

文章编号: 1001—4322(2001)03—0267—05

# 椭圆平顶高斯光束及其传输特性

蔡阳健, 林 强

(浙江大学 物理系光学研究所, 浙江 杭州 310028)

**摘 要:** 用张量光学方法定义了三维不可分离变量的椭圆平顶高斯光束(EFGB), 导出了这种光束经过非轴对称光学系统的传输公式及相应的张量 ABCD 定律, 并对 EFGB 经过自由空间的传输作了数值计算。结果表明, EFGB 的传输特性依赖于阶次, 而且耦合 EFGB 的光强分布在传输过程中会发生旋转。

**关键词:** 椭圆平顶高斯光束; 张量 ABCD 定律; 光束传输  
**中图分类号:** TN 241 **文献标识码:** A

在激光的许多应用中, 例如激光驱动核聚变, 激光材料加工等, 常要求光束的空间强度分布为均匀的。超高斯光束能满足这种要求, 但计算它的传输和变换没有解析式, 而需借助繁琐的数值积分<sup>[1,2]</sup>。另一种空间光强均匀分布的光束是 Gori 提出的平顶高斯光束(FGB), 这种光束可以展开成有限项的厄米-高斯模或拉盖尔-高斯模的叠加形式<sup>[3]</sup>。随后, Bagini 等研究了轴对称 FGB 的传输特性<sup>[4]</sup>, 吕百达等研究了矩形对称 FGB 通过近轴光学系统的传输及其与超高斯光束的对比<sup>[5-9]</sup>, Amarande 等研究了 FGB 的光束传输因子和 Kurtosis 参量<sup>[10]</sup>。但以上对 FGB 的研究均限于轴对称或可分离变量的情况。本文利用张量光学方法定义了具有普遍意义的三维不可分离变量的椭圆平顶高斯光束(EFGB), 导出了 EFGB 经过非轴对称光学系统的传输公式, 给出了适用于椭圆平顶高斯光束的张量 ABCD 定律。这一传输公式在一定条件下可退化到一维情况。作为一个应用例子, 本文还计算了 EFGB 在自由空间的传输特性。

## 1 椭圆平顶高斯光束的定义

Gori 提出的平顶高斯光束在  $z = 0$  处的场分布为<sup>[3,4]</sup>

$$E(r, 0) = \exp\left[-\frac{(N+1)r^2}{w_0^2}\right] \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} \left[\frac{(N+1)r^2}{w_0^2}\right]^m, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

其中  $N$  为 FGB 的阶次。当  $N = 0$  时(1)式退化为高斯光束的场分布,  $w_0$  为相应高斯光束的束腰半径。

将(1)式中的  $r^{2m}$  按拉盖尔函数展开为如下形式

$$r^{2m} = \frac{m!}{2^m} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m}{n} L_n(2r^2) \quad (2)$$

其中  $\binom{m}{n}$  为二项式系数。把(2)式代入(1)式, 有

$$E(r, 0) = \exp\left[-\frac{(N+1)r^2}{w_0^2}\right] \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m}{n} \frac{1}{2^m} L_n\left(\frac{2(N+1)r^2}{w_0^2}\right) \quad (3)$$

显然(3)式可看成多个拉盖尔-高斯模的叠加形式, 此即拉盖尔平顶高斯光束。根据拉盖尔-高斯模的传输公式, 可得到拉盖尔平顶高斯光束在自由空间中的传输公式为

$$E(r, z) = \frac{w_N(0)}{w_N(z)} \exp[i(kz - \Phi_N(z))] \exp\left[-\frac{ik}{2q_N} r^2\right] \sum_{n=0}^N \sum_{m=n}^N (-1)^n \binom{m}{n} \frac{1}{2^m} L_n\left[\frac{2r^2}{w_N^2(z)}\right] \exp[-i2n\Phi_N(z)] \quad (4)$$

收稿日期: 2000-08-25; 修订日期: 2001-04-02

基金项目: 霍英东教育基金会青年教师基金(71009); 浙江省自然科学基金青年科技人才专项基金(RC98029); 国家自然科学基金(60078003)资助课题

作者简介: 蔡阳健(1977-), 男, 硕士研究生, 从事激光物理研究;

林强(1964-), 教授, 博导, 从事激光物理研究; E-mail: qlin@mail.hz.zj.cn.

其中,  $k$  为波矢,  $q_N^{-1} = \frac{1}{R_N(z)} - \frac{i\lambda}{\pi w_N^2(z)}$ ,  $w_N(z) = w_N(0) \sqrt{1 + \left(\frac{z\lambda}{\pi w_N^2(0)}\right)^2}$ ,  $w_N(0) = w_0/\sqrt{N+1}$ ,  
 $R_N(z) = z \left[ 1 + \left(\frac{\pi w_N^2(0)}{\lambda z}\right)^2 \right]$ ,  $\Phi_N(z) = \arctan\left[\frac{\lambda z}{\pi w_N^2(0)}\right]$ 。

(1) 式和 (4) 式表示的是轴对称的平顶高斯光束。对于非轴对称情况, (4) 式将不适用。根据张量光学<sup>[11]</sup>的方法,  $N$  阶椭圆平顶高斯光束 (EFGB) 可定义为

$$E(r, 0) = A_0 \exp\left[i \frac{k}{2} r^T Q_N^{-1} r\right] \prod_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left[i \frac{k}{2} r^T Q_N^{-1} r\right]^n \quad (5)$$

其中,  $r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ;  $Q_N^{-1} = (N+1)Q^{-1}$ ,  $Q_N^{-1}$  可称为 EFGB 的光束复曲率张量,  $Q^{-1}$  为高斯光束的复曲率张量, 它可表示为<sup>[11, 12]</sup>

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_{xx}^{-1} & q_{xy}^{-1} \\ q_{xy}^{-1} & q_{yy}^{-1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中,  $q_{xx}^{-1}$ ,  $q_{yy}^{-1}$ ,  $q_{xy}^{-1}$  均为复数。因此, 一个 EFGB 可用一个张量  $Q^{-1}$  和一个标量  $N$  来表征。下面我们将推导出 EFGB 经过非轴对称 ABCD 光学系统的变换公式。

## 2 椭圆平顶高斯光束经过 ABCD 系统的变换

一般非轴对称光学系统的衍射积分公式可表示为张量的形式<sup>[11, 12]</sup>

$$E_2(r_2) = - \frac{i}{\lambda} [\det(B)]^{-1/2} \iint E_1(r_1) \exp(-ikl) dr_1 \quad (7)$$

其中  $l$  为程函, 它可表示为  $l = l_0 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}^T R \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ ,  $l_0$  为光学系统的轴上光程,  $R$  为  $4 \times 4$  阶转置对称矩阵 (称为程函矩阵)

$$R = \begin{pmatrix} B^{-1}A & -B^{-1} \\ C - DB^{-1}A & DB^{-1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中  $A, B, C, D$  为非轴对称光学系统的分块矩阵。

把 (5) 式作为  $E_1(r_1)$  代入 (7) 式, 进行矢量积分, 并利用高斯光束的张量 ABCD 定理<sup>[11, 12]</sup>, 简化后可得

$$E_2(r_2) = A_0 \exp(-ikl_0) [\det(A + BQ_{1,N}^{-1})]^{-1/2} \exp\left[-\frac{ik}{2} r_2^T Q_{2,N}^{-1} r_2\right] \\ \times \prod_{n=0}^N \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{n!} [\det((I + Q_{1,N} B^{-1} A))]^{-n} H_{2n} \left[\sqrt{-\frac{ik}{2} r_2^T B^{-1T} (Q_{1,N}^{-1} + B^{-1} A)^{-1} B^{-1} r_2}\right] \quad (9)$$

其中

$$Q_{2,N}^{-1} = (C + DQ_{1,N}^{-1})(A + BQ_{1,N}^{-1})^{-1} \quad (10)$$

$Q_{1,N}$  为  $Q_{1,N}^{-1}$  的逆矩阵,  $I$  为  $2 \times 2$  阶单位矩阵。 (9) 式即为椭圆平顶高斯光束经过非轴对称光学系统的传输公式。 (10) 式可称为椭圆平顶高斯光束经过非轴对称光学系统的张量 ABCD 定理。

对于一维情况,  $Q_{1,N}^{-1}$  退化为  $(N+1)q_x^{-1}$ ;  $A, B, C, D$  退化为轴对称光学系统的矩阵元  $a, b, c, d$ , 则 (9) 式可以退化为

$$E(x, z) = \frac{A_0}{\sqrt{\frac{2b(N+1)}{ikw_0^2} + a}} \exp(-ikl_0) \exp\left[-\frac{ikd}{2b} x^2\right] \exp\left[-\frac{(kx/b)^2}{4\left(\frac{N+1}{w_0^2} + \frac{ika}{2b}\right)}\right] \\ \times \prod_{n=0}^N \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{n!} \left[1 + \frac{ikaw_0^2}{2b(N+1)}\right]^{-n} H_{2n} \left[\frac{kx/b}{2\sqrt{\left(\frac{N+1}{w_0^2} + \frac{ika}{2b}\right)}}\right] \quad (11)$$

(11) 式和文献[7]所得的结果是一致的。

### 3 EFGB 在自由空间中的传输特性

自由空间的各个分块矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

我们分两种情况来讨论。第一种情况, 我们取  $q_{xy}^{-1} = 0$ , 此时  $Q_{i,N}^{-1}$  没有交叉项, 即

$$Q_{i,N}^{-1} = \begin{pmatrix} (N + 1)q_{xx}^{-1} & 0 \\ 0 & (N + 1)q_{yy}^{-1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

把(12)和(13)式代入(9)式, 可以得到了不同  $z$  处具有代表意义的 EFGB 的三维相对光强分布图及相应的等值线图, 如图 1 所示。传输距离  $z$  以  $x$  方向的瑞利距离  $z_x$  为单位,  $z_x = \pi w_{0x}^2 / \lambda$ , 计算中取  $w_{0x} = 1\text{mm}, w_{0y} = 2\text{mm}, \lambda = 632.8\text{nm}, N = 10$ 。

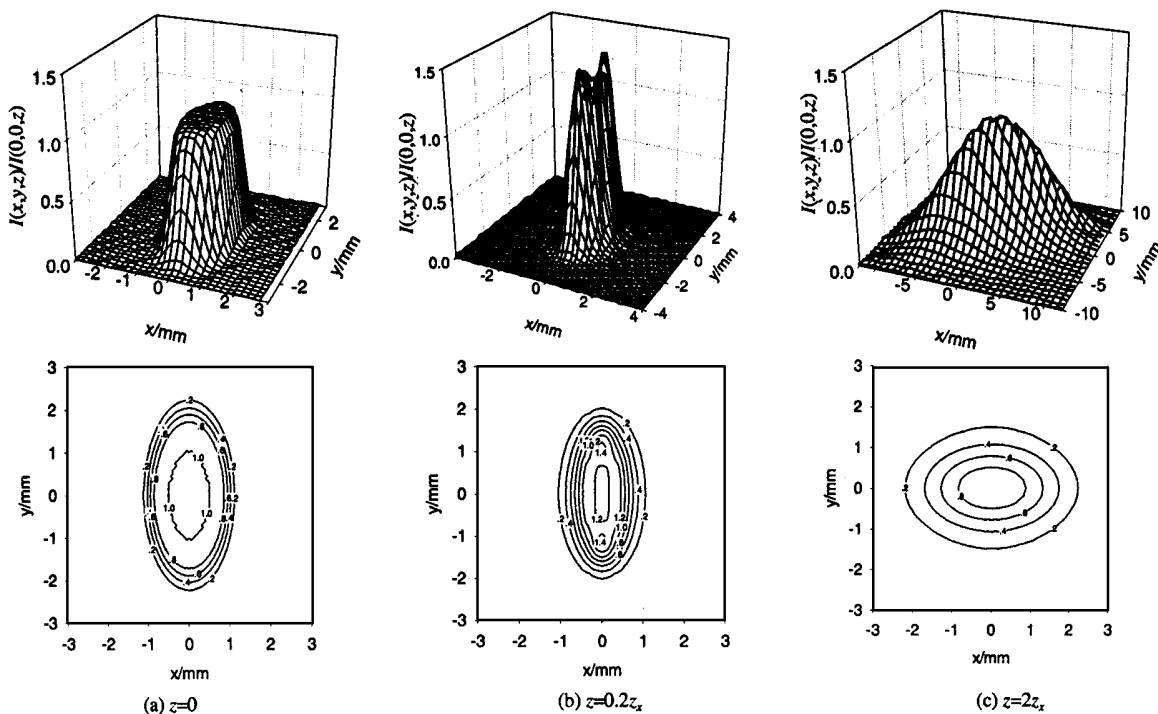


Fig 1 3-D relative intensity distribution and corresponding contour graph of EFGB when  $N = 10$  at several propagation distances

图 1  $N = 10$  的 EFGB 在不同  $z$  处的三维相对光强分布及等值线图

由图 1 及计算结果可以看出: 在近场, EFGB 的平顶化部分消退较慢, 平顶部分由平变凹, 再由凹变凸; 随着传输距离  $z$  的增大, EFGB 趋于椭圆高斯光束的光强分布, 当  $z$  增大至  $2z_x$  时, EFGB 的光强分布已完全退化为椭圆高斯光束的光强分布。此外, 由等值线图可以看出, 由里到外, 各等值线随传输距离  $z$  的变化的快慢和幅度是不一致的, 外面的等值线比内部的等值线平缓, 这是 EFGB 传输特性的独特之处。此外, 通过比较不同阶的 EFGB 的传输特性, 我们发现, 在传输过程中, 不同阶的 EFGB 的平顶部分均要消退, 高阶 EFGB 消退更快, 且高阶 EFGB 的传输稳定性比低阶 EFGB 要差, 在远场不同阶的 EFGB 均趋于稳定的椭圆高斯光束。

第二种情况, 也是最一般的情况,  $Q_{i,N}^{-1}$  存在交叉项, 即

$$Q_{i,N}^{-1} = (N + 1) \begin{pmatrix} q_{xx}^{-1} & q_{xy}^{-1} \\ q_{xy}^{-1} & q_{yy}^{-1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

我们称此时的光束为耦合 EFGB, 把(12)式和(14)式代入(9)式, 可以得到耦合 EFGB 在不同  $z$  处具有代表意义的三维相对光强分布图及相应的等值线图, 如图 2 所示。传输距离  $z$  以  $x$  方向的瑞利距离  $z_x$  为单位,  $z_x = \pi w_{0x}^2 / \lambda$ 。在计算中我们取  $w_{0x} = 1\text{mm}$ ,  $w_{0y} = 2\text{mm}$ ,  $\lambda = 632.8\text{nm}$ ,  $N = 10$ 。

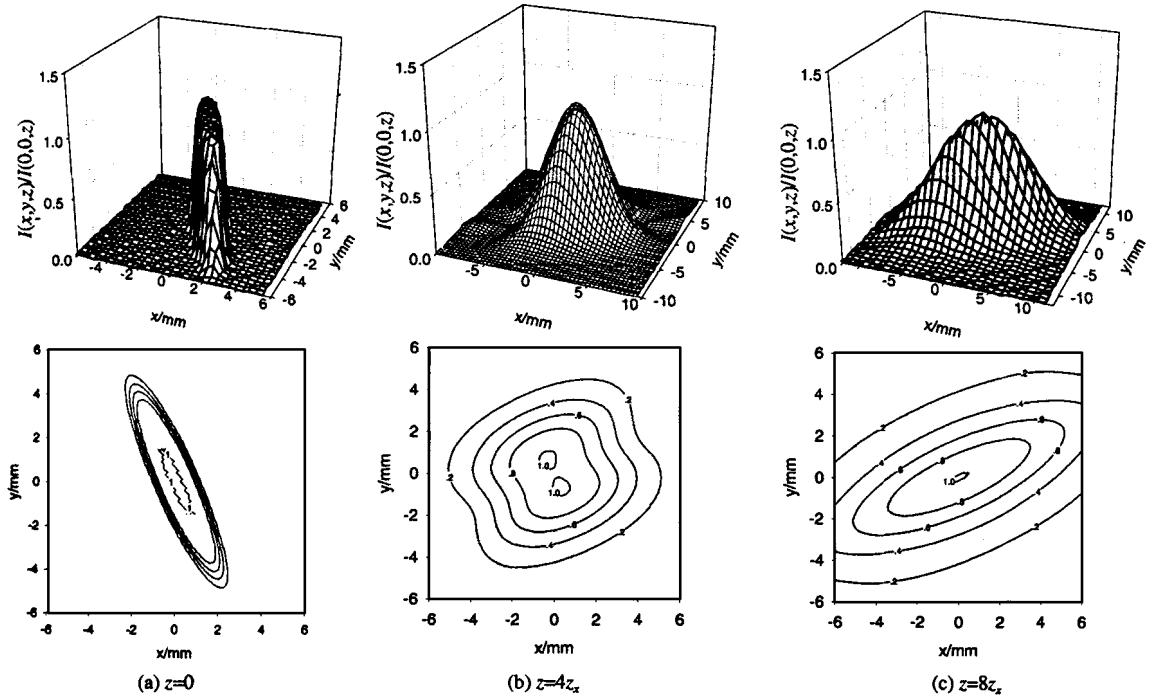


Fig 2 3-D relative intensity distribution and corresponding contour graph of the coupled EFGB when  $N = 10$  at several propagation distances

图 2  $N = 10$  的耦合 EFGB 在不同  $z$  处的三维相对光强分布和等值线图

从图 2 可知, 耦合 EFGB 不但具有 EFGB 的一般性质, 它还有自己独特的传输性质, 即它的光强分布在传输过程中会旋转。

为了确认公式(9)的正确性, 我们直接运用衍射积分公式(7)对 EFGB 的传输进行了数值积分, 得出的结果与用(9)式得出的结果完全一致。

## 4 结 论

本文用张量光学方法定义了三维不可分离变量的椭圆平顶高斯光束(EFGB), 通过矢量积分导出了 EFGB 经过非轴对称光学系统的传输公式, 给出了 EFGB 经过非轴对称光学系统的张量 ABCD 定律, 同时研究了 EFGB 在自由空间中的传输特性。结果表明, EFGB 具有独特的传输特性, 其光强分布在小传输距离内具有较好的稳定性, 随着传输距离的增大, 平顶部分逐渐消退, EFGB 最终退化为椭圆高斯光束。不同阶的 EFGB 具有不同的传输稳定性。此外, 耦合 EFGB 的光强分布在传输过程中会发生旋转。

## 参考文献:

- [1] Bowers M S. Diffractive analysis of unstable optical resonator with super-Gaussian mirrors[J]. *Opt Lett*, 1992, **19**: 1319-1321.
- [2] Perrone M R, Piegari A. On the super-Gaussian unstable resonators for high-gain short pulse laser media[J]. *IEEE J Quantum Electron*, 1993, **29**: 1423-1427.
- [3] Gori F. Flattened gaussian beams[J]. *Opt Commun*, 1994, **107**: 335-341.
- [4] Bagini V, Borghi R, Gori F, et al. Propagation of axially symmetric flattened Gaussian beam s[J]. *Optical society of American A*, 1996, **13**(7): 1385-1394.

- [5] Lü B D, Luo S R, Zhang B. Propagation of flattened Gaussian beam with rectangular symmetry passing through a paraxial optical ABCD system [J]. *Opt Commun*, 1999, **164**: 1-6
- [6] Lü B D, Luo S R, Zhang B. Propagation of three-dimensional flattened Gaussian beams [J]. *J Mod Opt*, 1999, **46**: 1753-1762
- [7] Lü B D, Luo S R. General propagation equation of flattened Gaussian beams [J]. *J Opt Soc Am A*, 2000, **17**: 2001-2004
- [8] Lü B D, Luo S R, et al. A Comparison between the flattened Gaussian beam and super-Gaussian beam [J]. *Optik*, 1998, **110**(6): 285-287.
- [9] 吕百达, 罗时荣, 张彬. 平顶高斯光束的相关概念和对称化变换 [J]. *强激光与粒子束*, 1999, **4**: 400-404  
[Lü B D, Luo S R, Zhang B. Flattened Gaussian beams and their symmetrical transformations. *High power laser and particle beams*, 1999, **11**(4): 400-404] (in Chinese)
- [10] Amarante S A. Beam propagation factor and the kurtosis parameter of flattened Gaussian beams [J]. *Opt Commun*, 1996, **129**: 311-317.
- [11] 林强, 王绍民. *张量光学* [M]. 杭州: 杭州大学出版社, 1994. 9-15  
[Lin Q, Wang S M. *Tensor Optics*. Hangzhou: Hangzhou University Press, 1994. 9-15] (in Chinese)
- [12] 林强, 陆旋辉, 王绍民. 非轴对称光学系统的 ABCD 定律 [J]. *光学学报*, 1998, **8**: 658-662  
[Lin Q, Lu X H, Wang S M. ABCD law for nonsymmetrical optical system. *Acta Optica Sinica*, 1998, **8**: 658-662] (in Chinese)

## Elliptical flattened Gaussian beam and its propagation characteristics

CAI Yang-jian, LIN Qiang

(Institute of Optics, Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310028, China)

**Abstract** The elliptical flattened Gaussian beam (EFGB) is defined by using tensor method. The propagation formula and corresponding tensor ABCD law of EFGB passing through nonsymmetrical paraxial optical system is derived through vector integration. By using this formula, the propagation characteristics of EFGB through free-space are calculated and discussed. The results show that the propagation property is very different from those of circular flattened Gaussian beam or elliptical Gaussian beam, and is dependent on the order  $N$ . In the near field, the intensity distribution remains flat. With the increase of propagation distance, the flattened part degenerates. In the far field, EFGB tends to be elliptical Gaussian beam. Furthermore, beam spots of coupled EFGB rotate with propagation distance  $z$ .

**Key words:** elliptical flattened Gaussian beam; tensor ABCD law; beam propagation