

文章编号:1000-6893(2008)02-0472-06

预浸机织织物的本构关系

王玮, 杜星文

(哈尔滨工业大学 复合材料与结构研究所, 黑龙江 哈尔滨 150001)

Constitutive Relation of Pre-impregnated Woven Fabric Composite

Wang Wei, Du Xingwen

(Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

摘要: 预浸机织织物是一种未固化的织物复合材料,其性质既不同于纯织物材料也不同于固化后的织物复合材料,具有独特的力学性质。根据连续介质力学的理论,结合预浸织物的非线性的黏弹性特性,从代数不变量出发,推导了预浸织物的本构方程。同时对描述预浸织物性能的像框剪切试验的步骤及方法做了阐述。通过像框剪切试验的结果与本构方程的对比,验证了本构方程的正确性,该方程较好地描述了预浸织物的性质。本构方程的导出为研究空间充气结构的静态、动态及热分析奠定了一定的理论基础。

关键词: 本构方程; 预浸机织织物; 黏弹性; 不变量; 像框剪切试验

中图分类号: TB330.1 **文献标识码:** A

Abstract: The pre-impregnated woven fabric composite is a kind of uncured composite material. The pre-impregnated woven fabric composite has its own properties which are not similar to those of the fabric or the fabric reinforced composite because of the existence of the uncured resin. A constitutive equation is based on the theory of continuum mechanics, considering the nonlinear viscoelasticity, and following the theory of algebraic invariants. At the same time, the process and method of picture frame experiment are formulated. A picture frame experiment is performed to testify the verification of the constitutive equation. The results show that the equation can explain the properties of the material well. Investigation on the constitutive equation of pre-impregnated woven fabric composite is of great significance on the static, dynamic and thermal analyses of space inflatable structures.

Key words: constitutive equation; pre-impregnated woven fabric composite; viscoelasticity; invariant; picture frame experiment

对织物及织物复合材料的研究已经很多年了,一般研究织物复合材料都是基于经典的层合板理论^[1-5]。但是预浸机织织物复合材料是在树脂未固化时的状态,其性质既不同于织物材料也不同于固化后的织物复合材料,具有独特的力学性质,经典的层合板理论已经不再适用于预浸织物。随着空间充气结构的发展,对其所用的预浸织物材料性质的研究就显得尤其重要。目前主要是研究其固化方式及工艺,对于预浸织物力学性能的研究以及对其固有的本构模型的研究比较少。但是有一些学者研究织物复合材料在热压成型过程中材料的本构方程和力学性能。在热压成型过程中,树脂为熔融状态,与预浸织物相似,可以借鉴。单向或者双向纤维增强的复合材料在热压成型过程中的流变模型,最初是由 Rogers^[6] 提

出的。Rogers 指出现有的线弹性理论,通过相应的黏弹性准则能够应用到线黏弹性或者线黏性的材料中去。给出了此种材料的线性弹性和线性黏弹性的本构方程。同时用扭转试验的实际例子分析了本构方程。

另外,Spencer 给出了织物增强复合材料作为线性和非线性各向异性黏性流体模型的一般的理论,并且分析了测试曲线^[7]。这些模型对于织物的微观结构进行了简化,主要有:①织物纤维既不能伸长又不被压缩;②经线与纬线的交叉点自由转动,既无相互挤压力,又无摩擦;③忽略纤维的体积。本文称之为“理想内约束”条件。这些简化,大大方便了模型的建立,但也带来了很大的误差^[7-9],并且 Spencer 建立模型时采用了 Bingham 流体模型(线性)或幂律流体模型(非线性),这又是一次大大的简化,与实际的高聚物流变特性相差比较远^[10]。Spencer 采用了像框剪切试验来分析材料的性质。

像框试验是 McGuinness 和 ÓBrádaigh 1997 年发明的,它能够得到单向或双向增强板的与时间有关的均匀变形,以研究复合材料面内剪切的流变行为^[7,11]。试验是用像框装置来研究织物或预浸织物的剪切行为,目的是确定不同的织物结构的剪切角和载荷之间的关系。像框装置实际上就是由滚动轴承连接 4 个连杆组成的正方形装置^[12]。目前对于分析织物及预浸织物材料的剪切性能来说,像框剪切试验是一个比较好的试验方法。

对于单向纤维增强的预浸织物复合材料,使用线性本构方程可以较好地描述其流变特性。但是对于双向纤维增强的预浸织物复合材料,试验中往往观察到的是应力与应变率之间的非线性行为,因此,以往建立的线性本构方程在描述其流变行为时具有一定的局限性,需要构建适合预浸织物复合材料的非线性本构方程。

1 运动及本构方程

1.1 物质运动

物质点 X 在欧拉坐标系中的位置由 x 确定,或由 x 到坐标原点的矢量经 x 确定。显然,不同时刻 X 运动到空间不同的点 x ,有

$$x = x(X, t) \quad (1)$$

变形梯度张量 F 的分量为

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2)$$

这里及以后的分析中,重复指标均应用爱因斯坦求和约定。

通过变形梯度张量能够得到左、右 Cauchy-Green 张量 B, C 分别为

$$B = FF^T \quad (3)$$

$$C = F^T F \quad (4)$$

式中: C 为初始构型中定义的张量; B 为现实构型中定义的张量。

x 处的速度为 $v(x, t)$, 相应的变形率张量 D 的分量表示为

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

1.2 本构方程

预浸机织织物是由经向和纬向两方向的纤维组成,应用连续介质力学理论,认为纤维是连续分布的,经向和纬向纤维分别用单位向量 $m(x, t)$ 和

$n(x, t)$ 表示。在推导中采用如下的假定:①材料是不可压缩的;②材料沿纤维方向不可伸长。

本文中的本构方程考虑了预浸织物材料的黏弹性特性,用欧拉坐标系来描述,材料的黏性特性用变形率张量 D 表示,弹性特性用左 Cauchy-Green 张量 B 表示,由不变量理论得出,通过 Cayley-Hamilton 定理,表明了材料的各向同性的不变量为^[13]: $\text{tr } B, \text{tr } (B^2), \text{tr } (B^3), \text{tr } D, \text{tr } (D^2), \text{tr } (D^3), \text{tr } (BD), \text{tr } (BD^2), \text{tr } (B^2 D), \text{tr } (B^2 D^2)$ 。表明了材料的各向异性以及经向和纬向纤维之间,纤维和树脂之间的相互作用的不变量为: $\text{tr } M, \text{tr } N, \text{tr } (MB), \text{tr } (NB), \text{tr } (MD), \text{tr } (ND), \text{tr } (PB), \text{tr } (PD), \text{tr } (MBD), \text{tr } (NBD), \text{tr } (PBD), \text{tr } (MDBD), \text{tr } (NDBD), \text{tr } (PDBD), \text{tr } (MB^2 D), \text{tr } (NB^2 D), \text{tr } (PB^2 D)$ 。

由材料的不可压缩条件,预浸织物的本构关系表示为

$$\begin{aligned} \sigma = & -pI + T_m M + T_n N + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \\ & \alpha_3 D + \alpha_4 D^2 + \alpha_5 (DB + BD) + \alpha_6 (DB^2 + B^2 D) + \\ & \alpha_7 (D^2 B + BD^2) + \alpha_8 (D^2 B^2 + B^2 D^2) + \\ & \alpha_9 (MB + BM) + \alpha_{10} (NB + BN) + \alpha_{11} (PB + BP^T) + \\ & \alpha_{12} (BP + P^T B) + \alpha_{13} (MD + DM) + \alpha_{14} (ND + DN) + \\ & \alpha_{15} (PD + DP^T) + \alpha_{16} (DP + P^T D) + \\ & \alpha_{17} (MBD + BDM) + \alpha_{18} (NBD + BDN) + \\ & \alpha_{19} (PBD + BDP^T) + \alpha_{20} (BDP + P^T BD) + \\ & \alpha_{21} (MDBD + DBDM) + \alpha_{22} (NDBD + DBDN) + \\ & \alpha_{23} (PDBD + DBDP^T) + \alpha_{24} (DBDP + P^T DBD) + \\ & \alpha_{25} (MB^2 D + B^2 DM) + \alpha_{26} (NB^2 D + B^2 DN) + \\ & \alpha_{27} (PB^2 D + B^2 DP^T) + \alpha_{28} (B^2 DP + P^T B^2 D) \end{aligned} \quad (6)$$

式中: p 为任意静水压力; T_m 和 T_n 为经向和纬向纤维方向的张力; I 为单位张量; $M = m \otimes m$; $N = n \otimes n$; $P = m \otimes n$; $P^T = n \otimes m$; $\alpha_y (y = 0, \dots, 28)$ 为由不变量 B, D, M, N, P 和 P^T 所表示的函数。

考虑到材料的对称性,即在经向和纬向纤维方向的力学性能相等,能够得到如下关系式: $\alpha_9 = \alpha_{10}, \alpha_{11} = \alpha_{12}, \alpha_{13} = \alpha_{14}, \alpha_{15} = \alpha_{16}, \alpha_{17} = \alpha_{18}, \alpha_{19} = \alpha_{20}, \alpha_{21} = \alpha_{22}, \alpha_{23} = \alpha_{24}, \alpha_{25} = \alpha_{26}, \alpha_{27} = \alpha_{28}$ 。

那么式(6)可化简为

$$\begin{aligned} \sigma = & -pI + T_m M + T_n N + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \\ & \alpha_3 D + \alpha_4 D^2 + \alpha_5 (DB + BD) + \alpha_6 (DB^2 + B^2 D) + \\ & \alpha_7 (D^2 B + BD^2) + \alpha_8 (D^2 B^2 + B^2 D^2) + \alpha_9 (MB + \\ & BM + NB + BN) + \alpha_{10} (PB + BP^T + BP + \\ & P^T B) + \alpha_{11} (MD + DM + ND + DN) + \\ & \alpha_{12} (PD + DP^T + DP + P^T D) + \alpha_{13} (MBD + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{BDM} + \mathbf{NBD} + \mathbf{BDN}) + \alpha_{14}(\mathbf{PBD} + \\
& \mathbf{BDP}^T + \mathbf{BDP} + \mathbf{P}^T \mathbf{BD}) + \alpha_{15}(\mathbf{MDBD} + \\
& \mathbf{DBDM} + \mathbf{NDBD} + \mathbf{DBDN}) + \alpha_{16}(\mathbf{PDBD} + \\
& \mathbf{DBDP}^T + \mathbf{DBDP} + \mathbf{P}^T \mathbf{DBD}) + \alpha_{17}(\mathbf{MB}^2 \mathbf{D} + \\
& \mathbf{B}^2 \mathbf{DM} + \mathbf{NB}^2 \mathbf{D} + \mathbf{B}^2 \mathbf{DN}) + \alpha_{18}(\mathbf{PB}^2 \mathbf{D} + \\
& \mathbf{B}^2 \mathbf{DP}^T + \mathbf{B}^2 \mathbf{DP} + \mathbf{P}^T \mathbf{B}^2 \mathbf{D}) \quad (7)
\end{aligned}$$

式(7)就是预浸织物的本构方程。

2 像框剪切试验

剪切大变形是预浸织物的主要变形特点,因此,研究主要集中于材料的剪切行为。预浸织物的剪切性能主要是由像框剪切试验来获得。像框剪切试验在 Instron5569 电子万能拉伸试验机上进行。本文对传统的像框剪切试验装置进行了改进,在铰接处采用4个滚动轴承,这样可以大大降低像框变形时的摩擦力。另外,没有采用多个螺栓穿过压片和试件的夹紧方式,而是采用两个螺栓夹紧压片的方式夹紧试件,这样可以保证试件的受力均匀,而且装卸更加方便。图1为改进的像框装置,像框装置的尺寸为150 mm×150 mm,试件材料的尺寸同像框装置,为了有效地防止在安装材料时由于夹紧螺栓而产生的试件的错动变形,将试件材料的4个角处分别减去25 mm×25 mm的正方形的面积。然后进行加载试验,其位移最大设为55 mm。

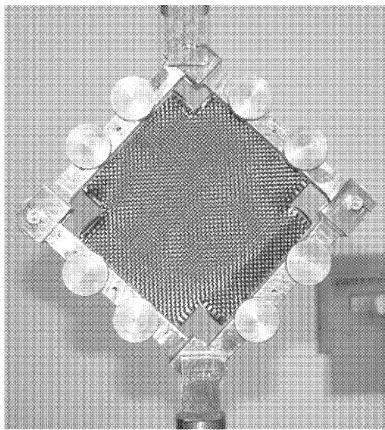


图1 像框试验装置

Fig. 1 Setup of picture frame experiment

图2是根据图1获得的像框试验的几何形状,下端固支,上端可以沿拉伸方向移动。位移 δ 和载荷 H 是在像框上端的十字交叉处测量。通过图2能够得到剪切角 γ 和位移 δ 的关系为

$$\cos \theta = \frac{\delta}{2L} + \cos(\pi/4) \quad (8)$$

$$\gamma = \pi/2 - 2\theta \quad (9)$$

式中: L 为试件的边长。

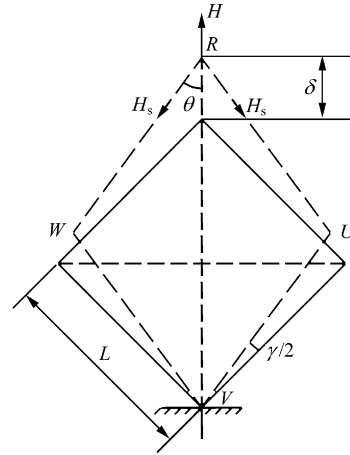


图2 像框试验的几何形状

Fig. 2 Geometry of the picture frame experiment

沿着像框方向的剪应力 τ_s 为

$$\tau_s = \frac{H_s}{Lt'_c} = \frac{H}{2Lt'_c \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)} \quad (10)$$

式中: H_s 为载荷 H 在像框方向上的分力; t'_c 为试件当前厚度,在许多文献中,认为试件的厚度是不变的,但这与试件是不可压缩的假定相矛盾,事实上,材料的厚度能够由不可压缩的假定获得,

$$t'_c = \frac{t_c}{\cos \gamma} \quad (11)$$

式中: t_c 为试件的初始厚度。

欧拉坐标系的应力张量能够表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (12)$$

式中: σ^{ij} 为应力张量分量, i, j 为哑指标; $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j$ 为协变量向量。那么在拉格朗日坐标系中应力张量表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\sigma}_{ij} \mathbf{I}_i \mathbf{I}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (13)$$

式中: $\tilde{\sigma}_{ij}$ 为拉格朗日坐标系中的应力分量; $\mathbf{I}_i, \mathbf{I}_j$ 为拉格朗日坐标系中的协变量向量。

张量是不随坐标系的改变而改变的,因此得到

$$\sigma^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = \tilde{\sigma}_{ij} \mathbf{I}_i \mathbf{I}_j \quad (14)$$

令 $\mathbf{g}_i = \mathbf{P}_i^j \mathbf{I}_j$,那么式(13)可表示为

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma^{mn} \mathbf{P}_m^i \mathbf{P}_n^j \quad (15)$$

图3为单胞在变形时的拉格朗日坐标系和欧拉坐标系间的关系。 \mathbf{P}_i^j 可从图3中求得。

$$\mathbf{P}_i^j = \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & \sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

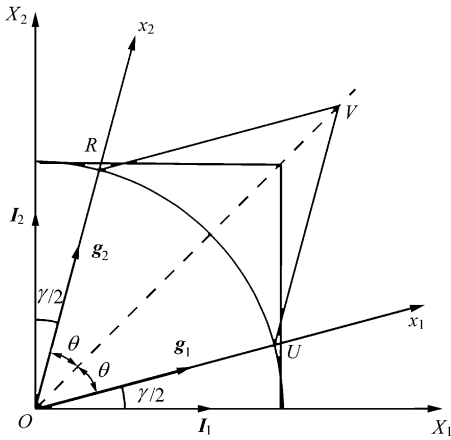


图 3 织物单胞变形前后坐标系的关系

Fig. 3 Coordinate systems for fabric unit deformation

因此,拉格朗日坐标系中的应力张量能够用欧拉坐标系中的应力张量表示为

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\gamma}{2} & \sin^2 \frac{\gamma}{2} & 2\cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin^2 \frac{\gamma}{2} & \cos^2 \frac{\gamma}{2} & 2\cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{12} \end{bmatrix} \quad (17)$$

像框剪切试验中的剪切角为 γ ,拉格朗日坐标系和欧拉坐标系之间的关系表示为

$$x_1 = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma} X_1 - \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma} X_2 \quad (18)$$

$$x_2 = -\frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma} X_1 + \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma} X_2 \quad (19)$$

$$x_3 = X_3 \cos \gamma \quad (20)$$

左 Cauchy-Green 张量 \mathbf{B} 为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 + \tan^2 \gamma & -\tan \gamma \sec \gamma & 0 \\ -\tan \gamma \sec \gamma & \sec^2 \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

变形率张量 \mathbf{D} 为

$$\mathbf{D} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{bmatrix} \tan \gamma & -\sec \gamma & 0 \\ -\sec \gamma & \tan \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -2\tan \gamma \end{bmatrix} \quad (22)$$

像框剪切试验中试件的纤维方向与像框装置的连杆方向平行,初始方向为 $\mathbf{m} = [1 \ 0 \ 0]$ 和 $\mathbf{n} = [0 \ 1 \ 0]$,变形后为 $\mathbf{m} = [\cos \frac{\gamma}{2} \ \sin \frac{\gamma}{2} \ 0]$ 和

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left[\sin \frac{\gamma}{2} \ \cos \frac{\gamma}{2} \ 0 \right], \text{代入式(7)中得到} \\ \sigma^{11} &= -p + \|\mathbf{T}_m\| \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \|\mathbf{T}_n\| \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2\alpha_2 \sec^4 \gamma - \\ &\quad \alpha_2 \sec^2 \gamma + \alpha_1 \sec^2 \gamma + 2\alpha_9 + \left(\frac{1}{2} \alpha_3 \sin \gamma \sec \gamma - \right. \\ &\quad \left. 4\alpha_{18} \sec^5 \gamma \cos^2 \frac{\gamma}{2} + 3\alpha_{18} \sec^3 \gamma \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \right. \\ &\quad \left. 2\alpha_5 \sin \gamma \sec^3 \gamma + 4\alpha_6 \sin \gamma \sec^5 \gamma - \frac{7}{2} \alpha_{18} \sec^3 \gamma + \right. \\ &\quad \left. 2\alpha_{18} \sec^5 \gamma - \alpha_{12} \cos \gamma + \alpha_{18} \sec \gamma - \alpha_{14} \sec \gamma + \right. \\ &\quad \left. 2\alpha_{17} \sec^3 \gamma \sin \gamma - \alpha_6 \sec^3 \gamma \sin \gamma + \alpha_{13} \sec \gamma \sin \gamma \right) \dot{\gamma} + \\ &\quad \left(4\alpha_8 \sec^6 \gamma + \frac{1}{2} \alpha_4 \sec^2 \gamma + 2\alpha_7 \sec^4 \gamma - \alpha_{16} \sec^2 \gamma \sin \gamma - \right. \\ &\quad \left. \frac{3}{2} \alpha_7 \sec^2 \gamma + \alpha_{15} \sec^2 \gamma - \frac{1}{2} \alpha_{15} - \frac{1}{4} \alpha_4 - \right. \\ &\quad \left. 4\alpha_8 \sec^4 \gamma + \frac{1}{2} \alpha_8 \sec^2 \gamma \right) \dot{\gamma}^2 \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{12} &= \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{T}_m\| \sin \gamma + \|\mathbf{T}_n\| \sin \gamma \right) - \alpha_1 \sin \gamma \sec^2 \gamma - \\ &\quad 2\alpha_2 \sin \gamma \sec^4 \gamma + 2\alpha_{10} + \left(2\alpha_{18} \sec^3 \gamma \sin \gamma + \right. \\ &\quad \left. \alpha_5 \sec \gamma - \alpha_{11} \cos \gamma - 2\alpha_{17} \sec^3 \gamma - 4\alpha_6 \sec^5 \gamma + \right. \\ &\quad \left. 3\alpha_6 \sec^3 \gamma - \frac{1}{2} \alpha_3 \sec \gamma + \alpha_{14} \sec \gamma \sin \gamma + \right. \\ &\quad \left. \alpha_{17} \sec \gamma - 2\alpha_5 \sec^3 \gamma - \alpha_{13} \sec \gamma \right) \dot{\gamma} + \\ &\quad \left(-\frac{1}{2} \alpha_7 \sec^2 \gamma \sin \gamma - \alpha_{15} \sec^2 \gamma \sin \gamma + 2\alpha_8 \sin \gamma \sec^4 \gamma + \right. \\ &\quad \left. \alpha_{16} \sec^2 \gamma - \frac{1}{2} \alpha_{16} - \frac{1}{2} \alpha_4 \sin \gamma \sec^2 \gamma - \right. \\ &\quad \left. 2\alpha_7 \sin \gamma \sec^4 \gamma - 4\alpha_8 \sin \gamma \sec^6 \gamma \right) \dot{\gamma}^2 = \sigma^{21} \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{22} &= -p + \|\mathbf{T}_m\| \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \|\mathbf{T}_n\| \cos^2 \frac{\gamma}{2} + 2\alpha_2 \sec^4 \gamma - \\ &\quad \alpha_2 \sec^2 \gamma + \alpha_1 \sec^2 \gamma + 2\alpha_9 + \left(-\alpha_6 \sin \gamma \sec^3 \gamma + \right. \\ &\quad \left. 4\alpha_{18} \sec^5 \gamma \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \alpha_3 \sin \gamma \sec \gamma + \right. \\ &\quad \left. 2\alpha_5 \sin \gamma \sec^3 \gamma + 4\alpha_6 \sin \gamma \sec^5 \gamma - 2\alpha_{18} \sec^5 \gamma - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \alpha_{18} \sec^3 \gamma - \alpha_{12} \cos \gamma + \alpha_{18} \sec \gamma - \alpha_{14} \sec \gamma - \right. \\ &\quad \left. 3\alpha_{18} \sec^3 \gamma \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \alpha_{13} \sec \gamma \sin \gamma + 2\alpha_{17} \sec^3 \gamma \sin \gamma \right) \cdot \\ &\quad \dot{\gamma} + \left(\frac{1}{2} \alpha_8 \sec^2 \gamma + 4\alpha_8 \sec^6 \gamma + 2\alpha_7 \sec^4 \gamma + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \alpha_4 \sec^2 \gamma - \frac{1}{4} \alpha_4 - \frac{3}{2} \alpha_7 \sec^2 \gamma + \alpha_{15} \sec^2 \gamma - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \alpha_{15} - 4\alpha_8 \sec^4 \gamma - \alpha_{16} \sec^2 \gamma \sin \gamma \right) \dot{\gamma}^2 \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{33} &= -p + \alpha_1 \cos^2 \gamma + \alpha_2 \cos^4 \gamma + \\ &\quad \left(-\alpha_3 \tan \gamma - 2\alpha_5 \tan \gamma \cos^2 \gamma - 2\alpha_6 \tan \gamma \cos^4 \gamma \right) \dot{\gamma} + \\ &\quad \left(-\alpha_4 \tan^2 \gamma - 2\alpha_7 \tan^2 \gamma \cos^2 \gamma - 2\alpha_8 \tan^4 \gamma \cos^4 \gamma \right) \dot{\gamma}^2 \quad (26) \end{aligned}$$

其余的应力张量均为 0。

式(23)~式(26)就是试件在发生剪切变形时,式(7)的分量形式。表明应力与剪切角和剪切角的变化率均有关系。

在像框剪切试验中,由于预浸织物的厚度尺寸远远小于材料平面长、宽尺寸,因此,可以看做是平面问题,对于欧拉坐标系,能够得到应力分量与试件边界剪应力 τ_s 的关系为

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sec \gamma \end{bmatrix} \tau_s \quad (27)$$

拉格朗日坐标系下的应力分量与试件边界剪应力 τ_s 的关系为

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan \gamma \\ \tan \gamma \\ \sec \gamma \end{bmatrix} \tau_s \quad (28)$$

本文所进行的像框试验中的拉伸速率分别取为 10, 50, 100, 300 mm/min, 相应的载荷-位移关系如图 4 所示。

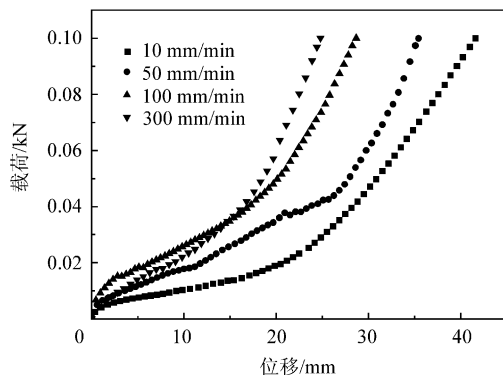


图 4 不同拉伸速率下的载荷-位移图

Fig. 4 Curves of load vs displacement under different displacement rates

从图 4 可以看出随着拉伸速率的增大,达到相同的最大载荷时,所对应的位移逐渐减少。同时从图 4 能够看出载荷和位移呈非线性关系。

预浸织物在进行像框剪切试验时,通过式(8)和式(9)计算得到本试验中剪切角最大能达到 36° 。另外,通过剪切锁定角计算公式^[14]得到剪切锁定角为 25° 。在试验中主要可以分为两个阶段^[14]:剪切角在剪切锁定角之前为剪切阶段,剪切角在剪切锁定角之后为挤压阶段。在剪切阶段,由于黏性树脂的存在,树脂会阻碍织物纤维发生变形,剪切阶段的外力载荷主要是

用来平衡树脂阻碍纤维发生变形时的力。在挤压阶段,由于树脂已经被织物纤维从材料中挤压出去,那么外力载荷主要是用来平衡织物纤维之间相互挤压的力。因此在考虑黏弹性问题的时候,主要是研究黏性树脂起作用的剪切阶段(通过计算剪切阶段也就是发生在位移为 40.8 mm 之前)。

另外,通过式(8)和式(9)计算能够得到

$$\dot{\delta} = L \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) \dot{\gamma} \quad (29)$$

从式(29)能够得到随着拉伸速率的增大,剪切角的变化率增加,相应材料的黏性增大;在相同拉伸速率下,随着剪切角的增大,剪切角的变化率减小,相应材料的黏性降低。另外,从图 4 可以看出,在剪切阶段,达到相同位移的时候,随着拉伸速率的增大外力载荷也相应增大,也就是用来平衡树脂阻碍纤维发生变形的力越来越大,即材料的黏性逐渐增大。

式(27)表明在欧拉坐标系下正应力为零,在拉格朗日坐标系下,通过计算,正应力远远小于剪应力。本文只给出拉伸速率为 10 mm/min 时的像框剪切试验的剪应力、正应力与剪切角变化率的拟合曲线,分别如图 5 和图 6 所示。其他拉伸速率的数据值与拉伸速率为 10 mm/min 的数据值不同,但是拟合曲线与图 5 和图 6 相似,在此不再给出。通过多项式的拟合能够得到拉伸速率为 10 mm/min 的剪应力、正应力与剪切角变化率的数值表达式分别为

$$\sigma_{10}^2 = 12\,587.67 - 1.66 \times 10^7 \dot{\gamma} + 5.51 \times 10^9 \dot{\gamma}^2 \quad (30)$$

$$\sigma_{10}^1 = 9\,255.25 - 1.15 \times 10^7 \dot{\gamma} + 3.56 \times 10^9 \dot{\gamma}^2 \quad (31)$$

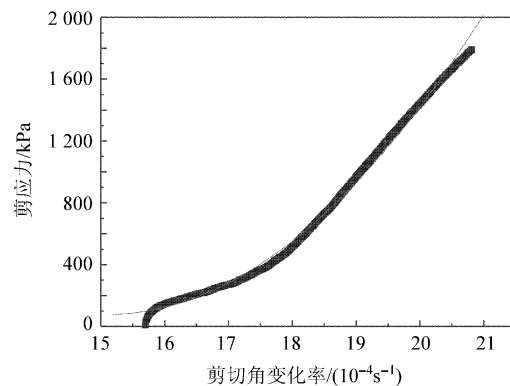


图 5 剪应力-剪切角变化率关系图

Fig. 5 Curve of shear stress vs rate of shear angle

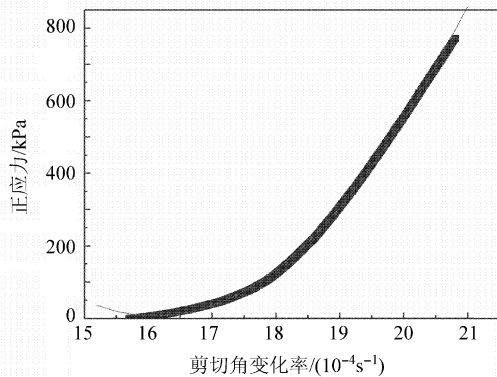


图6 正应力-剪切角变化率关系图

Fig. 6 Curve of direct stress vs rate of shear angle

对于不同的拉伸速率,式(30)和式(31)中的系数是不同的,但是相应的形式是一样的。拉伸速率为50,100,300 mm/min的剪应力、正应力与剪切角变化率的数值表达式分别为

$$\sigma_{50}^{12} = 12\,626.64 - 3.45 \times 10^6 \dot{\gamma} + 2.38 \times 10^8 \dot{\gamma}^2$$

$$\sigma_{50}^{11} = 11\,086.73 - 2.78 \times 10^6 \dot{\gamma} + 1.74 \times 10^8 \dot{\gamma}^2$$

$$\sigma_{100}^{12} = 27\,031.76 - 3.60 \times 10^6 \dot{\gamma} + 1.21 \times 10^8 \dot{\gamma}^2$$

$$\sigma_{100}^{11} = 17\,158.64 - 2.16 \times 10^6 \dot{\gamma} + 6.81 \times 10^7 \dot{\gamma}^2$$

$$\sigma_{300}^{12} = 59\,945.72 - 2.58 \times 10^6 \dot{\gamma} + 2.78 \times 10^7 \dot{\gamma}^2$$

$$\sigma_{300}^{11} = 26\,363.44 - 1.10 \times 10^6 \dot{\gamma} + 1.14 \times 10^7 \dot{\gamma}^2$$

这些表达式反映了预浸织物的黏弹性的非线性行为,不同拉伸速率,由于本构方程中材料参数不同,其表达式也是不同的,需要根据试验来确定相应的参数,从图5和图6能够看出试验曲线与拟合曲线吻合很好,本构方程较好地描述了预浸织物的材料性质。

3 结论

通过不变量理论,导出了预浸织物材料的非线性本构方程,通过像框剪切试验得出材料相应的剪切性能,并且推导出了在剪切变形时本构方程的具体表达形式,同时,通过像框试验的最终结果得到了本构方程中的材料参数,试验结果与方程拟合结果吻合很好。此非线性本构方程相对于前人推导的线性本构方程来说,较好地表明了预浸机织织物的基本性质,同时也描述了材料的树脂和纤维之间以及经向和纬向纤维之间的相互作用。本构方程的导出,对于了解预浸织物的性质提供了理论依据,同时为以后研究空间充气结构的静态、动态及热分析等奠定了一定的理论基础。

参 考 文 献

[1] Ishikawa T, Chou T W. Elastic behavior of woven hybrid

materials [J]. Journal of Composite Materials, 1982, 16 (1): 2-19.

[2] Ishikawa T, Chou T W. One-dimensional micromechanical analysis of woven fabric composites [J]. AIAA Journal, 1983, 21(12): 1714-1721.

[3] Ishikawa T, Chou T W. In plane thermal expansion and thermal bending coefficients of fabric composites [J]. Journal of Composite Materials, 1983, 17(2): 92-104.

[4] Karayaka M, Kurath P. Deformation and failure behavior of woven composite laminates [J]. Journal of Engineering Material Technology, 1994, 1160(2):222-232.

[5] Naik N K, Ganesh V K. Failure behavior of plain weave fabric laminates under on-axis uniaxial tensile loading: II—analytical predictions [J]. Journal of Composite Materials, 1996, 30(16): 1779-1821.

[6] Rogers T G. Rheological characterization of anisotropic materials [J]. Composite, 1989, 20(1): 21-27.

[7] Spencer A J M. Theory of fabric-reinforced viscous fluids [J]. Composites Part A, 2000, 31(12): 1311-1321.

[8] McGuinness G B, ÓBrádaigh C M. Characterization of thermoplastic composite melts in rhombus-shear: the picture-frame experiment [J]. Composites Part A, 1998, 29 (1-2): 115-132.

[9] Harrison P, Clifford M J. Shear characterization of viscous woven textile composites: a comparison between picture frame and bias extension experiments [J]. Comp Sci Tech, 2004, 64(7-8): 1453-1465.

[10] Spencer A J M. A theory of viscoplasticity for fabric-reinforced composites [J]. J Mech Phys Solids, 2001, 49 (11): 2667-2687.

[11] McGuinness G B, ÓBrádaigh C M. Development of rheological models for forming flows and picture-frame shear testing of fabric reinforced thermoplastic sheets [J]. J Non-Newtonian Mech, 1997, 73(1): 1-28.

[12] Nguyen M, Herszberg I, Paton R. The shear properties of woven carbon fabric [J]. Composite Structures, 1999, 47(1): 767-779.

[13] Merodio J. On constitutive equations for fiber-reinforced nonlinearly viscoelastic solids [J]. Mechanics Research Communication, 2006, 33(6): 764-770.

[14] 林国昌. 织物/黏性树脂复合材料本构行为研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007.

Lin Guochang. Research on the constitutive behavior of fabric reinforced viscous resin composite [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2007. (in Chinese)

作者简介:

杜星文(1937—) 男,教授,博士生导师。主要研究方向:柔性复合材料、空间充气结构。

Tel: 0451-86416505

E-mail: duxw@hit.edu.cn

(责任编辑:蔡斐,杨冬)