

文章编号:1000-6893(2007)03-0574-05

闭孔 Voronoi 泡沫的弹性性能分析

王 嵩, 卢子兴

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

Investigation into Elastic Properties of Closed-Cell Voronoi Foam

WANG Song, LU Zi-xing

(School of Aeronautics Science and Technology, Beijing University of Aeronautics
and Astronautics, Beijing 100083, China)

摘 要: 基于 BCC 点集引入不同程度的随机扰动建立了闭孔泡沫的 Voronoi 随机模型, 并采用有限元方法对其弹性性能进行了分析, 得到了模型的相对弹性模量、泊松比以及表征其分散性的变异系数。讨论了所用模型的尺度效应、随机程度对弹性性能及其分散性的影响。此外, 还讨论了相对密度对弹性性能的影响以及采用板壳单元对模型进行划分所带来的误差。结果表明, 在相对密度小于 0.3 时采用厚度均匀的板壳单元可以对模型做出有效的描述。

关键词: Voronoi 分布; 泡沫; 微结构; 力学性能; 有限元

中图分类号: V258; TB332; O341 **文献标识码:** A

Abstract: On the basis of different random disturbances on the BCC points set, the Voronoi random models for closed-foam are established. The elastic properties of those models are analyzed by finite element method, and the relative elastic modulus, Poisson's ratio and the coefficient of variation which describes their dispersion are obtained. The model size and random level dependence of the elastic properties and their dispersion are discussed. Further more, the influence of relative density on the elastic properties and the error induced by meshing the model with shell elements are also discussed. The results indicate that the model can be sufficiently described by the collection of shells with uniform thickness while the relative density is less than 0.3.

Key words: Voronoi tessellation; foam; microstructure; mechanical property; finite elements method

近年来, 人们发展了多种随机模型来对泡沫材料的微结构进行描述^[1]。其中, Voronoi 随机泡沫模型^[2]因其数学描述与真实泡沫发泡的物理过程相似而受到特别关注, 相关的有限元模拟已有不少论文^[3-10]。

本文通过对规则 14 面体模型引入不同程度的随机扰动来建立闭孔泡沫的 Voronoi 随机模型, 在此基础上对其进行有限元分析来得到其弹性模量和泊松比, 讨论了所用模型的尺度效应、随机程度及密度的影响, 并与已有的理论和经验公式进行了比较。

1 几何模型的建立

文献[9]简单介绍了 Voronoi 分布的数学定义。根据 Voronoi 分布的数学定义可知, Voronoi 分布的几何结构将完全取决于种子点的分布。如果采用完全随机的种子点, 那么将生成高度不规则的泡沫模型; 如果采用规则的种子点, 则将生成空间周期性排列的泡沫模型。

下面给出构造闭孔 Voronoi 泡沫的方法。首先, 设定 BCC 立方体的边长; 然后, 设定有限元分析所需的立方体代表单元的尺寸; 之后, 以代表单元为中心构造一个更大的立方体区域, 该立方体的边长比代表单元的相应边长大 2 倍, 在该区域内构造种子点集。根据种子点集得到 Voronoi 分布之后, 将代表单元从得到的分布中“切割”出来, 这样就得到了闭孔 Voronoi 泡沫的代表单元。可将代表单元边长与 BCC 立方体边长的比值定义为模型尺度, 图 1 给出了 $\alpha=0.5$ 时具有 5 倍模型尺度的闭孔 Voronoi 泡沫的代表单元。

2 有限元模型及边界条件

通过上述方法得到的几何模型是由不规则的多面体排列而成的空间结构。将其用于闭孔泡沫的微结构模拟时, 假定基体材料全部以胞壁的形式存在, 这样就可以用板壳的组合来对其进行描述。为了简化分析过程, 假定所有的胞壁具有相同且均匀的厚度。将几何模型导入 ANSYS 商用

收稿日期:2005-06-25; 修订日期:2006-12-19

基金项目:国家自然科学基金(10572013);NSAF 联合基金
(10276004);国防重点实验室基金(51460020103hk01)

通讯作者:卢子兴 E-mail:luzixing@buaa.edu.cn

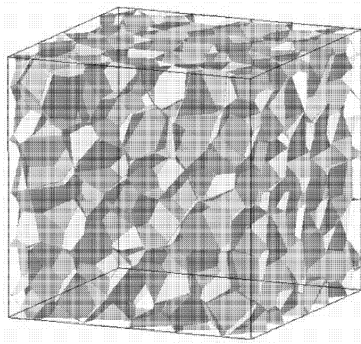


图 1 闭孔泡沫的 Voronoi 随机模型

($\alpha=0.5$, 包含 119 个完整胞体和 332 个边界胞体)

Fig. 1 Voronoi random model for closed-foam ($\alpha=0.5$, including 119 intact cells and 332 boundary cells)

有限元软件, 采用 SHELL63 壳单元对其进行划分, 材料的相对密度则通过定义壳单元的厚度来确定。

边界条件的设置应遵循在模型尺度尽可能小的情况下获得尽可能准确的材料宏观性能的原则。在 Silva 和 Gibson^[4] 针对二维不规则泡沫的强度分析中, 垂直于载荷的两条边上的节点在加载方向的位移分别被设置为 0 和某个固定值, 其面内转动则被约束, 但在其他方向是自由的。Zhu 等人^[7,8] 采用了在代表单元尺度上具有周期性的随机模型对开孔泡沫进行了分析, 他们对模型设置了周期性的边界条件, 模型相对表面上对应的节点在该平面的法线上以同样的位移膨胀或收缩, 在其他方向上则保持一致的位移, 并且在所有方向上具有相同的转角。Roberts 和 Garboczi^[5,6] 对随机模型的分析中则采用了数字图像技术^[11] 来建立实体模型, 在他们的模型中, 空间由规则排列的“像素”构成, 微结构则由不同属性的像素排列组合来实现, 这样就可以采用数字图像网格而不是板和杆的集成对模型进行划分, 由于空间由规则的像素构成, 因此可以对模型施加周期性的边界条件。

由于文中模型在代表单元尺度上不具有周期性, 所以采用了类似于 Silva 和 Gibson^[4] 的边界条件, 如图 2 所示。模型表面节点的转动自由度均被约束, 其表面节点转角为零, 除了对垂直于载荷的两个面施加位移载荷外, 对其余表面上的节点在法线上的位移进行了耦合, 使其在该表面的法线方向上位移一致, 这样保证了模型在变形后仍保持为长方体形状, 并利于提取横向应变用于泊松比计算。

这里, 基体材料的泊松比设置为 0.35, 对模型在 y 方向施加相当于 $\epsilon_y=0.5\%$ 的拉伸位移载荷。弹性分析完成之后, 提取受载端面的节点反力之和 F_y , 也就是模型在位移载荷下所受的外

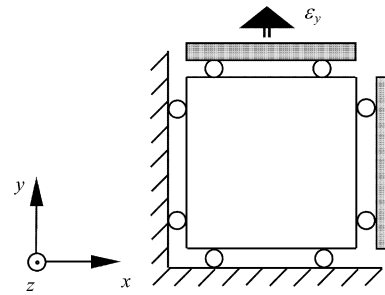


图 2 边界条件及加载方式

Fig. 2 Boundary conditions and loading manner

力, 同时提取模型在 x 和 z 方向的变形, 这样就得到模型在横向的应变 ϵ_x 和 ϵ_z 。

若模型在 3 个方向上的边长为 l_x, l_y, l_z , 那么模型在 y 方向的等效弹性模量则可表示为

$$E_y = \frac{F_y}{l_x l_z \epsilon_y} \quad (1)$$

泊松比则可表示为

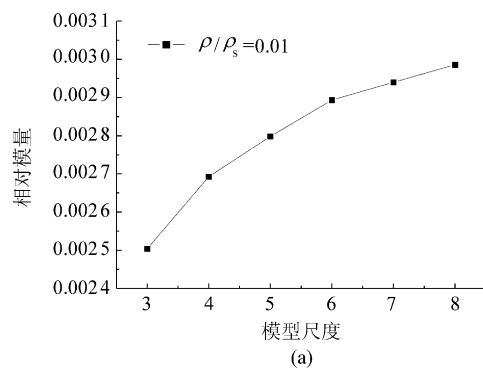
$$\nu_{yx} = -\frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}; \quad \nu_{yz} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_y} \quad (2)$$

3 闭孔随机泡沫模型的弹性性能分析

(1) 尺度效应

为研究闭孔泡沫模型的尺度效应, 这里分别对 3 倍模型尺度到 8 倍模型尺度的模型进行了分析。采用固定的随机系数 $\alpha=0.5$, 在每个尺度下分别建立了 5 个随机模型 (8 倍模型尺度下为 3 个模型), 对每个模型在两种相对密度 ($\rho/\rho_s = 0.01$ 和 0.1) 下的弹性性能进行了分析。最终得到的弹性模量和泊松比取 5 个模型 (8 倍模型尺度下为 3 个) 的平均值, 同时也得到了弹性模量和泊松比的标准偏差。

图 3 给出了两种相对密度下相对弹性模量随模型尺度的变化趋势。结果显示, 相对弹性模量随着模型尺度的增加而逐渐增加, 且在模型尺度较大时增长趋缓。当 $\rho/\rho_s = 0.01$ 时, 8 倍模型尺



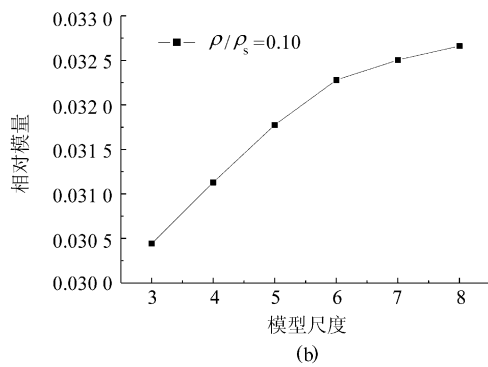


图 3 相对弹性模量随模型尺度的变化趋势

Fig. 3 Variations of relative elastic modulus with model size

度下的弹性模量较 3 倍模型尺度下大 19.6%，较 5 倍模型尺度下大 6.8%；而当 $\rho/\rho_s=0.1$ 时，8 倍模型尺度下的弹性模量较 3 倍模型尺度下大 7.3%，较 5 倍模型尺度下大 2.8%。上述结果表明，模型尺度的影响对低密度材料较为敏感，但超过 5 倍模型尺度的计算结果差异就不太明显了。所以，本文没有进行更大尺度的分析。

图 4 给出了两种相对密度下泊松比随模型尺度的变化趋势。同相对弹性模量的变化趋势类似，泊松比也随着模型尺度的增加而增大，并在较大尺度下增幅有所缓和。图 4 结果显示，在较小的模型尺度下(3 和 4)， ν_{yx} 和 ν_{yz} 的差异比较大；在较大的模型尺度下， ν_{yx} 和 ν_{yz} 则趋于一致。

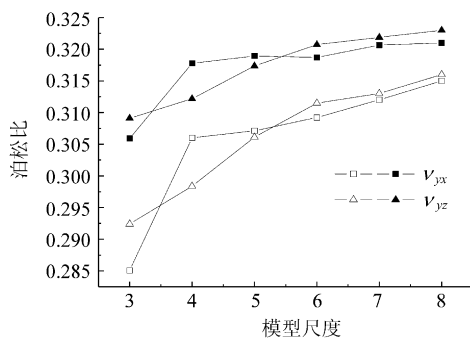
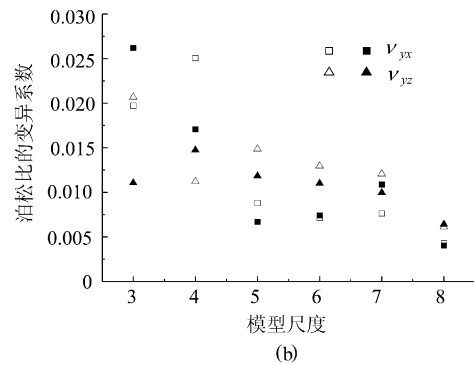
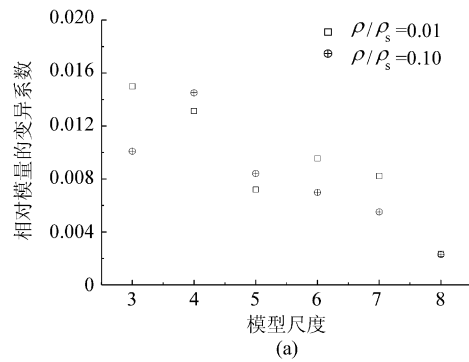
图 4 泊松比随模型尺度的变化趋势(空心点: $\rho/\rho_s=0.01$; 实心点: $\rho/\rho_s=0.10$)Fig. 4 Variations of relative Poisson's ratio with model size (hollow dot: $\rho/\rho_s=0.01$; solid dot: $\rho/\rho_s=0.10$)

图 5 给出了相对弹性模量和泊松比的标准偏差与其平均值的比值，也就是其变异系数随模型尺度的变化趋势。变异系数表征了模型弹性性能的分散性。图 5 的结果显示，在较小的尺度下，模型的弹性性能具有较大的分散性，在 3 倍尺度下，模型含有 12 到 15 个完整胞体，此时相对弹性模量的变异系数接近 1.6%，泊松比的变异系数则接近 2.6%；此外，图 4 的结果显示，在较小的尺度下 ν_{yx} 和 ν_{yz} 的差异比较大，这说明模型在较小

图 5 相对弹性模量和泊松比的变异系数随模型尺度的变化趋势(空心点: $\rho/\rho_s=0.01$; 实心点: $\rho/\rho_s=0.10$)Fig. 5 Varying trends of coefficient of variation for relative elastic modulus and Poisson's ratio with model size (hollow dot: $\rho/\rho_s=0.01$; solid dot: $\rho/\rho_s=0.10$)

尺度下包含的胞体数有限，并不具有统计学意义上的各向同性。随着尺度的增加，模型的弹性性能逐渐趋于稳定，在 8 倍尺度下，相对弹性模量的变异系数低于 0.4%，泊松比的变异系数则低于 0.7%，此时模型含有 633 到 652 个完整的胞体； ν_{yx} 和 ν_{yz} 也趋于一致，表明在较大尺度下从统计学角度可以认为模型是各向同性的。图 5 还显示，对于同样的模型尺度，相对弹性模量的分散性较泊松比的分散性要小一些。

(2) 随机程度和密度对弹性性能的影响

为研究模型的随机程度和密度对其弹性性能的影响，这里对 5 种不同随机系数 ($\alpha=0.2\sim 1.0$) 的模型进行了分析。分析中，采用 5 倍模型尺度(计算量较适中)，在每个随机系数下建立 5 个独立的模型，设定了 12 种相对密度 ($\rho/\rho_s=0.01\sim 0.40$)。得到的弹性模量和泊松比取 5 个模型的平均值。

图 6 给出了不同随机系数下相对弹性模量与相对密度之间的关系。从中可以看出，在较小的相对密度下，由不同随机系数得到的弹性模量比较接近，而在较高相对密度下，弹性模量先随着随机系数的增加而增大，这表明对规则模型引入随机扰动趋向于增加模型的刚度；但在 $\alpha>0.6$ 后，

得到的弹性模量几乎相同。

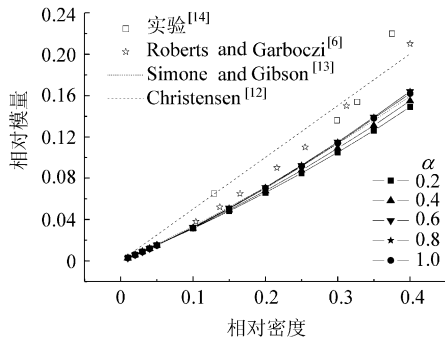


图 6 相对弹性模量与相对密度的关系

Fig. 6 Relations between relative elastic modulus and relative density

图 7 给出了不同随机系数下泊松比与相对密度之间的关系。可见,模型的随机程度对泊松比有比较明显的影响,在同样的相对密度下,泊松比随着随机系数的增加而减小。计算结果还显示,相对密度对泊松比的影响是非单调的;在较低密度下,泊松比随着相对密度增加而增大,在 $\rho/\rho_s = 0.05 \sim 0.10$ 附近可达到最大值,此后,则随着相对密度的增加而减少。

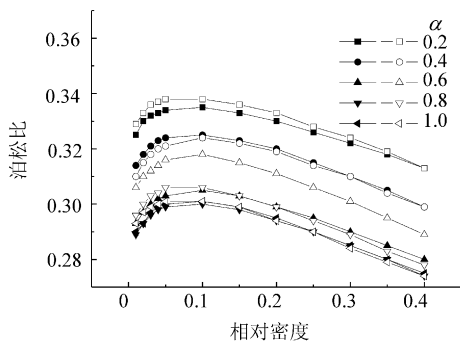


图 7 泊松比与相对密度之间的关系
(空心点: ν_{yx} ; 实心点: ν_{xy})

Fig. 7 Relations between Poisson's ratio and relative density
(hollow dot: ν_{yx} ; solid dot: ν_{xy})

图 8 给出了 2 种相对密度 ($\rho/\rho_s = 0.01$ 和 0.10) 下弹性模量和泊松比的变异系数与随机系数之间的关系。可见,随着模型随机系数的提高,弹性模量和泊松比的分散性也有所提高,但相应的变异系数都限制在 4% 以内;同时也可以看出,弹性模量的分散性略低于泊松比的分散性。

(3) 讨论

对具有随机结构的各向同性闭孔泡沫材料, Christensen^[12] 给出的弹性模量预测公式为

$$\frac{E}{E_s} = \frac{2(7 - 5\nu_s)}{3(1 - \nu_s)(9 + 5\nu_s)} \frac{\rho}{\rho_s} \quad (3)$$

对 14 面体闭孔模型, Simone 和 Gibson^[13]

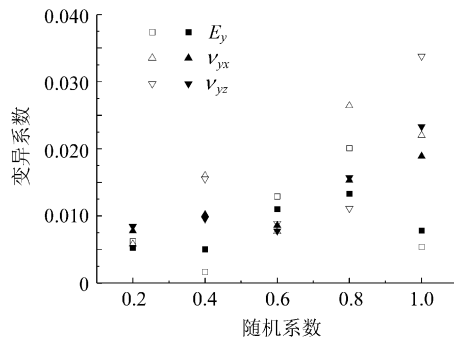


图 8 弹性模量和泊松比的变异系数与随机系数之间的关系
(空心点: $\rho/\rho_s = 0.01$; 实心点: $\rho/\rho_s = 0.10$)

Fig. 8 Relations of coefficient of variation for elastic modulus to Poisson's ratio with random factor (hollow dot: $\rho/\rho_s = 0.01$; solid dot: $\rho/\rho_s = 0.10$)

给出的弹性模量拟合公式为

$$\frac{E}{E_s} \approx 0.315 \left(\frac{\rho}{\rho_s}\right) + 0.209 \left(\frac{\rho}{\rho_s}\right)^2 \quad (0.05 < \rho/\rho_s < 0.20) \quad (4)$$

Roberts 和 Garboczi^[6] 采用数字图像技术建立实体模型,计算拟合的弹性模量公式为

$$\frac{E}{E_s} = 0.563 \left(\frac{\rho}{\rho_s}\right)^{1.19} \quad (0.1 < \rho/\rho_s < 0.3) \quad (5)$$

图 6 给出了本文与式(3)和式(4)以及 Roberts 和 Garboczi 计算结果的比较;图中还给出了聚碳酸酯微孔泡沫的实验结果^[14]。扫描电镜观察表明,该材料在低密度下具有类似于 Voronoi 分布的微结构形态,见图 9。从图 6 可见,本文的计算结果比 Christensen 的结果和实验值偏低。在 $\alpha > 0.6$ 后,本文结果与 Simone 和 Gibson 给出的结果几乎重合;根据计算结果并考虑到模型存在的尺度效应,可以预见在模型尺度足够大的情况下 Voronoi 模型给出的结果要高于规则 14 面体模型的结果。

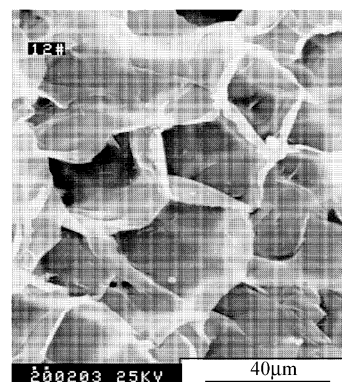


图 9 聚碳酸酯微孔泡沫塑料的胞体形貌^[14]

Fig. 9 Cell morphology of microcellular polycarbonate

若采用幂指数关系对 $\alpha=1.0$ 时的计算结果进行拟合,则可得到弹性模量的公式为

$$\frac{E}{E_s} = 0.475 \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^{1.18} \quad (6)$$

可见式(6)与式(5)的主要区别体现在前面的系数上,这主要反映了模型尺度效应的影响;在 Roberts 和 Garboczi 的模型中,当 $\rho/\rho_s=0.312$ 时,基体材料在支柱中的含量已达到 52%,但式(5)表明,在 $\rho/\rho_s < 0.3$ 时其计算结果与本文并没有本质区别,这说明此时采用厚度均匀的壳单元对模型进行划分并不会带来明显的误差。但在 $\rho/\rho_s > 0.3$ 时,本文的结果明显低于 Roberts 和 Garboczi 的结果,这说明在高密度下,有相当含量的基体材料将以支柱的形态存在,此时采用厚度均匀的壳单元对模型进行划分带来的误差将不可忽略。

4 结 论

通过对 BCC 点集引入不同程度的随机扰动作为种子点,再应用 Voronoi 分布即可得到描述闭孔泡沫内部微结构特征的随机模型。

在较低的随机程度下弹性模量随着模型随机程度的提高而增加,但在较高的随机程度下 ($\alpha > 0.6$) 则逐渐趋于稳定;泊松比则随着模型随机程度的提高呈下降趋势。在 $\rho/\rho_s < 0.3$ 时,采用厚度均匀的板壳单元可以对模型的弹性性能做出有效的描述。模型的弹性模量与密度间呈指数为 1.18 的幂次关系;而泊松比则随密度的增加呈先增后减的非单调变化趋势,并在 $\rho/\rho_s = 0.05 \sim 0.10$ 附近达到最大值。

计算结果还表明,模型的弹性模量和泊松比随着模型尺度的增加而提高,这说明计算所采用的边界条件并没有完全反映闭孔泡沫材料内部单元体的真实状况,因此有必要对边界条件做出进一步的研究改进使其更加贴近实际情况。此外,在较小的模型尺度下,其弹性性能的分散性较为显著,此时模型并不具有统计学意义上的各向同性;随着尺度的增加,模型的弹性性能逐渐趋于稳定,并在宏观上表现出各向同性特征。

参 考 文 献

- [1] 卢子兴,石上路. 低密度开孔泡沫材料力学模型的理论研究进展[J]. 力学与实践, 2005, 27(5): 13-20.
Lu Z X, Shi S L. Development of theoretical investigation into mechanical model of low density foam[J]. Mechanics in Engineering, 2005, 27(5): 13-20. (in Chinese)
- [2] Gibson L J, Ashby M F. Cellular solids: structures & properties[M]. Cambridge University Press, Cambridge,

- 1997.
- [3] Silva M J, Gibson L J. The effects of non-periodic microstructure on the elastic properties of two-dimensional cellular solids[J]. Int J Mech Sci, 1995, 37(11): 1161-1177.
- [4] Silva M J, Gibson L J. The effect of non-periodic microstructure and defects on the compressive strength of two-dimensional cellular solids[J]. Int J Mech Sci, 1997, 39(5): 549-563.
- [5] Garboczi R A P. Elastic properties of model random three-dimensional open-cell solid[J]. J Mech Phys Solids, 2002, 50: 33-55.
- [6] Garboczi R A P. Elastic moduli of model random three-dimensional closed-cell cellular solid[J]. Acta Mater, 2001, 49: 189-197.
- [7] Zhu H X, Hobdell J R, Windle A H. Effect of cell irregularity on the elastic properties of open-cell foams[J]. Acta Mater, 2000, 48: 4893-4900.
- [8] Zhu H X, Windle A H. Effects of cell irregularity on the high strain compression of open-cell foams[J]. Acta Mater, 2002, 50: 1041-1052.
- [9] 袁应龙, 卢子兴. 利用随机模型计算低密度开孔泡沫材料的弹性模量[J]. 航空学报, 2004, 25(2): 130-132.
Yuan Y L, Lu Z X. Calculation of the elastic modulus of low density open-cell foams with random model[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2004, 25(2): 130-132. (in Chinese)
- [10] Li K, Gao X L, Subhash G. Effect of cell shape and cell wall thickness variations on the elastic properties of two-dimensional cellular solids[J]. Int J Solid and Structure, 2005, 42: 1777-1795.
- [11] Garboczi E J. An algorithm for computing the effective linear elastic properties of heterogeneous materials: three-dimensional results for composites with equal phase Poisson ratios[J]. J Mech Phys Solids, 1995, 43(9): 1349-1362.
- [12] Christensen R M. Mechanics of low density materials[J]. J Mech Phys Solids, 1986, 34(6): 563-578.
- [13] Simone A E, Gibson L J. Effects of solid distribution on the stiffness and strength of metallic foams[J]. Acta Mater, 1998, 46(6): 2139-2150.
- [14] 卢子兴, 张慧. 聚碳酸酯微孔泡沫塑料的拉伸力学性能及失效机理分析[J]. 中国塑料, 2003, 17(1): 39-43.
Lu Z X, Zhang H. Tensile mechanical properties and failure mechanism of microcellular polycarbonate[J]. China Plastics, 2003, 17(1): 39-43. (in Chinese)

作者简介:



王 嵩(1981—) 男,硕士研究生。主要研究方向:飞机结构设计。

卢子兴(1960—) 男,教授、博士生导师。主要研究方向:轻质结构材料和复合材料力学行为。
E-mail: luzixing@buaa.edu.cn
Tel: 010-82317507

(责任编辑:李铁柏)