第三章　方案飞行与方案弹道

目的要求：

1、掌握方案飞行特点；

2、能够针对任务要求设计出准确的飞行方案；

3、掌握方案飞行运动模型的建立方法。

重点、难点：

如何准确地设计出满足任务指标要求且工程实现可行的飞行方案。

教学方法：

1、结合具体应用实例，给出飞行方案的设计原则、思想和方法，达到举一而及三的目的；

2、针对给定的工程实际案例，每个学生用自己所学的本章知识，独立设计出满足要求的飞行方案；

3、组织专题讨论（选出部分较好的设计方案），评出最佳设计方案。

教学时数：

课堂教学：6 学时；

专题讨论：4 学时。

导弹的弹道可以分为两大类：方案弹道和导引弹道。本章介绍导弹的方案飞行弹道。

所谓飞行方案，是指设计弹道时所选定的某些运动参数随时间的变化规律。

当飞行方案选定以后，导弹的飞行弹道也就随之确定。

导弹按预定的飞行方案所作的飞行称为方案飞行。它所对应的飞行弹道称为方案弹道。

§3-1　铅垂平面内的方案飞行

飞航式导弹、空－地导弹和弹道式导弹的方案飞行段，基本上是在铅垂平面内。本节讨论导弹在铅垂平面内的方案飞行。

一、　导弹运动基本方程

设地面坐标系的 Ax 轴选取在飞行平面（铅垂平面）内，则导弹质心的坐标 z 和弹道偏角 ψ_V 恒等于零。假定导弹的纵向对称面 ox_1y_1 始终与飞行平面重合，则速度倾斜角 γ_V 和侧滑角 β 也等于零，这样，导弹在铅垂平面内的质心运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{dV}{dt}=P\cos\alpha-X-mg\sin\theta\\
&mV\frac{d\theta}{dt}=P\sin\alpha+Y-mg\cos\theta\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\theta\\
&\frac{dy}{dt}=V\sin\theta\\
&\frac{dm}{dt}=-m_s\\
&\varepsilon_1=0\\
&\varepsilon_4=0
\end{aligned}\right\}\qquad(3-1)$$

在导弹气动外形给定的情况下，平衡状态的阻力 X、升力 Y 取决于V、α、y，因此，上述这方程组中共含有 7 个未知数：V、θ、α、x、y、m、P。

导弹在铅垂平面内的方案飞行取决于：① 飞行速度的方向，其理想控制关系式为$\varepsilon_1=0$；② 发动机的工作状态，其理想控制关系式为$\varepsilon_4=0$。

飞行速度的方向或者直接用弹道倾角$\theta_*(t)$来给出，或者间接地用俯仰角$\vartheta_*(t)$、攻角$\alpha_*(t)$、法向过载$n_{y_2*}(t)$、高度变化率$\dot{H}_*(t)$给出。

二、 几种典型飞行方案

理论上，可采取的飞行方案有：弹道倾角$\theta_*(t)$、俯仰角$\vartheta_*(t)$、攻角$\alpha_*(t)$、法向过载$n_{y_2*}(t)$、高度$H_*(t)$。下面分别给出各种飞行方案的理想操纵关系式。

(一) 给定弹道倾角

如果给出弹道倾角的飞行方案$\theta_*(t)$，则理想控制关系式为

$$\varepsilon_1=\theta-\theta_*(t)=0\quad（即\theta=\theta_*(t)）$$

或

$$\varepsilon_1=\dot{\theta}-\dot{\theta}_*(t)=0\quad（即\dot{\theta}=\dot{\theta}_*(t)）$$

式中　$\theta_*(t)$ ——导弹飞行的弹道倾角。

描述按给定弹道倾角的方案飞行的运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=\frac{P\cos\alpha-X}{m}-g\sin\theta\\
&\alpha=\frac{1}{n_{y_3b}^{\alpha}}\left[\frac{V}{g}\frac{d\theta}{dt}+\cos\theta-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}\right]\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\theta\\
&\frac{dy}{dt}=V\sin\theta\\
&\theta=\theta_*\left(t\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(3-5)$$

联立上述方程组的第一、二、四、五方程，进行数值积分，就可以解得其中的未知数V、α、y、θ。然后再积分第三式，就可以解出$x(t)$，从而得到按给定弹道倾角飞行的方案弹

道。

如果$\theta_*(t)=C$ (常数)，则方案飞行弹道为直线。如果$\theta_*(t)=0$，则方案飞行弹道为水平直线（等高飞行）。如果$\theta_*(t)=\pi/2$，则导弹作垂直上升飞行。

(二) 给定俯仰角

如果给出俯仰角的飞行方案$\vartheta_*(t)$，则理想控制关系式为

$$\varepsilon_1=\vartheta-\vartheta_*(t)=0$$

即

$$\vartheta=\vartheta_*(t)$$

式中　ϑ ——导弹飞行过程中的俯仰角。

在进行弹道计算时，还需引入角度关系式：

$$\alpha=\vartheta-\theta$$

于是，描述按给定俯仰角的方案飞行的运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=\frac{P\cos\alpha-X}{m}-g\sin\theta\\
&\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{mV}\left(P\sin\alpha+Y-G\cos\theta\right)\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\theta\\
&\frac{dy}{dt}=V\sin\theta\\
&\alpha=\vartheta-\theta\\
&\vartheta=\vartheta_*(t)
\end{aligned}\right\}\qquad(3-6)$$

此方程组包含 6 个未知参量；V、θ、α、x、y和ϑ。解算这组方程就能得到这些参量随时间的变化规律，同时也就得到了按给定俯仰角的方案弹道。

这种飞行方案控制系统最容易实现。利用三自由度陀螺测量，或者通过捷联惯导系统测量、解算得到导弹实际飞行时的俯仰角，与飞行方案$\vartheta_*(t)$比较，形成角偏差信号，经放大送至舵机。升降舵的偏转规律直接如下：

$$\delta_z=K_\vartheta\left(\vartheta-\vartheta_*\right)$$

式中　ϑ ——导弹的实际俯仰角；K_ϑ ——放大系数。

(三) 给定攻角

给定攻角的飞行方案，是为了使导弹爬升得最快，即希望飞行所需的攻角始终等于允许的最大值；或者是为了防止需用过载超过可用过载而对攻角加以限制；若导弹采用冲压发动机，为了保证发动机能正常工作，也必须将攻角限制在一定范围内。

如果给出了攻角的飞行方案$\alpha_*(t)$，则理想控制关系式为

$$\varepsilon_1=\alpha-\alpha_*(t)=0$$

即

$$\alpha=\alpha_*(t)$$

式中　α ——导弹飞行的攻角。

由于目前测量导弹实际攻角的传感器的精度比较低，所以一般不直接采用控制导弹攻角参量，而是将$\alpha_*(t)$折算成俯仰角$\vartheta_*(t)$，通过对俯仰角的控制来实现对攻角的控制。

(四) 给定法向过载

给定法向过载的飞行方案，往往是为了保证导弹不会出现结构破坏。此时，理想控制关系式为

$$\varepsilon_1 = n_{y_2} - n_{y_2*}(t) = 0$$

即

$$n_{y_2} = n_{y_2*}(t)$$

式中　n_{y2} ——导弹飞行的法向过载。

在平衡状态下，由式(3－2)得

$$\alpha = \frac{n_{y_2} - \left(n_{y_2b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_2b}^{\alpha}}$$

按给定法向过载的方案飞行可以用下列方程组来描述

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt} = \frac{P\cos\alpha - X}{m} - g\sin\theta \\
&\frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{V}\left(n_{y_2} - \cos\theta\right) \\
&\frac{dx}{dt} = V\cos\theta \\
&\frac{dy}{dt} = V\sin\theta \\
&\alpha = \frac{n_{y_2} - \left(n_{y_2b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_2b}^{\alpha}} \\
&n_{y_2} = n_{y_2*}(t)
\end{aligned}\right\} \tag{3－7}$$

这组方程包含未知参量V、θ、α、x、y及n_{y_2}。解算这组方程，就能得到这些参量随时间的变化量，并可得到按给定法向过载飞行的方案弹道。

由(3－7)式可见，按给定法向过载的方案飞行实际上是通过相应的α来实现的。

(五) 给定高度

如果给出导弹高度的飞行方案$H_*(t)$，则理想控制关系式为

$$\varepsilon_1 = H - H_*(t) = 0$$

即

$$H = H_*(t)$$

式中　H ——导弹的飞行高度。

上式对时间求导，可以得到关系式

$$\frac{dH}{dt}=\frac{dH_*(t)}{dt} \tag{3-8}$$

式中 $dH_*(t)/dt$ ——给定的导弹飞行高度变化率。

对于近程战术导弹，在不考虑地球曲率时，存在关系式

$$\frac{dH}{dt}=\frac{dy}{dt}=V\sin\theta \tag{3-9}$$

由式(3－8)和(3－9)解得

$$\theta=\arcsin\left(\frac{1}{V}\frac{dH_*(t)}{dt}\right) \tag{3-10}$$

参照给定弹道倾角方案飞行的运动方程组，可知，描述给定高度的方案飞行的运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=\frac{P\cos\alpha-X}{m}-g\sin\theta\\
&\alpha=\frac{1}{n_{y_3b}^{\alpha}}\left[\frac{V}{g}\frac{d\theta}{dt}+\cos\theta-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}\right]\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\theta\\
&\frac{dy}{dt}=\frac{dH_*(t)}{dt}\\
&\theta=\sin^{-1}\left(\frac{1}{V}\frac{dH_*(t)}{dt}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3-11}$$

联立上述方程组，就可以求出其中的未知数V、α、x、y、θ，从而得到按给定高度飞行的方案弹道。

三、 直线弹道问题

直线飞行的情况是常见的，以飞航式导弹在爬升段的飞行为例，讨论两种其它形式的直线弹道问题。

1. 直线爬升时的飞行方案 $\vartheta_*(t)$

导弹作直线爬升飞行时，弹道倾角应为常值，即 $d\theta_*(t)/dt=0$，将其代入方程组(3－1)的第二式可以得到

$$P\sin\alpha+Y=G\cos\theta \tag{3-12}$$

上式表明：直线爬升时，作用在导弹上的法向力必须和重力的法向分量平衡。在飞行攻角不大的情况下，攻角可表示成

$$\alpha=\frac{G\cos\theta}{P+Y^{\alpha}} \tag{3-13}$$

这样直线爬升时的俯仰角飞行方案为

$$\vartheta_*(t)=\theta+\frac{G\cos\theta}{P+Y^{\alpha}} \tag{3-14}$$

显然，如果能按上式给定俯仰角的飞行方案，导弹就会直线爬升。

2. 等速直线爬升

若要求导弹作等速直线爬升飞行，必须使$\dot{V}=0$，$\dot{\theta}=0$，代入方程组(3－1)的第一、二式可得

$$\left.\begin{aligned} P\cos\alpha - X &= G\sin\theta \\ P\sin\alpha + Y &= G\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{3－15}$$

上式表明：导弹要实现等速直线飞行，发动机推力在弹道切线方向上的分量与阻力之差必须等于重力在弹道切线方向上的分量；同时，作用在导弹上的法向力应等于重力在法线方向上的分量。下面就来讨论同时满足这两个条件的可能性。

等速爬升的条件：根据(3－15)第一式，导弹等速爬升时的需用攻角为

$$\alpha_1 = \cos^{-1}\left(\frac{X+G\sin\theta}{P}\right) \tag{3－16}$$

直线爬升的条件：根据(3－15)第二式，在飞行攻角不大的情况下，导弹直线爬升时的需用攻角为

$$\alpha_2 = \frac{G\cos\theta}{P+Y^{\alpha}} \tag{3－17}$$

为使导弹等速直线爬升，必须同时满足方程组式(3－16)和(3－17)，因此，导弹等速直线爬升的条件应是$\alpha_1=\alpha_2$，即

$$\cos^{-1}\left(\frac{X+G\sin\theta}{P}\right) = \frac{G\cos\theta}{P+Y^{\alpha}} \tag{3－18}$$

且$\theta=C$(常数)。

实际上，上述条件是很难满足的，因为通过精心设计或许能找到一组参数(V、θ、P、G、C_x、C_y^{α}等)满足(3－18)式，可是在飞行过程中，导弹不可避免地受到各种干扰，一旦某一参数偏离了它的设计值，导弹就不可能真正实现等速直线爬升飞行。特别是在发动机不能自动调节的情况下，要使导弹时刻都严格地按等速直线爬升飞行是不可能的。即使发动机推力可以自动调节，要实现等速直线爬升飞行也只能是近似的。

四、 等高飞行的实现问题

飞航式导弹的平飞段(巡航段)，空地导弹、巡航导弹的巡航段，导弹都要求等高飞行。从理论上讲，实现等高飞行有两种飞行方案：$\theta\equiv 0$或H=常值。等高飞行应满足

$$P\sin\alpha + Y = mg$$

据此求出

$$\alpha = \frac{mg}{P+Y^{\alpha}}$$

再由平衡条件，可求得保持等高飞行所需要的升降舵偏转角为

$$\delta_z = -\frac{m_{z0} + \dfrac{mg\cdot m_z^{\alpha}}{P+Y^{\alpha}}}{m_z^{\delta_z}} \tag{3－19}$$

由于在等高飞行过程中，导弹的重量和速度(影响Y^{α})都在变化，因此，升降舵的偏转角δ_z也是变化的。

§3-2　水平面内的方案飞行

一、　水平面内飞行的方程组

当攻角和侧滑角较小时，导弹在水平面内的质心运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{dV}{dt}=P-X\\
&\left(P\alpha+Y\right)\cos\gamma_V-\left(-P\beta+Z\right)\sin\gamma_V-G=0\\
&-mV\frac{d\psi_V}{dt}=\left(P\alpha+Y\right)\sin\gamma_V+\left(-P\alpha+Z\right)\cos\gamma_V\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\psi_V\\
&\frac{dz}{dt}=-V\sin\psi_V\\
&\frac{dm}{dt}=-m_s\\
&\varepsilon_2=0\\
&\varepsilon_3=0\\
&\varepsilon_4=0
\end{aligned}\right\}\qquad(3-23)$$

在这方程组中含有 9 个未知数：V、ψ_V、α、β、γ_V、x、z、m、P。

由方程组(3－23)中的第二式可以看出：水平飞行时，导弹的重量被空气动力和推力在沿铅垂方向上的分量所平衡。该式可改写为

$$n_{y_3}\cos\gamma_V-n_{z_3}\sin\gamma_V=1$$

攻角可以用平衡状态下的法向过载来表示，即

$$\alpha=\frac{n_{y_3}-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}}$$

在无倾斜飞行时，$\gamma_V=0$，则 $n_{y_2}=n_{y_3}=1$，于是

$$\alpha=\frac{1-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}}\qquad(3-24)$$

在无侧滑飞行时，$\beta=0$，则 $n_{y_3}=0$，于是

$$n_{y_3}=1/\cos\gamma_V$$

$$\alpha=\frac{1/\cos\gamma_V-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}}\qquad(3-25)$$

比较式(3－24)和(3－25)可知：在具有相同动压头时，作倾斜的水平曲线飞行所需攻角比侧滑飞行时要大些。这是因为倾斜飞行时，需使升力和推力的铅垂分量$\left(P\alpha+Y\right)\cos\gamma_V$与重力相平衡。同时还可看出，在作倾斜的水平机动飞行时，因受导弹临界攻角和可用法向过载的限制，速度倾斜角γ_V不能太大。

二、　无倾斜的机动飞行

假设导弹在水平面内作侧滑而无倾斜的曲线飞行，导弹质心运动方程组由方程组(3－23)

改写得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=\frac{P-X}{m}\\
&\alpha=\frac{1-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}}\\
&\frac{d\psi_V}{dt}=\frac{1}{mV}\left(P\beta-Z\right)\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\psi_V\\
&\frac{dz}{dt}=-V\sin\psi_V\\
&\psi=\psi_V+\beta\\
&\varepsilon_2=0
\end{aligned}\right\}\qquad(3-26)$$

此方程组含有 7 个未知参量：V、ψ_V、α、β、x、z 和 ψ。

上述方程组中描述飞行速度方向的理想控制关系方程 $\varepsilon_2=0$ 可以用下列不同的参量表示：弹道偏角 ψ_V 或弹道偏角的变化率 $\dot{\psi}_V$、侧滑角 β 或偏航角 ψ、法向过载 n_{z_2}，现在分别讨论以上三种方案飞行。

(一) 给定弹道偏角的方案飞行

如果给出弹道偏角的变化规律 $\psi_{V*}(t)$，则理想控制关系式为

$$\varepsilon_2=\psi_V-\psi_{V*}\left(t\right)=0$$

或

$$\varepsilon_2=\dot{\psi}_V-\dot{\psi}_{V*}\left(t\right)=0$$

描述按给定弹道偏角的方案飞行的运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=\frac{P-X}{m}\\
&\alpha=\frac{1-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}}\\
&\beta=-\frac{V}{g}\frac{\dfrac{d\psi_V}{dt}}{n_{z_3b}^{\beta}}\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\psi_V\\
&\frac{dz}{dt}=-V\sin\psi_V\\
&\psi_V=\psi_{V*}(t)
\end{aligned}\right\}\qquad(3-27)$$

式中 $n_{z_3b}^{\beta}=\dfrac{1}{mg}\left(-P+Z^{\beta}-\left(m_y^{\beta}/m_y^{\delta_y}\right)Z^{\delta_y}\right)$，可参照式(3－3)进行推导得到。

方程组(3－27)含有 6 个未知参量: V、α、β、ψ_V、x 和 z。解算这组方程，就能得

这些参量随时间的变化，并由 $x(t)$ 、 $z(t)$ 画出按给定弹道偏角飞行的方案弹道。

(二) 给定侧滑角或偏航角的方案飞行

如果给出侧滑角的变化规律 $\beta_*(t)$ ，则控制系统的理想控制关系式为

$$\varepsilon_2 = \beta - \beta_*(t) = 0$$

描述按给定侧滑角的方案飞行的运动方程组可写成

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt} = \frac{P-X}{m} \\
&\alpha = \frac{1-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}} \\
&\frac{d\psi_V}{dt} = \frac{1}{mV}\left(P\beta - Z\right) \\
&\frac{dx}{dt} = V\cos\psi_V \\
&\frac{dz}{dt} = -V\sin\psi_V \\
&\beta_V = \beta_{V*}(t)
\end{aligned}\right\} \qquad (3-28)$$

如果给出偏航角的变化规律 $\psi_*(t)$ ，则控制系统的理想控制关系式为

$$\varepsilon_2 = \psi_V - \psi_*(t) = 0$$

描述按给定偏航角的方案飞行的运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt} = \frac{P-X}{m} \\
&\alpha = \frac{1-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}} \\
&\frac{d\psi_V}{dt} = \frac{1}{mV}\left(P\beta - Z\right) \\
&\frac{dx}{dt} = V\cos\psi_V \\
&\frac{dz}{dt} = -V\sin\psi_V \\
&\beta = \psi - \psi_V
\end{aligned}\right\} \qquad (3-29)$$

(三) 给定法向过载的方案飞行

如果给出法向过载的变化规律 $n_{z_2*}(t)$ ，则控制系统的理想控制关系式为

$$\varepsilon_2 = n_{z_2} - n_{z_2*}(t) = 0$$

描述按给定法向过载的方案飞行的运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=\frac{P-X}{m}\\
&\alpha=\frac{1-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}}\\
&\frac{d\psi_V}{dt}=-\frac{g}{V}n_{z_2}\\
&\beta=\frac{n_{z_2}}{n_{z_3b}^{\beta}}\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\psi_V\\
&\frac{dz}{dt}=-V\sin\psi_V\\
&n_{z_2}=n_{z_2*}(t)
\end{aligned}\right\}\qquad(3-30)$$

三、 无侧滑的机动飞行

导弹在水平面内作倾斜而无侧滑的机动飞行时，导弹质心的运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=\frac{P-X}{m}\\
&\left(P\alpha+Y\right)\cos\gamma_V-G=0\\
&\frac{d\psi_V}{dt}=-\frac{1}{mV}\left(P\alpha+Y\right)\sin\gamma_V\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\psi_V\\
&\frac{dz}{dt}=-V\sin\psi_V\\
&\varepsilon_3=0
\end{aligned}\right\}\qquad(3-31)$$

在该方程组中含有 6 个未知参量：V 、 α 、 γ_V 、 ψ_V 、 x 和 z 。

上述方程组中描述飞行速度方向的理想控制关系方程 $\varepsilon_3=0$ 可以由下列两组参量表示：速度倾斜角 γ_V ，或法向过载 n_{y3}，或者攻角 α ；弹道偏角 ψ_V ，或者弹道偏角的变化率 $\dot{\psi}_V$ ，或者弹道曲率半径 ρ 。

(一) 给定速度倾斜角的方案飞行

如果给出速度倾斜角的变化规律 $\gamma_{V*}(t)$ ，则控制系统的理想控制关系方程为

$$\varepsilon_3=\gamma_V-\gamma_{V*}\left(t\right)=0$$

由(4—28)方程组改写得到描述按给定速度倾斜角的方案飞行的运动方程组：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=\frac{P-X}{m}\\
&\alpha=\frac{\dfrac{1}{\cos\gamma_V}-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}}\\
&\frac{d\psi_V}{dt}=-\frac{g}{V}\sin\gamma_V\left[n_{y_3b}^{\alpha}\alpha+\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}\right]\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\psi_V\\
&\frac{dz}{dt}=-V\sin\psi_V\\
&\gamma_V=\gamma_{V*}(t)
\end{aligned}\right\}\tag{3-32}$$

(二) 给定法向过载 n_{y_3} 的方案飞行

如果给定法向过载的变化规律 $n_{y_3*}(t)$，则控制系统的理想控制关系方程为

$$\varepsilon_3=n_{y_3}-n_{y_3*}\left(t\right)=0$$

在水平面内作无侧滑飞行时，法向过载 n_{y_3} 与速度倾斜角 γ_V 之间的关系为

$$n_{y_3}=\frac{1}{\cos\gamma_V}$$

那么，改写方程组(3－31)就可得到按给定法向过载的方案飞行的运动方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=\frac{P-X}{m}\\
&\alpha=\frac{n_{y_3}-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}}\\
&\frac{d\psi_V}{dt}=-\frac{g}{V}n_{y_3}\sin\gamma_V\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\psi_V\\
&\frac{dz}{dt}=-V\sin\psi_V\\
&n_{y_3}=n_{y_3*}(t)
\end{aligned}\right\}\tag{3-33}$$

(三) 给定弹道偏角的方案飞行

如果给定弹道偏角的变化规律 $\psi_{V*}(t)$，求一次导数得到 $\dot{\psi}_{V*}(t)$，则相应的控制系统的理想控制关系方程为

$$\varepsilon_3=\psi_V-\psi_{V*}\left(t\right)=0$$

改写方程组(3－32)，得到描述按给定弹道偏角的方案飞行的运动方程组：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=\frac{P-X}{m}\\
&\alpha=\frac{\dfrac{1}{\cos\gamma_V}-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}}\\
&tg\gamma_V=-\frac{V}{g}\sin\gamma_V\frac{d\psi_V}{dt}\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\psi_V\\
&\frac{dz}{dt}=-V\sin\psi_V\\
&\psi_V=\psi_{V*}(t)
\end{aligned}\right\}\qquad(3-34)$$

(四) 按给定弹道曲率半径的方案飞行

若给定水平面内转弯飞行的曲率半径 $\rho_*(t)$，则控制系统的理想控制关系方程为

$$\varepsilon_3=\rho-\rho_*\left(t\right)=0$$

水平面内曲线飞行时，曲率半径与弹道切线的转动角速度 $\dot{\psi}_V$ 之间的关系为

$$\rho=\frac{V}{\dfrac{d\psi_V}{dt}}$$

改写方程组（3－34），得到描述按给定弹道曲率半径的方案飞行的运动方程组：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=\frac{P-X}{m}\\
&\alpha=\frac{\dfrac{1}{\cos\gamma_V}-\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}}\\
&tg\gamma_V=-\frac{V}{g}\frac{d\psi_V}{dt}\\
&\frac{d\psi_V}{dt}=\frac{V}{\rho}\\
&\frac{dx}{dt}=V\cos\psi_V\\
&\frac{dz}{dt}=-V\sin\psi_V\\
&\rho=\rho_*(t)
\end{aligned}\right\}\qquad(3-35)$$

§3-3 方案飞行应用实例

一、 地空导弹的垂直上升段

某些地－空导弹(如美国的“波马克 B 型”)和远程弹道式导弹均采用垂直发射方式，其

初始段弹道是一条直线，且弹道倾角$\theta=\pi/2$。

将$\theta=\pi/2$，$d\theta/dt=0$代入式(3－5)，得到描述垂直上升方案飞行的运动方程组：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\frac{P\cos\alpha-X}{m}-g\\ \alpha&=-\frac{\left(n_{y_3b}\right)_{\alpha=0}}{n_{y_3b}^{\alpha}}\\ \frac{dy}{dt}&=V\end{aligned}\right\}\tag{3－36}$$

由上述方程组的第二式可以得到

$$n_{y_2b}=n_{y_3b}=n_{y_3b}^{\alpha}\alpha+(n_{y_3b})_{\alpha=0}=0$$

上式表明：平衡时的法向过载为零。这就是说，在垂直上升飞行时应该没有法向力。

对于气动轴对称导弹，因$(n_{y_3b})_{\alpha=0}=0$，故它在作垂直上升飞行时，攻角应为零。

由于利用弹上设备直接测量弹道倾角比较困难，所以方案飞行通常也不直接采用控制导弹的弹道倾角，而是采用给定俯仰角的飞行方案，即利用关系$\vartheta=\theta+\alpha$(α一般为0)，将飞行方案$\theta_*(t)$转化成方案$\vartheta_*(t)$。

二、 中远程空地导弹的下滑段

空地导弹是由轰炸机、战斗攻击机、攻击机和武装直升机携载，从空中发射，用于攻击地面目标的一种导弹。它分为战略型和战术型两种。

空地导弹由下滑段转入平飞段时，为了使导弹稳定的转入平飞，消除高度冲出量，在下滑段加入方案控制，使导弹的飞行高度按某一规律变化。下滑段可以采用抛物线变化规律，如：

$$H_*=\begin{cases}a(t-t_\tau)^2+H_p & t_H\le t<t_H+t_\tau\\ H_p & t\ge t_H+t_\tau\end{cases}\tag{3－37}$$

式中 H_*——方案飞行高度；

H_p——导弹的平飞高度；

t_H——高度指令发出时间；

t_τ——下滑段至转平段的时间；

a——由 t=0 时刻的状态解算，计算公式如下：

$$a=\left(H_{t=t_H}-H_p\right)\Big/t_e^2$$

式中 $H_{t=t_H}$ ——$t=t_H$时刻导弹的飞行高度。

另外，也可以采用指数形式的高度程序，其具体表达式为

$$H_*(t)=\begin{cases}H_1 & t<t_1\\ \left(H_1-H_p\right)e^{-k(t-t_1)}+H_p & t_1\le t<t_2\\ H_p & t\ge t_2\end{cases}\tag{3－38}$$

式中 H_1 ——下滑段起始点高度；

H_p——导弹的平飞高度；

t_1、t_2——给定的指令时间；

k ——给定的控制常数。

H_1、H_p 根据导弹技术战术指标要求确定，t_1、t_2、k 的确定应综合考虑以下因素：满足最小射程的要求；下滑过程中高度超调量要小；转入平飞的时间最短；飞行过载小于导弹结构允许值；导弹姿态运动不影响发动机的正常工作等。

三、 巡航导弹的爬升段

某型巡航导弹从地面发射，按给定的俯仰角方案爬升，然后转入平飞。爬升段俯仰角方案如下：

$$\vartheta_*(t)=\begin{cases}\vartheta_0 & 0\le t<t_1\\ \vartheta_0-\dot{\vartheta}\times\left(t-t_1\right) & t_1\le t<t_2\\ \vartheta_1 & t_2\le t<t_3\\ \vartheta_1-k_t\left(H-H_p\right)e^{-\frac{\left|H-H_p\right|}{\Delta H_m}} & t\ge t_3\end{cases}\tag{3-39}$$

式中 ϑ_0 ——助推段俯仰角，如取 $\vartheta_0=30^\circ$；

t_1 ——助推器分离时间；

$\dot{\vartheta}$ ——过渡段俯仰角变化率；

t_2 ——过渡段结束时间；

ϑ_1 ——转平前俯仰角；

t_3 ——转平段开始时间，从 $\left(H-H_p\right)\le\Delta H_m$ 起计；

k_t ——转平段系数；

H ——导弹飞行高度；

H_p ——平飞高度；

ΔH_m ——最大高度差。

四、 飞航导弹的平飞段

对于从地面或舰上发射的飞航式导弹，在加速爬升段（助推段），速度变化大，纵向运动参数变化剧烈，侧向运动则一般不实行控制。只在主发动机工作飞行段，才对侧向运动实施控制。由于助推段侧向运动无控制，各种干扰因素的作用势必会造成导弹飞行的姿态和位置偏差。如果主发动机一开始工作就把较大的偏差作为控制量加入，很可能会造成侧向运动的振荡，严重时甚至会发散。为避免这种情况的发生，可采用下述偏航角程序信号

$$\psi_*(t)=\begin{cases}\psi_1 & t<t_1\\ \psi_1e^{-k\left(t-t_1\right)} & t_1\le t<t_2\\ 0 & t\ge t_2\end{cases}\tag{3-40}$$

式中 ψ_1 ——助推器分离时刻的偏航角；

t_1 ——助推器分离时刻；

t_2 ——给定的指令时间；

k ——给定的控制常数。

上式表明：助推段终点的偏航角偏差不是陡然直接加入，而是按指数形式引入的，从而避免了因起控不当造成失控的现象发生。相应的方向舵偏转控制规律为

$$\delta_y=K_{\Delta\psi}\left(\psi-\psi_*\right)+K_{\Delta\dot{\psi}}\Delta\dot{\psi}\tag{3-41}$$

式中 $\Delta\psi = \psi - \psi_*$， $\Delta\dot{\psi} = d\Delta\psi / dt$ 。