随机利率条件下的可转换债券定价

—— 一种鞅方法

南开大学经济学院金融系 03 级硕士研究生　　周志超

摘要：近几年我国的可转换债券市场发展势头迅猛，据和讯网统计，2003 年我国共有 15 家公司发行了可转换债券，筹资总额 181.5 亿元。与如此大的市场相比，对可转债的研究理论显得比较落后，因此对可转换债券的定价研究非常重要。通常对可转债的定价是运用 PDE 法，然而该法的缺陷在于需要用到数值算法，因此比较繁琐。本文另辟蹊径，运用鞅方法导出了随机利率条件下的可转债定价模型。相比通常的 PDE 法，该方法要简单的多，而且数据都是可测的，因此更具可行性。

关键词：可转换债券、等价鞅测度、随机利率

1．引言

可转换公司债券（Convertible Bonds）是一种介于纯粹权益和纯粹负债工具之间的金融工具。一方面它具有固定的未来现金流入，这一点上类似于一般的公司债券或国债（有一些可转债，如 LYON，本身不附票息，发行时采取折扣发行，到期时其持有者可以获得面值，因此也可以看成是附息债券，只是利息收入包含在资本利得之中），另一方面，可转换债券持有者在债券有效期内，可以随时将债券转换为发行公司或者第三方公司的普通股，从而成为标的公司的普通股东，因此它实际上可以看成是发行公司未来出售的股票，只不过这种股票的取得与否取决于可转债持有人的意愿。正是因为这种非债非股的特性，使得可转换债券的定价变得扑朔迷离。而我国在暂时还没有期权市场的背景下，引入了可转换债券，因此对它的定价研究也显得非常必要。

可转换债券从本质上看是在普通债券之中内嵌了一个认股权证，因此它的定价也应与期权的定价有一定的联系。国内外对期权的定价有很多种方法：其中较常用的一种就是偏微分方程（即 PDE）法，Black-Scholes 期权定价公式即属于此类，该方法的思路是：由于金融衍生资产的价格取决于其基础资产，因此可以将衍生资产的价格视为基础资产的函数，由 ITO 引理可导出期权满足的偏微分方程(partial differential equation，简称 PDE)，再利用无套利原理，并根据可转换债券的条款如转换条款、可赎回条款等确定可转债的最优转换和赎回策略，由此确定 PDE 的边界条件和终值条件，最后利用 PDE 的数值算法计算出可转换债券的价值；另一种较常见的是套利定价方法，也叫鞅方法，这归功于 Harrison 和 Krep（1979）以及 Harrison 和 Pliska（1981），下文将给出其具体思路。与之类似，可转换债券的定价也可以通过这两种方法得到。

1.1　偏微分方程法（PDE 法）

可转换债券定价的偏微分方程法最早可追溯 Merton（1974），他采用了无套利定价的方法导出了一种适用于所有公司债券的定价模型，他认为价值为 V 的公司所发行的任何证券（价值为 f）均可以看成是 V 和时间 t 的函数，假设公司的价值 V 及其发行证券的价值 f 都遵循几何布朗运动，由 Ito 方程及无套利原理，Merton 指出债券的市场价值 f 满足下述微分方程：

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + (\gamma V - C)\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} + c_f$$

其中，$\gamma = \dfrac{n}{n+M}$，又称稀释因子，n、M 分别为可转股数和已发行股数，C 为公司所发行的所有证券的现金流出（股息和利息支付），c_f 为该种债券的现金支付，r 为无风险利率。而最早运用期权理论对可转换债券进行定价的是 Ingersoll(1977)和 Brennan and Schwartz(1977)，他们假定可转换债券是公司市场价值和时间的函数，并且公司的市场价值的运动过程满足一个随机扩散过程，最终导出一个类似的 PDE 模型，

他们的模型的缺陷在于没有考虑到利率变化对可转换债券价值的影响，因此他们的模型基本上是单因素模型，此外他们的模型并没有考虑到信用风险对可转债价值的影响。

国内对可转换债券的偏微分方程法定价以郑小迎等（2000）为代表，他在 Ingersoll 和 Brennan and Schwartz 的单因素模型的基础上，提出了一个双因素的定价模型，其过程为：假设股价遵循几何布朗运动，利率满足 Ito 过程，先通过 Ito 引理给出利率、股价模型的一般表达式，并给出两者之间的相关系数，最后构造一个投资组合以消去随机项，通过无套利原理得到可转换债券的双因子定价模型：

$$rC = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial r}(\mu_2 - \lambda_2 \omega) + rs\frac{\partial C}{\partial s} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 C}{\partial s^2}\sigma^2 s^2 + 2\rho\sigma s\xi\frac{\partial^2 C}{\partial r\partial s} + \omega^2\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}\right]$$

(1-1)

其中，s 为股票价格，μ_1 为股票的预期收益率，σ 为股价的波动率，μ_2(r,t)为利率的漂移率，ω(r,t)为利率的波动率，λ_2 为利率的市场风险价格，C 是可转换债券价格，r 为无风险利率。设可转换债券面值为 Z，转股比例为 n，公司现有 N 股股票，则其边界条件满足：

$$C(s,r,T) = \max(Ze^{r_b T}, ns) \qquad (1\text{-}2)$$

其中 r_b 为可转换债券的票面利息率（以连续复利记）。

1.2 套利定价方法（鞅方法）

套利定价方法又称为鞅方法，是由 Cox 和 Ross（1976）、Harrison 和 Krep（1979）以及 Harrison 和 Pliska（1981）发展起来的。其基本思想为：如果市场是完全的，那么存在唯一的概率测度，即所谓的“风险中性”概率，在这一概率下，任何金融资产的贴现价格是一个鞅，这样，任何资产的估价等于要计算在风险中性概率下，以无风险利率来贴现的未来现金流的条件期望。鞅方法在国外被广泛的应用于衍生资产的定价中，遗憾的是，目前我国运用鞅方法对可转债定价的研究非常少，王振权，邓述慧（2000）曾经提出过一个简单的可转债鞅方法定价模型，在该模型中，不考虑赎回条款以及信用风险，此外假设可转债期限内利率为常数，本文拟在此基础上去掉最后一个假设，给出一个在随机利率条件下的可转债鞅方法定价公式。在进行更深的讨论之前，先给出一个定理，这对于后文的分析有很大帮助。

定理 1（最优转换策略）：如果资本市场是完全的，股票不支付红利以及转换条款不变，那么不含赎回权的可转换债券持有人将一直持有可转换债券或者将其在市场上出售，而不会提前实行转换。

对此，Brennan（1973）给出过严格的证明，在此不详加论述。

2．随机利率条件下的可转换债券定价鞅模型

2.1 利率恒定条件下的鞅方法模型

在讨论随机利率条件下可转债定价的鞅模型之前，先给出简易可转债定价的鞅模型的推导：假定：市场是完备的，交易连续进行，没有摩擦、交易费用或征税。存在可转换债券（r_b,K,T,I），其票面利率为 r_b，转换价格为 K，到期日为 T，I 表示可转换债券的条款，为简便起见，设可转换债券的面值即为其转换价格 K（换言之，一份可转换债券可换一股股票），则如果到期日投资者不行使转换权，其获得的偿付为 $K_b = K \times e^{r_b t}$。

假设股票价格遵循几何布朗运动：

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \qquad (2\text{-}1)$$

其中 $S_0 \succ 0$，μ和σ分别为股票的预期收益率和漂移率，W_t为在概率空间(Ω,F,P)上定义的标准布朗运动。定义一个 $S_t^* = e^{-rt}S_t$，则必存在一个 P 的等价概率 P^*，在此概率测度下 S_t^* 是一个鞅，事实上，由：

$$\mathrm{d}S_t^* = -e^{-rt}S_t\mathrm{d}t + e^{-rt}dS_t = S_t^*\left[(\mu - r)dt + \sigma dW_t\right] \qquad (2\text{-}2)$$

采用变量替换：

$$W_t^* = W_t + \left[(\mu - r)/\sigma\right]\mathrm{t} \qquad (2\text{-}3)$$

则有：

$$\mathrm{d}S_t^* = S_t^*\sigma dW_t^* \qquad (2\text{-}4)$$

根据 Girsanov 定理，令 $\Theta = {(\mu - r)}\big/{\sigma}$，则必存在概率 P 的等价概率 P^*，在此概率下，$(W_t^*)_{0\le t\le T}$ 是一个标准布朗运动。因此在概率 P^* 下，我们可以从方程（2.4）导出 S_t^* 是一个鞅，且有：

$$S_t^* = S_0^*\exp\left[\sigma W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right] \qquad (2\text{-}5)$$

由定理 1，可转换债券只在到期日执行转换（不考虑可赎回、回售条款），则可转换债券的价格可通过它在同样的概率 P^* 下的条件期望终值来给定：

$$V_t = E^*\left[e^{-r(T-t)}h\right] \qquad (2\text{-}6)$$

其中 $h = \max\{S_T, K_b\} = f(S_T)$

由于：

$$S_t = e^{rt}S_0\exp\left[\sigma W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right] \qquad (2\text{-}7)$$

$$S_T = e^{rT}S_0\exp\left[\sigma W_T^* - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right] \qquad (2\text{-}8)$$

故有：

$$V_t = E^*\left[e^{-r(T-t)}f\left[S_t e^{r(T-t)}\exp\left\{\sigma(W_T^* - W_t^*) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right\}\right]\right] \qquad (2\text{-}9)$$

在概率 P^* 下，令（$W_T^* - W_t^*$）$= Y\sqrt{T-t}$，则 Y 服从正态分布 N(0,1)，有：

$$V_t = e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left[S_t \exp\left[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma Y\sqrt{T-t}\right]\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{Y^2}{2}\right)dY$$

（2-10）

代入可转换债券的支付函数 h= max $\{S_T, K_b\}$ = $K_b + (S_T - K_b)^+$，当 $S_T \geq K_b$ 时 $(S_T - K_b)^+ = S_T - K_b$，当 $S_T \leq K_b$ 时，$(S_T - K_b)^+$ = 0，而条件 $S_T \geq K_b$ 等价于：

$$S_t \exp\left[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma Y\sqrt{T-t}\right] \geq K_b \qquad (2\text{-}11)$$

令 $d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{K_b}{S_t}\right)+\left[r+\dfrac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]}{\sigma\sqrt{T-t}}$，　$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

则（2.11）可表示为：

$$Y \geq \frac{\ln\left(\frac{K_b}{S_t}\right)-\left[r-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]}{\sigma\sqrt{T-t}} = -d_2 \qquad (2\text{-}12)$$

因此，V_t 可以表示为：

$$V_t = \int_{-d_2}^{+\infty}\left[S_t \exp\left[\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma Y\sqrt{T-t}\right]+K_b e^{-r(T-t)}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{Y^2}{2}\right)dY +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_b e^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{Y^2}{2}\right)dY \qquad (2\text{-}13)$$

最终可以得到可转换债券的定价公式为：

$$V_t = S_t N(d_1) + e^{-r(T-t)}K_b\left[1-N(d_2)\right] \qquad (2\text{-}14)$$

其中，N(•)表示累积正态分布函数。

2.2 随机利率条件下的鞅方法

假设利率遵循风险中性概率 Q 下的 Vasicek 过程：

$$a(t)\left[b(t)-r(t)\right]dt + \sigma(t)dW_1(t) \qquad (2\text{-}15)$$

其中 a(t)、b(t)和 σ(t)是某些确定函数，W_1(t)为标准布朗运动，σ(t)为 r(t)的即时标准差，股票价格 S_t 服从风险中性概率 Q 下的随机动态过程：

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t)dt + \sigma_S\left[\rho dW_1(t)+\sqrt{1-\rho^2}\,dW_2(t)\right] \qquad (2\text{-}16)$$

其中，σ_S 表示股价的瞬时标准差。系数 ρ 为股票价格与利率波动率之间的相关系数，有 $\rho \in (0,1)$，

$W_2(t)$ 是与 $W_1(t)$ 相互独立的标准布朗运动，它刻画了股票本身的风险。

由（2.15）式，在时刻 T 到期，到期日可获得偿付 1 美元的的无违约零息票债券的价格 P(t,T)的动态过程给定为在概率 Q 下，对任何时刻 t 满足：

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt - \sigma_P(t,T)dW_1(t) \tag{2-17}$$

其中 $\sigma_P(t,T)$ 是一个确定函数，定义为：

$$\sigma_P(t,T) = \sigma(t)\int_t^T \exp\left(-\int_t^u a(s)ds\right)du \tag{2-18}$$

令 B(t)代表在日期 0 投资一美元，并以流行的利率现值 r(t)连续再投资的组合在 t 时刻的价值，换句话说，资金 B(t)定义了一个随时间变化的资本化因子，它由下式给出：

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right) \tag{2-19}$$

根据 B(t)的定义及市场无套利，任何资产相对于资本化因子 B(t)的价格是一个 Q-鞅，假定可转换债券在到期时刻 T 给出的随机支付为 h(T)，那么它在时刻 t=0 的值 V_0，可用风险中性概率 Q 下的条件期望表示为：

$$V_0 = E^Q\left[\frac{h(T)}{B(T)}\right] \tag{2-20}$$

可以看出去除掉利率恒定的假设后，可转债价格的计算过程变得异常复杂，运用原来的方法无法得出结果，因此有必要引入两种新的方法:币制替换和时间替换。首先我们来看一个定理：

定理 2：给出一个在 $t \in (0,T)$ 上处处为正的过程 $X(t)$，假定 X 是一种没有分红的资产，给出一个概率测度 Q^X，它通过关于 Q 的 Radon-Nikodym 导数来定义：

$$\frac{dQ^X}{dQ} = \frac{X(T)}{X(0)} \cdot \frac{B(0)}{B(T)} \tag{2-21}$$

并使得任何资产相对于币制 X 的价格是一个 Q^X -鞅,则在概率 Q 下的条件期望可变为 Q^X 下的条件期望：

$$E^Q\left[\frac{h(T)}{B(T)}\right] = X(0) \cdot E^{Q^X}\left[\frac{h(T)}{X(T)}\right] \tag{2-22}$$

根据定理 2，我们可以取到期日为 T 的无风险零息债券 P(t,T)作为新币制，新的币制 P(t,T)可以通过它的关于 Q 的 Radon-Nikodym 导数来定义：

$$\frac{dQ^P}{dQ} = \frac{P(T,T)}{P(0,T)} \cdot \frac{B(0)}{B(T)}$$

$$= \frac{1}{P(0,T)} \cdot \frac{1}{B(T)} \qquad (2\text{-}23)$$

由式（2.22）及式（2.23）可得：

$$E^{Q}\left[\frac{h(T)}{B(T)}\right] = P(0,T) \cdot E^{Q^P}\left[h(T)\right] \qquad (2\text{-}24)$$

式（2.23）的含义很清晰，那就是通过变换币制避开了利率的随机性，这一点在直观上很容易理解：无违约零息票债券的价格 P(t,T)本身就包含了利率的随机特征。因此我们可以将可转换债券（r_b,K,T,I）在 t=0 时刻的价值V_0表示为：

$$\begin{aligned} V_0 &= P(0,T) \cdot E^{Q^P}\left[h(T)\right] \\ &= P(0,T) \cdot E^{Q^P}\left[(S_T - K_b)^+ + K_b\right] \\ &= P(0.T) \cdot K_b + P(0,T) \cdot E^{Q^P}\left[(S_T - K_b) \cdot 1_{\frac{S_T}{P(T,T)} \ge K_b}\right] \end{aligned} \qquad (2\text{-}25)$$

其中对于 E 的示性函数1_E是实值随机变量，定义为：

$$1_{E(\varpi)} = 1 \ , \qquad \forall \varpi \in E$$

$$= 0 \ , \qquad \text{其他情形}$$

进一步，式(2.25)还可以进一步的简化，把股价 S 看作是一种新的币制，则它定义了一个新的概率测度Q^S，使得：

$$\frac{dQ^S}{dQ^P} = \frac{S_T}{S_0} \cdot \frac{P(0,T)}{P(T,T)} \qquad (2\text{-}26)$$

则此时式（2.25）可以化为：

$$V_0 = P(0.T) \cdot K_b + S_0 E^{Q^S}\left[1_{\frac{P(T,T)}{S_T} \le K_b}\right] - K_b P(0,T) \cdot E^{Q^P}\left[1_{\frac{S_T}{P(T,T)} \ge K_b}\right] \qquad (2\text{-}27)$$

经过两次币制替换以后，可转债价格与 P(t,T)（或S_t）相比较的相对价格是Q^P-鞅（或Q^S-鞅），因此它能够表示为在 Q^P （或 Q^S ）下基于两个标准布朗运动（$W_1^P(t), w_2^P(t), t \in [0,T]$）（或$W_1^S(t), w_2^S(t), t \in [0,T]$）的随机积分。

然而只通过币制变换还无法得出最后的解，因为分布函数只有在标准布朗运动情形下才能得知，因此要用到另一个概念：那就是时间替换。先给出另一个定理：

定理 3：考虑$M = \{M_t, 0 \le t \prec \infty\}$，这是一个连续 P-鞅，它在 P 下满足条件$\lim_{t\to\infty}\langle M \rangle_t = \infty$，

并且通过下列随机微分方程来定义：

$$dM_t = x_1(t)dW_1(t) + x_2(t)dW_2(t) \quad (2\text{-}28)$$

这里 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是确定的函数。在上述假定下，存在惟一的一维标准布朗运动 W，使得

$$M_t = \sum_{i=1}^{2}\int_0^t x_i(u)dW_i(u) = W_{\langle M\rangle_t} \quad (2\text{-}29)$$

其中，

$$\langle M\rangle_t = \sum_{i=1}^{2}\int_0^t x_i^2(u)du \quad (2\text{-}30)$$

再来看式（2.27）：

$$V_0 = P(0.T)\cdot K_b + A_0 E^{Q^S}\left[1_{\frac{P(T,T)}{S_T}\le K_b}\right] - K_b P(0,T)\cdot E^{Q^P}\left[1_{\frac{S_T}{P(T,T)}\ge K_b}\right] \quad (2\text{-}27)$$

由式（2.16）及（2.17）可知：

$$d\ln S_t - d\ln P(t,T) = (\sigma_S\rho + \sigma_P(t,T))dW_1(t) + \sigma_S\sqrt{1-\rho^2}dW_2(t)$$

（2-31）

$$d\ln P(t,T) - d\ln S_t = -(\sigma_S\rho + \sigma_P(t,T))dW_1(t) - \sigma_S\sqrt{1-\rho^2}dW_2(t)$$

（2-32）

因为 $S_t / P(t,T)$ 和 $P(t,T)/S_t$ 分别是 Q^P -鞅和 Q^S -鞅，由定理 3 可得：

$$\left\langle \ln\frac{S_t}{P(t,T)}\right\rangle_t = \left\langle \ln\frac{P(t,T)}{S_t}\right\rangle_t = \int_0^t\left[\sigma_S^2 + \sigma_P(u,T)^2 + 2\rho\sigma_S\sigma_P(u,T)\right] \mathrm{du}$$

（2-33）

引入如下定义的时间替换 τ：

$$\tau(t) = \int_0^t\left[\sigma_S^2 + \sigma_P(u,T)^2 + 2\rho\sigma_S\sigma_P(u,T)\right]\mathrm{du} \quad (2\text{-}34)$$

且令：

$$\tau^* = \tau(T) = \int_0^T\left[\sigma_S^2 + \sigma_P(u,T)^2 + 2\rho\sigma_S\sigma_P(u,T)\right]\mathrm{du} \quad (2\text{-}35)$$

根据 ITO 引理，存在两个标准一维布朗运动 W^P和W^S，分别在 Q^P 和 Q^S 下，使得：

$$\frac{S_t}{P(t,T)} = \frac{S_0}{P(0,T)}\cdot\exp\left(W^P_{\tau(t)} - \frac{1}{2}\tau(t)\right) \quad (2\text{-}36)$$

$$\frac{P(t,T)}{S_t} = \frac{P(0,T)}{S_0}\cdot\exp\left(W^S_{\tau(t)} - \frac{1}{2}\tau(t)\right) \quad (2\text{-}37)$$

因此，式（2.27）可以表示为：

$$V_0 = P(0.T)\cdot K_b + S_0 E^{Q^S}\left[1_{W^S_{\tau^*}\le \ln\frac{S_0}{K_bP(0,T)}+\frac{\tau^*}{2}}\right] - K_b P(0,T)\cdot E^{Q^P}\left[1_{W^P_{\tau^*}\ge \ln\frac{K_bP(0,T)}{S_0}+\frac{\tau^*}{2}}\right]$$

这一最终表达式可直接计算并得出：

$$V_0 = S_0 N\left(\frac{\ln S_0 / K_b P(0,T) + \tau^*/2}{\sqrt{\tau^*}}\right) - P(0.T)\cdot K_b\left(1 - N\left(\frac{\ln S_0 / K_b P(0,T) - \tau^*/2}{\sqrt{\tau^*}}\right)\right)$$

上式即随机利率条件下的可转换债券定价公式，公式不包含随机利率而代之以无违约零息票债券的价格P(t,T)，可以看出，通过币制替换和时间替换，利率这一风险源被吸收了。

3．结束语

对于可转换债券的定价，正如对美式期权的定价一样，没有一种方法可以做到完全正确、一劳永逸。本文运用币制替换和时间替换的方法，给出了随机利率条件下的一种新的定价模型。它的优点在于有一个确定的解，而不象 PDE 方法那样很难得出一个准确的解析解，但是这种方法的缺陷在于它没有考虑可转换债券的特别条款（如可赎回、回售条款等）以及信用风险对可转债价格的影响，因此它只是一个较简单的模型。

参考文献：

[1] 郑小迎、陈军、陈金贤：可转换定价模型探讨 [J] 系统工程理论与实践，2000.8.

[2] 王敏、梁利、金春红：可转换定价模型的探讨 [J] 辽宁大学学报，2002.2.

[3] 王振全、邓述慧：PRICING OF THE SIMPLE CONVERTIBLE BOND—A MARTINGALE APPROACH [J]经济数学，2000.12.

[4] 《可转换公司债券》[M] 刘立喜.上海财经大学出版社，1999 年 5 月.

[5] 《可转换债券及其绩效评价》[M] 杨如彦等著.中国人民大学出版社,2002 年.

[6] 《期权、期货和特种衍生证券》[M] 埃里克·布里斯 等著；史树中等译.机械工业出版社,2002 年.

[7] 《高级金融理论》[M] 杨云红.武汉大学出版社，2001 年.

[8] 《混合金融工具手册》[M] 埃兹 . 内尔肯著；齐寅峰，黄福广译.机械工业出版社 2002 年.

[9] Hull J C. Options, futures, and other derivatives [M]. Prentice Hall, 华夏出版社 1998 年.

（截稿：2004 年 5 月 责任编辑 胡颖）