第42卷第12期　　原 子 能 科 学 技 术　　Vol. 42, No. 12
2008年12月　　Atomic Energy Science and Technology　　Dec. 2008

中子输运的随机理论

秦承森
（北京应用物理与计算数学研究所，北京　100088）

摘要：运用概率理论，考虑 t 时刻 n 个相空间点（$\boldsymbol{r}, u_i\boldsymbol{\Omega}_i$）单位体元中分别出现 N_i（$i=1, 2, \cdots, n$）个中子的概率 $P_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{r}, t, u\boldsymbol{\Omega})$，提出一个新的中子输运的随机理论，导出概率母函数 F_n 的非线性积分微分方程组。在某些近似下，$n=1$ 概率分布一阶矩方程恰好是中子平均数玻尔兹曼方程。将各向同性散射的单速中子随机理论应用于点堆模型。在一个超临界系统中，当 $t\rightarrow\infty$ 时，出现有限个中子的概率为零，$P_N=0(0<N<\infty)$，即系统内或没有中子，或有无限多中子。给出了母函数的近似解，导出了母函数概率分布各阶矩的近似方程及解式。标准差公式表明，当初始中子数起伏 ξ_0 较大，初始中子平均数 $\overline{N}_0$ 不够多，或中子源强 Q 很弱时，对于 $0<\lambda\ll 1$ 的增殖系统，中子数的起伏很大，应予以重视。

关键词：随机理论；中子输运；母函数方程；起伏
中图分类号：O571.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-6931(2008)12-1057-07

Stochastic Theory of Neutron Transport

QIN Cheng-sen
(*Beijing Institute of Applied Physics and Computational Mathematics*, *Beijing* 100088, *China*)

Abstract: A stochastic neutron transport theory, in which we consider the probability $P_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{r}, t, u\boldsymbol{\Omega})$ that the neutron densities N_i ($i=1, 2, \cdots, n$) emerge in the phase space point ($\boldsymbol{r}, u_i\boldsymbol{\Omega}_i$) at time t respectively, was given by means of the probability theory, and a set of non-linear integral-differential equations for the probability generating functions $F_n(\boldsymbol{r}, t, u\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{S})$ was derived. The equation for one-order moment $\partial F_1/\partial S_1$ under some approximation is just the Boltzman equation for the average neutron number. One-velocity neutron stochastic theory with isotropic scatting was applied to a point model. An approximate solution for the generating function and the equations for moments of the probability distribution and their solutions were derived. It is shown that in a super-critical system, at $t\rightarrow\infty$, the probability appearing finite neutrons is zero, $P_N=0$ ($0<N<\infty$), in other words, the system has no or infinite neutrons. A formula for standard deviation shows that the fluctuation of neutron number in the near critical ($0<\lambda\ll 1$) system should be paid our attention when the fluctuation of initial neutron number ξ_0 is larger and the initial neutron average number $\overline{N}_0$ is not large enough, or neutron

收稿日期：2007-09-12；**修回日期**：2007-10-20
作者简介：秦承森(1941—)，男，辽宁铁岭人，研究员，中子输运与流体物理专业

source Q is weaker.

Key words: stochastic theory; neutron transport; equation for probability generating function; fluctuation

在反应堆中，中子与核的相互作用及迁移形成了反应堆中的中子输运过程。中子与核的相互作用，是以中子运动单位距离上发生反应的概率描述，称为反应截面 Σ。因此，中子输运过程是一个随机过程。通常的中子输运理论研究系统内中子密度平均值的变化，这适用于系统内的中子数足够多，中子数的起伏可忽略的情况。若系统内的中子数足够少，或因某些因素中子数起伏非常大的情况下，则有必要研究中子输运的随机过程。

中子输运的随机过程可采用跟踪系统内某1个中子及其后代的方式描述，即给出某时刻 t_{f} 在区域 R 中出现的中子，在下一时刻 t $(t > t_{\mathrm{f}})$，在空间点 $\boldsymbol{r}$ 处产生速度为 u、方向为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的 n 个中子概率。这种描述得到的方程实质上是中子价值概率方程，其对应的平均值方程即通常的中子价值方程。这一理论已由 L. Pal [1] 和 G. I. Bell [2-3] 建立。另一种描述是 t 时刻在欧拉空间点 $\boldsymbol{r}$ 处，建立相空间($u\boldsymbol{\Omega}$)单位体元中出现 $u\boldsymbol{\Omega}$ 态中子密度为 N 的概率 $P_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{r}, t, u\boldsymbol{\Omega})$ 的方程及其母函数方程。这种方程的平均值方程对应于通常的中子输运方程。这就是本工作要建立的理论。

1 中子输运的随机过程

将中子视为无体积大小的点粒子，假设中子与核发生反应是瞬时完成的并忽略中子之间的相互作用，我们研究反应系统内中子消长的概率。中子发生核反应的概率显然与中子数有关，同时也是中子状态 $u\boldsymbol{\Omega}$ 的函数，而产生的中子是按中子状态 $u\boldsymbol{\Omega}$ 分布的，因此，一个空间点上出现的不同状态中子数是有关联的。设 t 时刻，相空间点 $\boldsymbol{r}$ 处单位体元中，在 n 个相点 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 上同时出现 $N_i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 个中子的联合概率为 $P_{\boldsymbol{N}_n}(\boldsymbol{r}, t, u\boldsymbol{\Omega})$(其中 $\boldsymbol{N}_n \equiv (N_1, \cdots, N_i, \cdots, N_n)$，$u\boldsymbol{\Omega} \equiv (u_1\boldsymbol{\Omega}_1, \cdots, u_i\boldsymbol{\Omega}_i, \cdots, u_n\boldsymbol{\Omega}_n)$)，考虑经足够小的时间 Δt 后，中子密度 N_i 的变化。

设在 Δt 时间后，相空间点 $(\boldsymbol{r}, u_i\boldsymbol{\Omega}_i)$ 处单位体元中，与核碰撞减少1个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率为 $\mu_{1i}\Delta t$，漏失1个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率为 $\mu_{2i}\Delta t$，因散射增加1个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率为 $\mu_{3i}\Delta t$，因(n,2n)反应增加中子的概率为 $\mu_4\Delta t$，因裂变反应(n,f)导致中子增加的概率为 $\mu_5\Delta t$，外中子源产生1个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率为 $\mu_{6i}\Delta t$。分析各种反应的随机过程，可给出 μ_{1i}、μ_{2i}、μ_{3i}、μ_4、μ_5 及 μ_{6i} 的表达式。

1) 与核碰撞减少1个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率：$\mu_{1i}\Delta t = N_i\Sigma_{\mathrm{t}}u_i\Delta t$

设 $\Sigma_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}, t, u_i\boldsymbol{\Omega}_i)$ 为中子与核碰撞总截面，则1个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子 Δt 时间后因碰撞消失的概率为 $\Sigma_{\mathrm{t}}u_i\Delta t$。$N_i$ 个中子因碰撞减少1个中子的概率为：

$$C_{N_i}^1(\Sigma_{\mathrm{t}}u_i\Delta t)(1-\Sigma_{\mathrm{t}}u_i\Delta t)^{N_i-1} \approx N_i\Sigma_{\mathrm{t}}u_i\Delta t + O(\Delta t)$$

减少2个以上中子的概率为 Δt 的高阶小量。记：

$$\mu_{1i}\Delta t = N_i\Sigma_{\mathrm{t}}u_i\Delta t \tag{1}$$

2) 单位体元内漏失1个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率：$\mu_{2i}\Delta t$

取 $\boldsymbol{r}$ 处一空间体元 $\Delta V_{\mathrm{R}} = A_{\mathrm{R}}\delta$，其面积 A_{R} 与中子运动方向 $\boldsymbol{\Omega}_i$ 垂直，δ 为方向 $\boldsymbol{\Omega}_i$ 上的线元。因此，$u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子仅通过 A_{R} 面流入流出。Δt 时间内，单位体元中净流出 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态的中子数为：

$$\left[\sum_{N_i'=1}^{\infty}P_{N_i'/\boldsymbol{N}_n}\left(\boldsymbol{r}+\frac{\delta}{2}\boldsymbol{\Omega}\right)N'_i\left(\boldsymbol{r}+\frac{\delta}{2}\boldsymbol{\Omega}_i\right)-\sum_{N_i'=1}^{\infty}P_{N_i'/\boldsymbol{N}_n}\left(\boldsymbol{r}-\frac{\delta}{2}\boldsymbol{\Omega}\right)N'_i\left(\boldsymbol{r}-\frac{\delta}{2}\boldsymbol{\Omega}_i\right)\right]u_i\Delta tA_{\mathrm{R}}\Big/\Delta V_{\mathrm{R}}$$

其中：$P_{N_i'/\boldsymbol{N}_n}(\boldsymbol{r}')$ 为 $\boldsymbol{r}$ 点出现中子密度 $\boldsymbol{N}_n$ 条件下，在其邻域 $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} \pm \frac{\delta}{2}\boldsymbol{\Omega}_i$ 处出现 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子密度 N'_i 的概率。当 $\delta \to 0$ 时，$N'_i \to N_i$，$\sum_{N_i'=1}^{\infty}P_{N'_i/\boldsymbol{N}_n}N'_i \to \overline{N}_i(\boldsymbol{r}) = N_iP_{\boldsymbol{N}_n}$。

于是有：

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{N_i'=1}^{\infty}P_{N_i'/\boldsymbol{N}_n}\left(\boldsymbol{r}+\frac{\delta}{2}\boldsymbol{\Omega}\right)-\sum_{N_i'=1}^{\infty}P_{N_i'/\boldsymbol{N}_n}N'\left(\boldsymbol{r}-\frac{\delta}{2}\boldsymbol{\Omega}_i\right)\Big/\delta\times$$

$$u_i\Delta t = u_i\boldsymbol{\Omega}_i\cdot\nabla(N_iP_{\boldsymbol{N}_n})\Delta t$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，它就是从单位体元中漏失 1 个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率，记为：

$$\mu_{2i}\Delta t = u_i\boldsymbol{\Omega}_i\cdot\nabla(N_iP_{\boldsymbol{N}_n})\Delta t \qquad (2)$$

3）单位体元中，因散射增加 1 个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率：$\mu_{3i}\Delta t$

设 $\boldsymbol{r}$ 处单位体元中，当 n 个相空间点（$u_i\boldsymbol{\Omega}_i$）中子密度为 $\boldsymbol{N}_n$ 时，在（$u'\boldsymbol{\Omega}'$）处出现 $u'\boldsymbol{\Omega}'$ 态中子密度为 $N'(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega},u'\boldsymbol{\Omega}')$ 的条件概率为 $P_{N'/\boldsymbol{N}_n}(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega},u'\boldsymbol{\Omega}')$，则 $N'\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega'$ 个中子在 Δt 时间内发生散射产生 1 个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率为：

$$\Sigma_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t,u'\boldsymbol{\Omega}')f_{\mathrm{s}}(u'\boldsymbol{\Omega}'\to u_i\boldsymbol{\Omega}_i)u'N'(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega},u'\boldsymbol{\Omega}')\Delta t\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega')$$

其中：Σ_{s} 为散射截面；f_{s} 表示一次散射产生 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率。

随机变量 N' 取值为 $1\sim\infty$，于是，所有 $u'_i\boldsymbol{\Omega}'_i$ 态中子在 $\Delta t\to 0$ 时产生 1 个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率为：

$$\mu_{3i}\Delta t = \iint\Sigma_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t,u'\boldsymbol{\Omega}')f_{\mathrm{s}}(u'\boldsymbol{\Omega}'\to u_i\boldsymbol{\Omega}_i)u'\times\left[\sum_{N'=1}^{\infty}N'(\boldsymbol{r}',t,u\boldsymbol{\Omega},u'\boldsymbol{\Omega}')P_{N'/\boldsymbol{N}_n}\right]\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega'\Delta t \quad (3)$$

4）单位体元中，因（n,2n）反应增加 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率：$\mu_4\Delta t$

假设（n,2n）反应所产生的中子均为各向同性的，则由 $u'\boldsymbol{\Omega}'$ 态中子产生的中子处于 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态的概率可写为 $\dfrac{f_{2\mathrm{n}}(u'\to u_i)}{4\pi}\equiv\dfrac{f_{2\mathrm{n}i}}{4\pi}(i=1,2,\cdots,n)$，不处于所有 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态的概率为 $1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{f_{2\mathrm{n}i}}{4\pi}$，则（n,2n）反应产生的两个中子中有 k_i 个（$k_i=0,1,2$）分别落入 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 态中的概率为：

$$A_{\boldsymbol{k}} = \frac{2!}{\left(2-\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\right)!\prod\limits_{i=1}^{n}k_i!}\times\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{f_{2\mathrm{n}i}}{4\pi}\right)^{k_i}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{f_{2\mathrm{n}i}}{4\pi}\right)^{2-\sum\limits_{i=1}^{n}k_i}$$

其中：$\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\leqslant 2$。

$N'\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega'$ 个 $u'\boldsymbol{\Omega}'$ 态中子在 Δt 时间内发生（n,2n）反应的几率为：

$$\Sigma_{2\mathrm{n}}(\boldsymbol{r},t,u'\boldsymbol{\Omega}')u'\left(\sum_{N'=1}^{\infty}N'P_{N'/\boldsymbol{N}_n}\right)\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega'\Delta t$$

（n,2n）反应产生的中子中有 k_i 个分别进入 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态的概率为：

$$\mu_{4\boldsymbol{k}}\Delta t = \iint\Sigma_{2\mathrm{n}}u'A_{\boldsymbol{k}}\left(\sum_{N'=1}^{\infty}N'P_{N'/\boldsymbol{N}_n}\right)\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega'\Delta t$$

Δt 时间内增加中子的概率为：

$$\mu_4\Delta t = \sum_{\sum_{i=1}^{n}k_i=1}^{2}\mu_{4\boldsymbol{k}}\Delta t = \iint\Sigma_{2\mathrm{n}}u'\left(\sum_{\sum_{i=1}^{n}k_i=1}^{2}A_k\right)\times\left(\sum_{N'=1}^{\infty}N'P_{N'/\boldsymbol{N}_n}\right)\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega'\Delta t = \iint\Sigma_{2\mathrm{n}}u'\left[1-\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{f_{2\mathrm{n}i}}{4\pi}\right)^2\right]\times\left(\sum_{N'=1}^{\infty}N'P_{N'/\boldsymbol{N}_n}\right)\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega'\Delta t \qquad (4)$$

其中，已使用公式 $\sum\limits_{\sum_{i=1}^{n}k_i=0}^{2}A_{\boldsymbol{k}}=1$，及 $\sum\limits_{\sum_{i=1}^{n}k_i=1}^{2}A_{\boldsymbol{k}}=1-\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{f_{2\mathrm{n}i}}{4\pi}\right)^2$。

5）因裂变反应（n,f）导致中子增加的概率：$\mu_5\Delta t$

设 $\Sigma_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{r},t,u'\boldsymbol{\Omega}')$ 为 $u'\boldsymbol{\Omega}'$ 态中子引起核裂变截面，每次裂变产生 ν 个中子的概率为 q_ν。假设产生的每个裂变中子是各向同性的，因而，处于各个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态的概率可写为 $\dfrac{\chi(u'\to u_i)}{4\pi}\equiv\dfrac{\chi_i}{4\pi}(i=1,2,\cdots,n)$，不处于各 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态的概率为 $1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\chi_i}{4\pi}$，则一次裂变放出 ν 个中子中，有 k_i 个处于 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 态的概率为：

$$B_{\nu\boldsymbol{k}} \equiv \frac{\nu!}{\prod\limits_{i=1}^{n}k_i!\left(\nu-\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\right)!}\times\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i}{4\pi}\right)^{k_i}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\chi_i}{4\pi}\right)^{\nu-\sum\limits_{i=1}^{n}k_i}$$

其中，$\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\leqslant\nu$。

则 Δt 时间内，由于裂变使 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 态中子增加的概率为：

$$\mu_5\Delta t = \iint\Sigma_{\mathrm{f}}u'\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}q_\nu\left[1-\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\chi_i}{4\pi}\right)^{\nu}\right]\right\}\times\left(\sum_{N'=1}^{\infty}N'P_{N'/\boldsymbol{N}_n}\right)\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega'\Delta t \qquad (5)$$

其中使用了公式 $\sum\limits_{\sum_{i=1}^{n}k_i=0}^{\nu} B_{\nu\boldsymbol{k}}=1$ 及 $\sum\limits_{\sum_{i=1}^{n}k_i=1}^{\nu} B_{\nu\boldsymbol{k}}=1-\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\chi_i}{4\pi}\right)^{\nu}$。

6）设外中子源 Δt 时间内在（$\boldsymbol{r}$，$u_i\boldsymbol{\Omega}_i$）单位体元中产生1个 $u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子的概率：$\mu_{6i}\Delta t$

$$\mu_{6i}\Delta t=Q_i(\boldsymbol{r},t,u_i\boldsymbol{\Omega}_i)\Delta t \tag{6}$$

令中子密度不变的概率为 $\mu_7\Delta t$，设以上随机事件构成完备组，则有：

$$\mu_7\Delta t=1-\sum_{i=1}^{n}(\mu_{1i}+\mu_{2i}+\mu_{3i}+\mu_{6i})\Delta t-\mu_4\Delta t-\mu_5\Delta t \tag{7}$$

2 概率方程及其母函数方程和矩方程

$t+\Delta t$ 时刻，$u_i\boldsymbol{\Omega}_i$ 态中子密度为 N_i 的联合概率为 $P_{\boldsymbol{N}_n}(\boldsymbol{r},t+\Delta t,u\boldsymbol{\Omega})$，与 t 时刻中子输运随机过程有关，按全概率公式有：

$$\begin{aligned}&P_{\boldsymbol{N}_n}(\boldsymbol{r},t+\Delta t,u\boldsymbol{\Omega})=\\&\sum_{i=1}^{n}P_{\boldsymbol{N}_n+\boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega})\mu_{1i}\Delta t+\\&\sum_{i=1}^{n}P_{\boldsymbol{N}_n+\boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega})\mu_{2i}\Delta t+\\&\sum_{i=1}^{n}P_{\boldsymbol{N}_n-\boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega})\mu_{3i}\Delta t+\\&\sum_{\sum_{i=1}^{n}k_i=1}^{2}P_{\boldsymbol{N}_n-\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega})\mu_{4\boldsymbol{k}}\Delta t+\\&\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\sum_{i=1}^{n}k_i=1}^{\nu}P_{\boldsymbol{N}_n-\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega})\mu_{5\nu\boldsymbol{k}}\Delta t+\\&\sum_{i=1}^{n}P_{\boldsymbol{N}_n-\boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega})Q_i\Delta t+P_{\boldsymbol{N}_n}(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega})\mu_7\Delta t\end{aligned}$$

将 μ_7 表达式代入，$P_{\boldsymbol{N}_n}(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega})$ 项移到式左边，除以 Δt 并令 $\Delta t\to 0$，则有概率方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{\boldsymbol{N}_n}}{\partial t}=&\sum_{i=1}^{n}[(\mu_{1i}+\mu_{2i})P_{\boldsymbol{N}_n+\boldsymbol{e}_i}+\\&(\mu_{3i}+Q_i)P_{\boldsymbol{N}_n-\boldsymbol{e}_i}]+\sum_{\sum_{i=1}^{n}k_i=1}^{2}\mu_{4\boldsymbol{k}}P_{\boldsymbol{N}_n-\boldsymbol{k}}+\\&\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\sum_{i=1}^{n}k_i=1}^{\nu}\mu_{5\nu\boldsymbol{k}}P_{\boldsymbol{N}_n-\boldsymbol{k}}-P_{\boldsymbol{N}_n}\Big[\sum_{i=1}^{n}(\mu_{1i}+\mu_{2i}+\\&\mu_{3i}+\mu_{6i})+\mu_4+\mu_5\Big]\end{aligned} \tag{8}$$

其中：$\boldsymbol{k}=\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$；$\boldsymbol{N}_n-\boldsymbol{e}_i=\{N_1,N_2,\cdots,N_i-1,\cdots,N_n\}$；$\boldsymbol{N}+\boldsymbol{e}_i=\{N_1,N_2,\cdots,N_i+1,\cdots,N_n\}$。

将式（8）乘以 $\prod\limits_{i=1}^{n}S_i^{N_i}$ 后并取和为：$\sum\limits_{N_1=0}^{\infty}\sum\limits_{N_2=0}^{\infty}\cdots\sum\limits_{N_n=0}^{\infty}$，引入联合概率 $P_{\boldsymbol{N}_n}$ 的母函数 F_n：

$$F_n(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{S})=\sum_{N_1=0}^{\infty}\sum_{N_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{N_n=0}^{\infty}P_{\boldsymbol{N}_n}(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega})\prod_{i=1}^{n}S_i^{N_i}$$

其中：$\boldsymbol{S}=(S_1,S_2,\cdots,S_n)$。

可得母函数 F_n 满足下面微分方程组：

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_n}{\partial t}=&\sum_{i=1}^{n}(1-S_i)(\Sigma_t u_i+u_i\boldsymbol{\Omega}_i\cdot\nabla)\frac{\partial F_n}{\partial S_i}+\\&\sum_{i=1}^{n}\iint_D\Sigma_S u'(S_i-1)f_S\left(\frac{\partial F_{n+1}}{\partial S_{n+1}}\right)_{S_{n+1}=1}\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega'+\\&\iint_D\Sigma_{2\mathrm{n}}u'\left\{\left[1+\sum_{i=1}^{n}(S_i-1)\frac{f_{2\mathrm{n}i}}{4\pi}\right]^2-1\right\}\times\\&\left(\frac{\partial F_{n+1}}{\partial S_{n+1}}\right)_{S_{n+1}=1}\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega'+\iint_D\Sigma_{\mathrm{f}}u'\sum_{\nu=1}^{\infty}q_\nu\times\\&\left\{\left[1+\sum_{i=1}^{n}(S_i-1)\frac{\chi_i}{4\pi}\right]^{\nu}-1\right\}\times\\&\left(\frac{\partial F_{n+1}}{\partial S_{n+1}}\right)_{S_{n+1}=1}\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega'+\sum_{i=1}^{n}(S_i-1)Q_iF_n\end{aligned} \tag{9}$$

其中：D 为 $u'\boldsymbol{\Omega}'$ 态中子在相空间的定义域。

上面推导中使用了公式：

$$\sum_{\sum_{i=1}^{n}k_i=1}^{\nu}B_{\nu\boldsymbol{k}}\prod_{i=1}^{n}S^{k_i}=\left[1+\sum_{i=1}^{n}(S_i-1)\frac{\chi_i}{4\pi}\right]^{\nu}-\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\chi_i}{4\pi}\right)^{\nu}$$

及

$$\sum_{\sum_{i=1}^{n}k_i=1}^{2}\left(A_k\prod_{i=1}^{n}S^{k_i}\right)=\left[1+\sum_{i=1}^{n}(S_i-1)\frac{f_{2\mathrm{n}i}}{4\pi}\right]^2-\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{f_{2\mathrm{n}i}}{4\pi}\right)^2$$

归一化条件为 $F_n(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{S})|_{\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}}=1$，其中，$\boldsymbol{I}=(1,1,\cdots,1)$，初始条件为 $F_n(\boldsymbol{r},0,u\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{S})=F_n^0(\boldsymbol{r},u\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{S})$，$F_n^0$ 为已知函数。若假设无中子从外界进入系统 V 内，则边界条件为：$F_n(\boldsymbol{r},t,u\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{S})=1$，$\frac{\partial F_n}{\partial S_i}=0$，$\boldsymbol{r}\in\partial V$，$\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}_V\leqslant 0$。其中，$\boldsymbol{n}_V$ 为边界 ∂V 外法向单位向量。

显然，方程组(9)是一个不封闭的、F_n 的方程中包含 F_{n+1} 函数。因此，若解该方程组，应该

引入截断近似，使方程组封闭。对方程组(9)中变量 S_i 求各阶导数，并令 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}$，则可得到随机矢量 $\boldsymbol{N}$ 的各阶原点矩、混合矩所满足的微分方程组。

对 $n=1$ 情况，一阶原点矩就是 $(\boldsymbol{r}, u\boldsymbol{\Omega})$ 空间中子密度平均值 $\overline{N}_1 \equiv \left(\frac{\partial F_1}{\partial S_1}\right)_{S_1=1} = \sum_{N_1=1}^{\infty} N_1 P_{N_1}$，它满足方程：

$$\frac{\partial \overline{N}_1}{\partial t} = -(\Sigma_t u + u\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\overline{N}_1 + \iint_D \left(\Sigma_s f_s + 2\Sigma_{2n}\frac{f_{2n}}{4\pi} + \bar{\nu}\Sigma_f\frac{\chi}{4\pi}\right)\overline{N}_2 u' \mathrm{d}u' \mathrm{d}\Omega' + Q \quad (10)$$

式中：$\overline{N}_2 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial S_2}\right)_{\substack{S_2=1\\S_1=1}}$，$\bar{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu q_\nu$；边界条件为 $\overline{N}_1 = 0$，$\boldsymbol{\Omega}_1\cdot\boldsymbol{n}_\nu \leqslant 0$；初始条件 $\overline{N}_1 = \left(\frac{\partial F^0}{\partial S_1}\right)_{S_1=1} \equiv \overline{N}_1^0$。

解式(10)需要给出 F_2 的表达式。为了使式(10)封闭，可假设 $u_1\boldsymbol{\Omega}_1$ 态与 $u_2\boldsymbol{\Omega}_2$ 态中子数 N_1、N_2 是统计独立的，即：

$$P_{N_1,N_2}(\boldsymbol{r}, t, u_1\boldsymbol{\Omega}_1, u_2\boldsymbol{\Omega}_2) = P_{N_1}(\boldsymbol{r}, t, u_1\boldsymbol{\Omega}_1)P_{N_2}(\boldsymbol{r}, t, u_2\boldsymbol{\Omega}_2)$$

且 N_1、N_2 具有相同的概率密度，则 $\overline{N}_2$ 即为 $\overline{N}_1$。在上述截断近似下，式(10)可写为：

$$\frac{\partial \overline{N}_1}{\partial t} = -(\Sigma_t u + u\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\overline{N}_1 + \iint_D \left(\Sigma_s f_s + 2\Sigma_{2n}\frac{f_{2n}}{4\pi} + \bar{\nu}\Sigma_f\frac{\chi}{4\pi}\right)\times \overline{N}_1(\boldsymbol{r}, t, u'\boldsymbol{\Omega}')u'\mathrm{d}u'\mathrm{d}\Omega' + Q \quad (11)$$

式(11)恰好是通常使用的中子输运方程。由式(9)可得方差 $\sigma_1^2 = \overline{N_1^2} - \overline{N}_1^2$ 满足的方程：

$$\frac{\partial \sigma_1^2}{\partial t} = -2(\Sigma_t u + u\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\sigma_1^2 - u\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\overline{N}_1^2 + (\Sigma_t u + u\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\overline{N}_1 + \iint_D\Big[\Sigma_s f_s + 2\Sigma_{2n}\frac{f_{2n}}{4\pi}\left(1+\frac{f_{2n}}{4\pi}\right) + \Sigma_f\frac{\chi}{4\pi}\left(\bar{\nu} + \overline{\nu(\nu-1)}\frac{\chi}{4\pi}\right)\Big]\overline{N}_2\mathrm{d}u_2\mathrm{d}\Omega_2 + 2\iint_D\left(\Sigma_s f_s + 2\Sigma_{2n}\frac{f_{2n}}{4\pi} + \bar{\nu}\Sigma_f\frac{\chi}{4\pi}\right)\times(\overline{N_1N_2} - \overline{N}_1\,\overline{N}_2)u_2\mathrm{d}u_2\mathrm{d}\Omega_2 + Q_1 \quad (12)$$

其中：$\overline{\nu(\nu-1)} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu(\nu-1)q_\nu$，$\overline{N_1N_2} = \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial S_1\partial S_2}\right)_{\substack{S_1=1\\S_2=1}}$。

若无外来中子，则有边界条件 $\sigma^2 = 0$，$\boldsymbol{\Omega}_i\cdot\boldsymbol{n}_V \leqslant 0$。初始条件 $\sigma^2(\boldsymbol{r}, 0, u\boldsymbol{\Omega}) = \left.\frac{\partial^2 F_1^0}{\partial S_1^2}\right|_{S_1=1} + \overline{N}_1^0 - \overline{N}_1^{0^2}$。若解此方程，亦需做截断近似。例如令 $\overline{N}_1$ 与 $\overline{N}_2$ 为同一函数。

3　应用举例

为了解析地研究中子输运随机过程，采用各向同性单能中子的点堆模型，且仅考虑中子的吸收和裂变。中子的泄漏由1个中子在单位时间内漏出系统的概率 μ 表示。在上述假设下，母函数方程为：

$$\frac{\partial F(t,S)}{\partial t} = \phi(t,S)\frac{\partial F}{\partial S} + (S-1)QF \quad (13)$$

其中：$\phi(t,S) \equiv (1-S)(\Sigma_a u + \mu) + (q(S) - S)\Sigma_f u$，$q(S) = \sum_{\nu=0}^{\infty}q_\nu S^\nu$，归一化条件为 $F(t,1) = 1$。

设初始时刻系统内有 $\overline{N}_0$ 个中子，则：

$$F(0,S) = S^{\overline{N}_0} \quad (14)$$

由式(13)可得中子平均密度方程：

$$\frac{\partial \overline{N}}{\partial t} = [(\bar{\nu}-1)\Sigma_f\mu - \Sigma_a u - \mu]\overline{N} + Q \quad (15)$$

引入系统中子增殖系数 λ：

$$\lambda \equiv \frac{1}{\overline{N}}\cdot\frac{\mathrm{d}\overline{N}}{\mathrm{d}t} = (\bar{\nu}-1)\Sigma_f u - \Sigma_a u - \mu$$

则：

$$\overline{N} = \mathrm{e}^{\int_0^t\lambda\mathrm{d}t}\left[\int_0^t Q\mathrm{e}^{-\int_0^{t'}\lambda\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t' + \overline{N}_0\right] \quad (16)$$

函数 $\phi(t,S)$ 有如下特征：$\phi(t,0) > 0$，$\phi(t,1) = 0$，$\phi_S{}'(t,1) = \lambda$，$\phi''_{SS}(t,S) = \Sigma_f u q'' > 0$，且当 $\lambda > 0$ 时，$\phi(t,S)$ 在 $S\in(0,1)$ 上有一零点 S_0，$\phi(t,S_0) = 0$。由于函数 ϕ 是 S 的无穷级数，难以给出式(13)的解析解。

函数：

$$\psi(t,S) = \frac{\lambda(t)}{1 - S_0(t)}(S_0(t) - S)(1-S) \quad (17)$$

具有 $\phi(t,S)$ 函数以上特征，可作为 $\phi(t,S)$ 的近似函数。在 $q(S) \approx 1 + \bar{\nu}(S-1) + \frac{\bar{\nu}(\bar{\nu}-1)}{2}(S-1) + \frac{\bar{\nu}(\bar{\nu}-1)(\bar{\nu}-2)}{6}(S-1)^3$ 近似下，令 $\phi = 0$，可得：

$$S_0 = 1 - \frac{3}{2(\bar{\nu}-2)}\times$$

$$\left[1-\sqrt{1-\frac{8}{3}\,\frac{\bar{\nu}-2}{3\,\bar{\nu}(\bar{\nu}-1)}\,\frac{\lambda}{\Sigma_{\mathrm{f}}u}}\right] \tag{18}$$

当 $\frac{\lambda}{\Sigma_{\mathrm{f}}u} \ll 1$ 时，

$$S_0 = 1-\frac{2\lambda}{\bar{\nu}(\bar{\nu}-1)\Sigma_{\mathrm{f}}u} \tag{19}$$

3.1 无中子源情况

使用近似 $\psi(t,S) \approx \phi(t,S)$，方程(13)在 $Q=0$、$\overline{N}_0=1$ 时的解为：

$$F(t,S) = 1+\frac{S-1}{A(1-BS)} \tag{20}$$

其中：

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\overline{N}(t)}+\int_0^t \frac{\lambda}{\overline{N}(1-S_0)}\mathrm{d}t' \\ B &= \int_0^t \frac{\lambda}{\overline{N}(1-S_0)}\mathrm{d}t'/A \end{aligned} \tag{21}$$

将 $F(t,S)$ 在 $S=0$ 点展开，可得：

$$\begin{cases} P_0(t) = 1-\dfrac{1}{A} \\ P_N(t) = \dfrac{1-B}{A}B^{N-1} \end{cases} \tag{22}$$

对于 $\lambda>0$，当 $t\to\infty$，有：

$$\begin{cases} P_0(\infty) = 1-\dfrac{1}{A(\infty)} \\ P_N(\infty) = 0 \qquad (N\neq 0,\text{为有限值}) \\ P_\infty(\infty) = \dfrac{1}{A(\infty)} \end{cases} \tag{23}$$

式(23)表明，对超临界系统，初始时刻放入1个中子、$t\to\infty$ 时，系统内存在有限个中子数的概率为0，系统内中子数或为零，或趋于无限大。

引入变差系数 $\xi=\sqrt{\frac{\overline{N^2}-\overline{N}^2}{\overline{N}^2}}$，则：

$$\xi = \sqrt{AB+A-1} = \left(2\int_0^t \frac{\lambda}{\overline{N}(1-S_0)}\mathrm{d}t'+\frac{1}{\overline{N}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

当 Σ_{a}、Σ_{f}、μ 与时间无关时，S_0、λ 为常数，有：

$$\begin{cases} P_0(\infty) = S_0 \\ P_N(\infty) = 0 \\ P_\infty(\infty) = 1-S_0 \\ \xi(\infty) = \sqrt{\dfrac{1+S_0}{1-S_0}} \end{cases} \tag{25}$$

式(25)表明，$t=0$ 时刻系统内存在1个中子，在 $t\to\infty$ 时，系统中不存在中子的概率为 S_0。$1-S_0$ 则是 $t\to\infty$ 时系统中子数无限大的概率，或称为1个中子无限增殖的概率。

对于 $t=0$ 时刻，系统中存在 $\overline{N}_0$ 个中子情况，有：

$$\begin{cases} P_0(\infty) = S_0^{\overline{N}_0} \\ P_N(\infty) = 0 \\ P_\infty(\infty) = 1-S_0^{\overline{N}_0} \\ \xi(\infty) = \sqrt{\dfrac{1+S_0}{\overline{N}_0(1-S_0)}} = \sqrt{\dfrac{1}{\overline{N}_0}\left(\dfrac{2}{1-S_0}-1\right)} \end{cases} \tag{26}$$

对于 $0<\lambda\ll 1$ 的反应系统：

$$S_0 = 1-\frac{2\lambda}{\bar{\nu}(\bar{\nu}-1)\Sigma_{\mathrm{f}}u}$$

$$\xi(\infty) = \sqrt{\frac{2}{(1-S_0)\,\overline{N}_0}} = \sqrt{\frac{\bar{\nu}(\bar{\nu}-1)\Sigma_{\mathrm{f}}u}{\overline{N}_0\lambda}} \tag{27}$$

可见，中子数的起伏很大，只有初始注入足够数量的中子数才可能使系统内中子数的起伏减小。例如，当 $\overline{N}_0\lambda>10^4\,\bar{\nu}(\bar{\nu}-1)\Sigma_{\mathrm{f}}u$ 时，才能有 $\xi(\infty)<0.01$。

3.2 有中子源情况

假设系统内在 $t\in[0,t_{\mathrm{f}}]$ 时间内存在 $Q(t)$ 中子源，则方程(13)在 $\psi\approx\phi$ 近似及 $F(0,S)=1$、$F(t,1)=1$ 条件下的解可写为：

$$F(t,S) = \exp\left\{\int_0^t [F_1(t,S;\tau)-1]Q(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} \tag{28}$$

其中：

$$F_1(t,S;\tau) = 1+\frac{S-1}{A(1-BS)},$$

$$A(t;\tau) = \exp\left[-\int_\tau^t \lambda(t')\mathrm{d}t'\right]+\int_\tau^t \frac{\lambda(t')}{1-S_0(t')}\exp\left[-\int_\tau^{t'}\lambda(T)\mathrm{d}T\right]\mathrm{d}t',$$

$$B(t;\tau) = \int_\tau^t \frac{\lambda(t')}{1-S_0(t')}\times \exp\left[-\int_\tau^{t'}\lambda(T)\mathrm{d}T\right]\mathrm{d}t'/A(t;\tau)。$$

t 时刻系统内中子死绝的概率 $P_0(t)=F(t,0)$，即：

$$P_0(t) = \exp\left\{\int_0^t [F_1(t,0;\tau)-1]Q(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} \tag{29}$$

$t\to\infty$ 时，系统中子无限增殖概率为：

$$P_\infty(\infty) = 1-P_0(\infty) =$$

$$1-\exp\left\{-\int_0^{t_f}\frac{Q(\tau)}{A(\infty,\tau)}\mathrm{d}\tau\right\} \qquad (30)$$

对于 λ、S_0、Σ_a、Σ_f 及 μ 均为常数的系统，有：

$$P_\infty(\infty)=1-\exp\left[(S_0-1)\int_0^{t_f}Q(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \qquad (31)$$

对于 $0<\lambda\ll 1$ 的系统，使用式(19)，则：

$$P_\infty(\infty)=1-\exp\left[-\frac{2\lambda m_0}{\bar{\nu}(\bar{\nu}-1)\Sigma_f u}\right] \qquad (32)$$

式中：$m_0=\int_0^{t_f}Q(\tau)\mathrm{d}\tau$，为源中子总数。

从式(13)，不做近似，可得变差系数 ξ 的方程：

$$\frac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}t}=-2\frac{Q}{\overline{N}}\xi^2+\frac{\lambda}{\overline{N}}\left(\frac{2}{1-S_0}-1\right)+\frac{Q}{\overline{N}^2} \qquad (33)$$

它的解为：

$$\xi^2(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t\frac{2Q}{\overline{N}}\mathrm{d}\tau}\left\{\int_0^t\left[\frac{\lambda}{\overline{N}}\left(\frac{2}{1-S_0}-1\right)+\frac{Q}{\overline{N}^2}\right]\mathrm{e}^{\int_0^{t'}\frac{2Q}{\overline{N}}\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t'+\xi_0^2\right\} \qquad (34)$$

其中：ξ_0^2 为 $t=0$ 时刻 ξ^2 的值；$\overline{N}=\mathrm{e}^{\int_0^t\lambda\mathrm{d}t'}\left(\int_0^t Q\mathrm{e}^{-\int_0^{t'}\lambda\mathrm{d}t}\mathrm{d}t'+\overline{N}_0\right)$，$\overline{N}_0$ 为 $t=0$ 时刻中子数均值。

对于 λ、Q 为常数的系统，

$$\xi^2(\infty)=\frac{\frac{Q}{\lambda(1-S_0)}+\left(\frac{2}{1-S_0}-1\right)\overline{N}_0+\overline{N}_0^2\xi_0^2}{\left(\frac{Q}{\lambda}+\overline{N}_0\right)^2} \qquad (35)$$

对瞬时源 $Q=\overline{N}_0\delta(t)$，且 $\xi_0=0$ 时，

$$\xi(\infty)=\sqrt{\frac{1}{\overline{N}_0}\left(\frac{2}{1-S_0}-1\right)} \qquad (36)$$

这个结果与式(26)完全一致。式(35)表明，对于 $0<\lambda\ll 1$ 的系统，初始中子数起伏 ξ_0^2 大，初始中子数不够多，或源强弱，系统内中子的起伏较大。对这3种情况，应深入研究。

3.3　矩方程组

在 $\phi(t,S)\approx\psi(t,S)$ 近似下，由式(13)对 S 求 $k+1$ 次导数，并令 $S=1$，可得微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}f_k(t)}{\mathrm{d}t}=(k+1)\lambda(t)f_k(t)+(k+1)\times\left[\frac{k\lambda(t)}{1-S_0(t)}+Q(t)\right]f_{k-1}(t)\quad(k=0,1,2,\cdots) \qquad (37)$$

其中：$f_k(t)=\overline{\prod_{i=0}^{k}(N(t)-i)}$，但规定 $f_{-1}(t)=1$。

从这个方程组可得到各阶矩，故称为矩方程组。

式(37)的一组解为：

$$f_k(t)=\exp\left[\int_0^t(k+1)\lambda(t')\mathrm{d}t'\right]\times\left\{\int_0^t(k+1)\left[\frac{k\lambda(t')}{1-S_0(t')}+Q(t')\right]f_{k-1}(t')\times\exp\left[-\int_0^{t'}(k+1)\lambda(\tau)\mathrm{d}(\tau)\right]\mathrm{d}t'+f_k(0)\right\} \qquad (38)$$

其中：$f_k(0)$ 为函数 $f_k(t)$ 在 $t=0$ 时的值。

从此解中可求出各阶矩，因而可研究中子数的起伏、分布的偏态、峰态等。

4　结语

本文给出了中子输运随机过程的概率方程、母函数方程。研究了单能各向同性中子在点堆中随机过程、中子起伏，给出了矩方程组。对于低超临界系统(0<λ≪1)，如果初始中子数不够多，或源中子强度很小，中子起伏是重要的，系统对外界扰动也敏感，应该研究中子输运的随机过程。

感谢周光召先生的有益讨论和指导。

参考文献：

[1] PAL L. On the theory of stochastic processes in nuclear reactors[J]. Nuovo Cimento, 1958, 7 (Suppl.): 25-42.

[2] BELL G I. On the stochastic theory of neutron transport[J]. Nucl Sci Eng, 1965, 21: 390-401.

[3] BELL G I, LEE C E. On the probability of initiating a persistent fission chain, LA-22608[R]. USA: Las Alamos National Laboratory, 1976.