成果和结论的升华。

**定义 1** (最小加卷积) 业务流累积函数 $f$ 和 $g$ 的最小加卷积运算定义为

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(60573127); 国家教育部博士点基金资助项目(20040533036); 湖南省自然科学基金资助项目(03JJY4054); 湖南省教育厅科研基金资助项目(05c409); 湖南师范大学自然科学基金资助项目(22040637)

**作者简介:** 张连明(1972-), 男, 博士生、讲师, 主研方向: 流量工程和网络演算; 陈志刚, 教授、博导

**收稿日期:** 2006-03-25 **E-mail:** zlm@hunnu.edu.cn

$$(f \otimes g)(t) = \begin{cases} \inf_{s \in [0, t]} [f(t-s) + g(s)], & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

**定义 2 (最小加反卷积)** 业务流累积函数  $f$  和  $g$  的最小加反卷积运算定义为

$$(f \oslash g)(t) = \sup_{s \in [0, \infty]} [f(t+s) - g(s)], \quad t \geq 0$$

**定义 3 (到达曲线)** 给定一个函数  $\alpha(t)$ , 且  $\alpha \in F, t \geq 0$ , 若业务流输入函数  $R$  满足  $R \leq R \otimes \alpha$ , 则称  $\alpha$  为  $R$  的到达曲线。

**定义 4 (漏桶达到曲线)** 一个受漏桶限制的业务流达到曲线定义为

$$\alpha(t) = \begin{cases} b + r \cdot t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

**定义 5 (服务曲线)** 给定一个业务流输入函数  $R$ , 对于  $\beta \in F, \beta(0) = 0$ , 若业务流输出函数  $R^*$  满足  $R^* \geq R \otimes \beta$ , 则称该系统为该业务流提供服务曲线  $\beta(t)$ 。

**定义 6 (速率等待时间服务曲线)** 一个速率等待时间服务曲线定义为

$$\beta(t) = \begin{cases} R \cdot (t - T), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

**定理 1 (积压/队列长度)** 假设以  $\alpha(t)$  为到达曲线的业务流穿过一个服务曲线为  $\beta(t)$  的系统, 则在  $t$  时刻系统中的业务流数据积压/队列长度满足

$$Q \leq \sup_{t \geq 0} \{\alpha(t) - \beta(t)\} = (\alpha \oslash \beta)(0)$$

**定理 2 (虚延迟)** 假设以  $\alpha(t)$  为到达曲线的业务流穿过一个服务曲线为  $\beta(t)$  的 FIFO 调度系统, 则在  $t$  时刻最后一个业务流数据包的虚延迟满足

$$D \leq \inf_{t \geq 0} \{d \geq 0 : \alpha(t) \leq \beta(t + d)\}$$

下面将利用上述基本理论来求解 GPS 系统的性能边界问题。定理 1, 定理 2 的证明可参见文献[4]。

### 3 GPS 系统性能边界模型

会话微业务流一般是随机的、非周期性的, 为了简化业务流的监管, 采用漏桶调节器对开始进入 GPS 调度器的业务流进行调节与控制。图 1 给出了基于漏桶调节器的 GPS 系统框架。

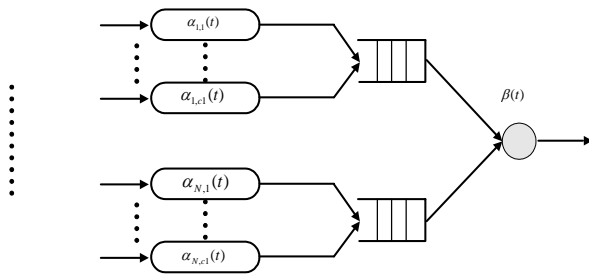


图 1 基于漏桶调节器的 GPS 系统

下面我们利用网络演算推导基于漏桶调节器的 GPS 系统性能模型, 它主要包括缓冲队列长度(积压数据)、延迟/延迟抖动、有效带宽(effective bandwidth)等性能边界。

#### 3.1 队列长度

对于一个服务曲线为  $\beta(t)$ 、输出链路速率为  $R$  的基于漏桶调节器的 GPS 系统, 若它有  $N$  个会话 (Session <sub>$i$</sub> :  $i=1, 2, \dots, N$ ), Session <sub>$i$</sub>  经过漏桶调节器调节之后得到的业务流为  $A_i(s, t)$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $A_i(s, t)$  的 GPS 权重为  $\mu_i$ , 而  $A_i(s, t)$  又由  $c_i$  个微业务流  $\{A_{i,k}(s, t): k=1, 2, \dots, c_i\}$  组成, 且  $A_i(s, t)$  在时间间隔  $[s, t]$  内得到的服务为  $S_i(s, t)$ , 第  $i$  个缓存区中等待服务的队列长度(积压数据)为  $Q_i(s, t)$ , 则根据 GPS 系统的定义可以得出式(2)~式(5)成立, 即

$$\sum_{i=1}^N S_i(s, t) \geq \beta(t) \quad (2)$$

$$S_i(s, t) \leq A_i(s, t), \quad 1 \leq i \leq N \quad (3)$$

$$A_i(s, t) = \sum_{k=1}^{c_i} A_{i,k}(s, t), \quad 1 \leq i \leq N \quad (4)$$

$$Q_i(s, t) = A_i(s, t) - S_i(s, t), \quad 1 \leq i \leq N \quad (5)$$

显然

$$\sum_{j=1}^N S_j(s, t) = \sum_{j=1}^{i-1} S_j(s, t) + \sum_{j=i}^N S_j(s, t) \quad (6)$$

把式(6)代入式(2)得到

$$\sum_{j=1}^{i-1} S_j(s, t) + \sum_{j=i}^N S_j(s, t) \geq \beta(t) \quad (7)$$

联立式(1)和式(7)求解有

$$\sum_{j=1}^{i-1} S_j(s, t) + \sum_{j=i}^N \frac{\mu_j}{\mu_i} S_i(s, t) \geq \beta(t) \quad (8)$$

式(8)通过变换得

$$S_i(s, t) \geq \frac{\mu_i}{\sum_{j=i}^N \mu_j} \left( \beta(t) - \sum_{j=1}^{i-1} S_j(s, t) \right) \quad (9)$$

联立式(3)、式(4)、式(5)和式(9)可知

$$\begin{aligned} Q_i(s, t) &\leq A_i(s, t) - \frac{\mu_i}{\sum_{j=i}^N \mu_j} \left( \beta(t) - \sum_{j=1}^{i-1} S_j(s, t) \right) \\ &\leq A_i(s, t) - \frac{\mu_i}{\sum_{j=i}^N \mu_j} \left( \beta(t) - \sum_{j=1}^{i-1} A_j(s, t) \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{c_i} A_{i,k}(s, t) - \frac{\mu_i}{\sum_{j=i}^N \mu_j} \left( \beta(t) - \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{c_j} A_{j,k}(s, t) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)中的  $A_{i,k}(s, t)$  为会话  $i$  的第  $k$  个微业务流经过漏桶调节器调节之后的输出, 它与本文使用的漏桶到达曲线  $\alpha_{i,k}(t)$  (由定义 4 给出) 满足如下表达式关系:

$$A_{i,k}(s, t) \leq \alpha_{i,k}(t) \quad (11)$$

当 GPS 系统的服务曲线  $\beta(t)$  由定义 6 给出的速率等待时间服务曲线来描述时, 联合式(10)、式(11) 和定义 4、定义 6, 可以解出

$$\begin{aligned} Q_i(s, t) &\leq \sum_{k=1}^{c_i} (b_{i,k} + r_{i,k} \cdot (t-s)) \\ &\quad - \frac{\mu_i}{\sum_{j=i}^N \mu_j} (R \cdot (t-s-T)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{c_j} (b_{j,k} + r_{j,k} \cdot (t-s)) \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)给出了基于漏桶调节器的 GPS 系统中会话  $i$  在缓存区中的队列长度上界。

#### 3.2 延迟/延迟抖动

一个基于漏桶调节器的 GPS 系统的总延迟  $D = \Delta D + d$ 。其中  $\Delta D$  为可变延迟(也称延迟抖动), 其主要包括业务流经过漏桶调节器所需的延迟和业务流在 GPS 系统缓冲区的等待延迟,  $d$  为固定延迟, 它主要为 GPS 系统的调度转发延迟。

##### (1) 延迟抖动

现假设未使用漏桶调节器  $\alpha(t)$  的延迟为  $\Delta D(A, \beta)$ , 使用了漏桶调节器  $\alpha(t)$  的延迟抖动为  $\Delta D^*(A \otimes \alpha, \beta)$ , 根据定义 1 和式(11)可得  $A \otimes \alpha \leq A$ , 再根据定理 2 可知,  $\Delta D^* \leq \Delta D$ 。由此可见, 使用漏桶调节器对业务流进行调节不增加延迟。于是, 延迟抖动等于业务流在 GPS 系统缓冲区的等待延迟。

根据 GPS 系统的定义, 有

$$\beta(t) = \sum_{j=1}^N \beta_j(t) \quad (13)$$

$$\frac{\beta_j(t)}{\beta_j(t)} \geq \frac{\mu_j}{\mu_j}, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (14)$$

下面以会话  $i$  为考察对象, 从定理 2 可知

$$\Delta D_i \leq \inf_{t \geq 0} \{d \geq 0: \alpha_i(t) \leq \beta_i(t+d)\} \quad (15)$$

联立式(13)~式(15)可知

$$\begin{aligned} \Delta D_i &\leq \inf_{t \geq 0} \{d \geq 0: \alpha_i(t) \leq \frac{\mu_i}{\sum_{j=1}^N \mu_j} \beta(t+d)\} \\ &\leq \inf_{t \geq 0} \{d \geq 0: \sum_{k=1}^{c_i} \alpha_{i,k}(t) \leq \frac{\mu_i}{\sum_{j=1}^N \mu_j} \beta(t+d)\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\leq \inf_{t \geq 0} \{d \geq 0: d \geq \frac{\sum_{j=1}^N \mu_j \sum_{k=1}^{c_i} (r_{i,k} t + b_{i,k}) - Rt}{R} + T\}$$

因为  $\frac{\sum_{j=1}^N \mu_j}{\mu_i} \sum_{k=1}^{c_i} r_{i,k} \leq R$ ，所以

$$\Delta D_i \leq T + (\frac{\sum_{j=1}^N \mu_j}{\mu_i} \sum_{k=1}^{c_i} b_{i,k}) / R \quad (17)$$

式(17)为会话  $i$  业务流在缓冲区的等待延迟上界，即基于漏桶调节器的 GPS 系统的延迟抖动上界。

(2)延迟

假设该 GPS 系统的固定延迟为  $d$ ，则得到其总延迟为

$$D_i = \Delta D_i + d \leq T + d + (\frac{\sum_{j=1}^N \mu_j}{\mu_i} \sum_{k=1}^{c_i} b_{i,k}) / R \quad (18)$$

式(18)给出了基于漏桶调节器的 GPS 系统中会话  $i$  的总延迟上界。

### 3.3 有效带宽

有效带宽是一种开拓和刻画业务流统计复用增益的最佳方法，它常用来增加网络资源的利用率。一个业务流的有效带宽是指满足服务保证所需的最小带宽，即该业务流得到最小服务保证所需要的比特率，则会话  $i$  的第  $k$  个微业务流的有效带宽可表示为

$$e(\alpha_{i,k}) = \sup_{0 \leq s} \frac{\alpha_{i,k}(s)}{s + D_{i,k}} \quad (19)$$

这里， $\alpha_{i,k}$  为会话  $i$  中的第  $k$  个微业务流的到达曲线， $D_{i,k}$  为该微业务流的虚拟延迟上界。

联合定义 4 和式(19)可得

$$\begin{aligned} e_i &= e(\sum_{k=1}^{c_i} \alpha_{i,k}) \leq \sum_{k=1}^{c_i} e(\alpha_{i,k}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{c_i} \sup_{0 \leq s} \frac{\alpha_{i,k}(s)}{s + D_{i,k}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{c_i} \max\{r_{i,k}, b_{i,k} / D_{i,k}\} \end{aligned} \quad (20)$$

又因为  $D_{i,k} \geq D_i$ <sup>[4,5]</sup>，所以

$$e_i \leq \sum_{k=1}^{c_i} \max\{r_{i,k}, b_{i,k} / D_i\} \quad (21)$$

式(21)为基于漏桶调节器的 GPS 系统中会话  $i$  的有效带宽上界。

## 4 实例分析

为了验证本文推导的性能模型的实用性和有效性，本节给出了一个基于漏桶调节器的 GPS 系统的具体实例，其配置为：该 GPS 系统的输出链路速率  $R=500\text{Mbps}$ ，服务等待时间

$T=1.0 \times 10^{-3}\text{s}$ ， $d=2.0 \times 10^{-4}\text{s}$ ，其它参数参见表 1。

表 1 实例参数配置

Session	Flow	$\mu_i$	$r_{i,k}$ (Kbps)	$b_{i,k}$ (Kb)
1	1	0.55	500	30
	2		300	300
	3		420	150
2	1	0.20	600	200
	2		240	500
3	1	0.25	300	200

应用第 3 节推导的结论，计算基于漏桶调节器的 GPS 系统的队列长度、延迟/延迟抖动与有效带宽等性能边界。

利用式(12)，代入相关参数，得到会话 1、会话 2、会话 3 在  $[0, 1.5 \times 10^{-3}\text{s}]$  时间内的队列长度分别为

$$Q_1 \leq \sum_{k=1}^3 (b_{1,k} + r_{1,k} \cdot (t-s)) - \frac{\mu_1}{\sum_{j=1}^3 \mu_j} (R \cdot (t-s-T)) = 344.33\text{Kbps}$$

$$Q_2 \leq 651.26\text{Kbps}, Q_3 \leq 150.45\text{Kbps}$$

利用式(17)和式(18)，代入相关参数，得到会话 1、会话 2、会话 3 在  $[0, 1.5 \times 10^{-3}\text{s}]$  时间内的延迟抖动和延迟分别为

$$\Delta D_1 \leq T + (\frac{\sum_{j=1}^N \mu_j}{\mu_1} \sum_{k=1}^3 b_{1,k}) / R = 2.75 \times 10^{-3}\text{s}$$

$$D_1 \leq 2.275 \times 10^{-4}\text{s}$$

$$\Delta D_2 \leq 8 \times 10^{-3}\text{s}, D_2 \leq 2.8 \times 10^{-4}\text{s}$$

$$\Delta D_3 \leq 3 \times 10^{-3}\text{s}, D_3 \leq 2.3 \times 10^{-4}\text{s}$$

利用式(21)，代入相关参数，得到会话 1、会话 2、会话 3 在  $[0, 1.5 \times 10^{-3}\text{s}]$  时间内的有效带宽分别为

$$e_1 \leq \sum_{k=1}^3 \max\{r_{1,k}, b_{1,k} / D_1\} = 2478.02\text{Kbps}$$

$$e_2 \leq 2500\text{Kbps}, e_3 \leq 869.565\text{Kbps}$$

## 5 结论

本文在归纳网络演算的基础上，研究了基于漏桶调节器的 GPS 系统行为，利用网络演算理论推导出 GPS 系统的队列长度、延迟/延迟抖动与有效带宽等性能确定性边界模型，并针对一个具体实例计算性能上界，显示网络演算在计算保证服务网络中性能边界的实用性和有效性。

### 参考文献

- 1 Parekh A K, Gallager R G. A Generalized Processor Sharing Approach to Flow Control in Integrated Services Networks: The Single Node Case[J]. IEEE Network, 1993, 1(3): 344-357.
- 2 Yu Z, Thng L J, Jiang Y. Generalized Processor Sharing with Long-range Dependent Traffic Input[C]//Proc. of the 9<sup>th</sup> International Symposium on Modeling, Analysis and Simulation of Computer and Telecomm, Systems, Washington. 2001: 224-231.
- 3 Mannersalo P, Norros I. GPS Schedulers and Gaussian Traffic[C]//Proc. of INFOCOM '02, New York. 2002: 1660-1667.
- 4 Boundec J Y L, Thiran P. Network Calculus[M]. Berlin: Springer Verlag, 2004.
- 5 张奇智, 张 彬, 张卫东. 基于网络演算计算交换式工业以太网中的最大时延[J]. 控制与决策, 2005, 20(1): 117-120.

(上接第 29 页)

- 3 Zhan Yiqiang, Shen Dinggang. Design Efficient Support Vector Machine for Fast Classification[J]. Pattern Recognition, 2005, 38(1): 157-161.
- 4 Lee Y J, Mangasarian O L. RSVM: Reduced Support Vector Machines[R]. Data Mining Institute, Computer Sciences Department,

University of Wisconsin, Tech. Rep.: 00207, 2000.

- 5 Pedroso J P, Murata N. Support Vector Machines for Linear Programming: Motivation and Formulations[R]. BSIS Technical Report: 99-2, Riken Brain Science Institute, Wako-shi, Saitama, Japan, 1999.