

# 完全填充手征等离子体波导的 电磁波传输特性\*

杨世信 龚建民 盛克敏 方寅任 朗

(西南交通大学计算机工程与通信学院, 成都, 610031)

**摘 要** 应用纵向分量法推导出了柱坐标系下均匀手征等离子体媒质中电磁场的横向分量与纵向分量的关系, 并导出了纵向分量满足的波动方程, 在柱坐标系下求解该波动方程并应用圆柱状导体边界条件导出了完全填充手征等离子体金属圆波导的色散方程, 数值求解色散方程给出了模式色散图, 得到了新的有意义的结果。

**关键词** 手征等离子体 柱形波导 波动方程

近十年来已有较多文献报道了手征媒质波导特性的研究<sup>[1-8]</sup>, 手征特性在微波器件和光波导方面具有潜在的应用价值, 尤其是手征特性将显著地影响波导传输常数, 可望在制造光波导传输控制器件方面得到实际应用。但填充的手征媒质一旦确定, 其手征特性也相对确定, 因此研究如何有效地控制手征特性就变得非常重要。为了解决这一问题, Engheta<sup>[1]</sup>等人提出将手征媒质混在处于外磁场的等离子体中, 通过改变外场或手征媒质的手征导纳的大小来控制手征等离子体波导或手征等离子体器件的传输特性。因此研究由这种混合媒质填充不同波导结构的传输特性随媒质参数的变化规律, 在光通讯日益发展的今天就具有特别重要的理论与实践意义<sup>[9,10]</sup>。

## 1 基本理论

手征等离子体媒质的本构关系<sup>[1]</sup>为  $D = \epsilon E + j\xi B$ ,  $H = j\xi E + B/\mu$ , 其中  $\mu$  是磁导率,  $\xi$  是手征导纳,  $\epsilon$  是磁化等离子体介电张量<sup>[10]</sup>,  $\epsilon = \epsilon_0 [1 - \omega_p^2 / (\omega^2 - \omega^2)]$ ;  $g = \epsilon_0 [\omega_c \omega / (\omega^2 - \omega^2)]$ ;  $\epsilon = \epsilon_0 (1 - \omega_p^2 / \omega^2)$ 。它们是等与等离子体频率  $\omega_p$  ( $\omega_p^2 = ne^2/\epsilon_0 m$ ) 和电子回旋频率  $\omega_c$  ( $\omega_c = eB_0/m$ ) 相关联的,  $n$  是电子密度,  $\epsilon_0$  是真空中介电常数,  $m$  是电子质量,  $B_0$  是沿  $z$  向外加的磁感应强度<sup>[1,5]</sup>。

如图1所示, 设沿  $z$  向的传输常数为  $\beta$ , 则时谐电磁场沿  $z$  向传输的导波场的任意场分量所含时间  $t$  和距离因子  $z$  为  $\exp(j\omega t - j\beta z)$ 。将任意的场矢量表示为与  $z$  向垂直和平行的横向场与纵向场之和并用下标  $t$  表示横向, 下标  $z$  表示纵向。在无源均匀手征等离子体媒质中, 由无源区 Maxwell 方程组出发并用纵向场法推导可得

$$E_t = j\omega \nabla_t E_z + \hat{b}_z \times \nabla_t E_z + c \nabla H_z + j d \hat{z} \times \nabla H_z \quad (3)$$

$$H_t = \epsilon \nabla E_z + j f \hat{z} \times \nabla E_z + j a \nabla H_z + \hat{b}_z \times \nabla H_z \quad (4)$$

且  $E_z, H_z$  满足如下方程

\* 国家自然科学基金资助项目(合同号69508004)  
1997年8月25日收到原稿, 1997年11月4日收到修改稿。  
杨世信, 男, 1962年12月出生, 博士研究生。

$$\nabla_{\perp}^2 E_z = P_1 E_z + jP_2 H_z, \quad \nabla_{\perp}^2 H_z = jP_3 E_z + P_4 H_z \quad (5)$$

为了便于求解  $E_z$  和  $H_z$  可作如下的变量代换

$$E_z = U_+ + U_-, \quad H_z = j(q_+ U_+ + q_- U_-) \quad (6)$$

如令  $U_+$  与  $U_-$  满足如下方程,

$$\nabla_{\perp}^2 U_{\pm} + S_{\pm}^2 U_{\pm} = 0 \quad (7)$$

可得

$$S_{\pm}^2 = [- (P_1 + P_4) \pm \sqrt{(P_1 - P_4)^2 - 4P_2 P_3}] / 2, \quad q_{\pm} = (P_1 + S_{\pm}^2) / P_2 \quad (8)$$

(3)~(5)式中各个系数表征如下:

$$a = - [\omega^2 \beta \mu (\epsilon + 2\mu \xi) - \beta^3 + \omega^2 \mu^2 g \xi] / \Delta; \quad b = - \omega [\beta^2 \mu \xi + \omega \beta g \mu + \omega^2 \mu^2 \epsilon \xi] / \Delta;$$

$$c = - \omega^2 \mu^2 (\omega g + 2\beta \xi) / \Delta; \quad d = \omega \mu (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) / \Delta$$

$$e = \omega [g (\beta^2 + \omega^2 \mu^2 \xi) + 2\omega \beta \mu \xi (\mu \xi + \epsilon)] / \Delta;$$

$$f = [\omega \beta^2 (\epsilon + \mu \xi) - \omega^3 \mu (\mu \epsilon \xi + \epsilon^2 - g^2) + 2\omega^2 \beta \mu \xi] / \Delta;$$

$$\Delta = \omega^4 \mu^2 (\epsilon^2 - g^2) - 2\omega^3 \beta^2 \mu (\epsilon + 2\mu \xi) + \beta^4 - 4\omega^3 \beta \mu^2 g \xi;$$

$$P_1 = \beta (\beta \epsilon - g \omega \mu \xi) / \epsilon - \omega^2 \mu (\epsilon + 2\mu \xi); \quad P_2 = - \omega \mu (\beta g / \epsilon + 2\omega \mu \xi)$$

$$P_3 = (\beta \xi + \omega g) (\beta \epsilon - \omega \mu \xi g) / \epsilon + \omega^2 \mu \xi (\epsilon + \epsilon + 2\mu \xi) - \beta^2 \xi$$

$$P_4 = \beta^2 + \omega \mu g (\beta \xi + \omega g) / \epsilon - \omega^2 \mu (\epsilon + 2\mu \xi)$$

由此便得到了柱形坐标系下的一般公式,只要在合适的坐标系下求解出(7)式,由(6),(3),(4)式即可求得场的各个分量。

## 2 色散方程

本文所研究的问题如图1所示,在无限长、半径为  $R$  的理想导体圆柱内,填充了均匀手征等离子体媒质。柱坐标系的  $z$  轴与导体柱的轴重合且外偏置的磁感应强度的方向沿  $z$  向。应用前面所得结果并考虑在  $r=0$  处的场为有限值,柱坐标系下波动方程(7)的解为

$$U_{\pm} = A_i Z_n(S_{\pm} r) e^{jn\varphi}, \quad r \leq R; \quad i = 1, 2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (9)$$

而若  $S_{\pm}^2 > 0, Z_n(S_{\pm} r) = J_n(S_{\pm} r)$ , 若  $S_{\pm}^2 < 0, Z_n(S_{\pm} r) = I_n(|S_{\pm}|r)$ 。应用(9),(6)与(3),(4)式可得电场与磁场的各分量,并根据场在  $r=R$  处理想导体面的边界条件<sup>[9]</sup>,  $E_z|_{r=R} = 0, E\varphi|_{r=R} = 0$ , 可得矩阵方程

$$(a_{ij}) (A_k) = 0 \quad i, j, k = 1, 2 \quad (10)$$

其中  $a_{11} = Z_n(S_+ R); a_{12} = Z_n(S_- R); a_{21} = S_+ Z_n'(S_+ R) (b - dq_+) - nZ_n(S_+ R) (a + cq_+) / R; a_{22} = S_- Z_n'(S_- R) (b - dq_-) - nZ_n(S_- R) (a + cq_-) / R$ 。方程(10)要有非零解,要求方程(10)的系数矩阵的行列式为零。由此可得色散方程为行列式  $[a_{ij}] = 0; ij = 1, 2$ 。在不同的频率  $\omega$  时求解,求得纵向传播常数  $\beta$ , 得出相应的色散曲线从而分析完全填充手征等离子体金属圆波导的传输特性。

## 3 数值解和色散曲线

为了检验理论与数值解的正确性,同时也为了比较均匀手征等离子体媒质与均匀手征媒质填充金属圆波导的传输特性,在图2中首先计算了填充均匀手征媒质的金属圆波导的色散曲线。其中  $\omega = \omega R / c = k_0 R$  为归一化频率,  $\beta = \beta / k_0$  为归一化的传播常数,  $k_0$  为真空中波数,图3、图4则分别计算了均匀手征等离子体金属圆波导在同一参数下不同模式的色散曲线和同一

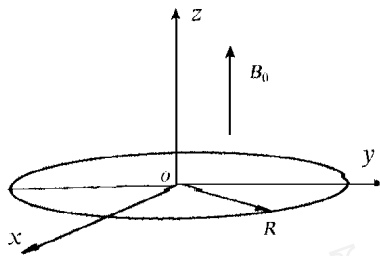


Fig 1 Diagram of the fully filled chiral plasma cylindrical waveguide  
图1 手征等离子体柱状波导示意图

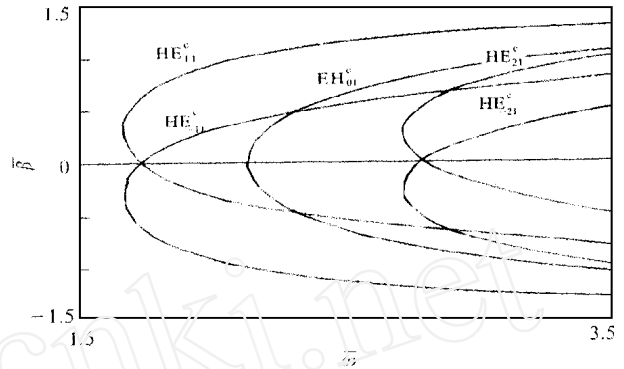


Fig 2 Dispersion curves of the fully filled homogenous chiral cylindrical waveguide  
图2 完全填充均匀手征媒质的柱状圆波导的色散曲线

模式, 不同参数下的色散曲线。图5、图6分别计算了均匀手征等离子体金属圆波导中的纵向传播常数  $\beta$  随手征导纳和归一化电子回旋频率  $\bar{\omega}$  的变化关系。

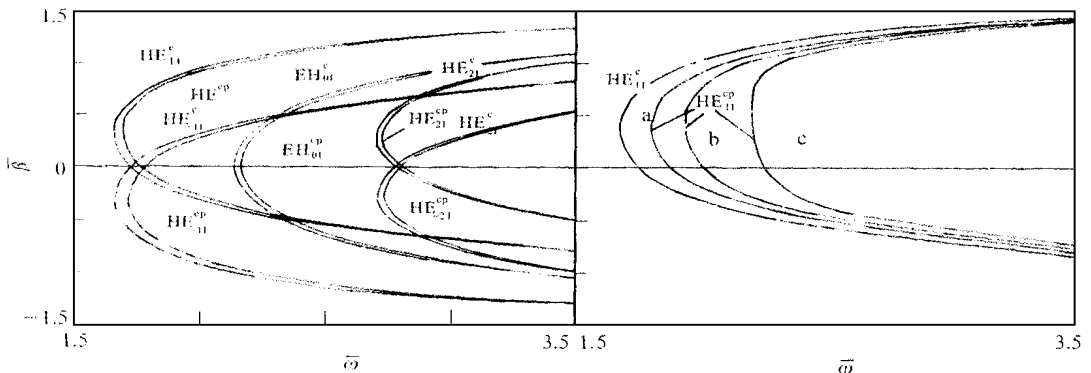


Fig 3 Dispersion curves of several lowest guided modes of fully filled chiral and chiral plasma cylindrical waveguides

图3 分别填充均匀各向同性手征媒质与手征等离子体媒质金属圆波导的色散曲线

Fig 4 Dispersion curves of HE\_{11}^s modes for different  $\bar{\omega}$ ,  $\omega$  values of chiral plasma cylindrical waveguide

图4 填充不同参数均匀手征等离子体媒质金属圆波导的色散曲线

由(5)式可以看出纵向电场与磁场总是相互耦合的, 故只存在混合传输模式<sup>[8]</sup>。所以图中用  $HE_{nm}^c, HE_{nm}^{cp}, EH_{nm}^c, EH_{nm}^{cp}$  表示不同的传输模式, 上标 c、cp 分别代表填充介质为均匀手征媒质或均匀手征等离子体媒质时的传输模式。下标  $n$  为角向场分布的周期数,  $m$  为具有相同  $n$  时沿截止频率增加方向的第  $m$  个模式<sup>[7]</sup>。

在图2中取  $\epsilon = \epsilon_0, g = 0, \xi_c = 10 \text{ m s}$ , 计算了  $EH_{01}, HE_{11}, HE_{21}, HE_{-11}$  与  $HE_{-21}$  等低次模式, 与文献[7]中图4相同条件的色散曲线结果一致。可以看出  $n$  取正值与负值时色散曲线分叉, 但有相同的截止频率。

图3中的各个  $HE_{nm}^{cp}, EH_{nm}^{cp}$  模式的归一化等离子体频率, 归一化电子回旋频率与手征导纳都采用了相同的参数, 取  $\bar{\omega}_p = \omega_p R / c = 0.4, \bar{\omega} = \omega R / c = 0.6$ , 其中  $c$  为光速,  $\xi_c = 1 \text{ m s}$  而图3中的

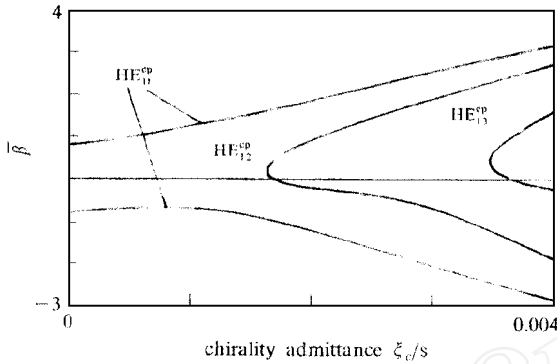


Fig 5 The relations between normalized propagation constants and chirality admittance  $\xi_c$

图5 归一化传播常数随手征导纳  $\xi_c$  的变化

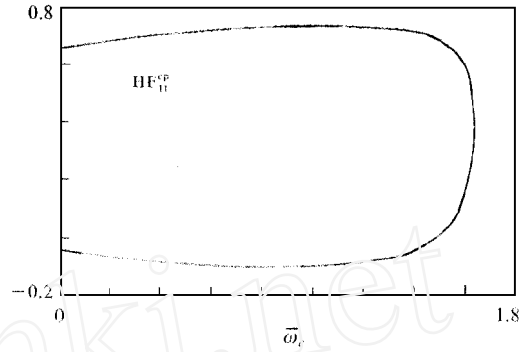


Fig 6 The relations between propagation constants and normalized electron gyrofrequency  $\bar{\omega}$

图6 归一化传播常数随归一化电子回旋频率的变化

各个  $HE_{nm}^c, EH_{nm}^c$  模式的参数与图2中的参数相同, 即  $\bar{\omega}_p = 0$ 。可以看出  $HE_{nm}^p, EH_{nm}^p$  模式中,  $n$  取正值与负值时色散曲线仍分叉, 但截止频率不同, 且手征等离子体波导中的模式频率较  $\bar{\omega} = 0$  所对应的均匀手征媒质波导中模式的截止频率大。而色散曲线的形状相同, 且当传输频率远大于  $\omega_c = (\omega_p^2 + \omega_c^2)^{1/2}$  时,  $HE_{nm}^p, EH_{nm}^p$  模式色散曲线都趋于相应的  $HE_{nm}^c, EH_{nm}^c$  模式色散曲线。这是因为在传输频率远大于  $\omega_c$  时,  $\epsilon$  和  $\epsilon'$  都趋于  $\epsilon_0$ , 而  $g$  趋于零所致。至于  $HE_{nm}^p$  模式中  $n$  取正值与负值时色散曲线仍分叉, 是因为  $n$  取正值与负值时色散方程(10)不同所致。手征等离子体波导中  $g$  不为零, 则是因为  $n$  取正值与负值时截止频率不同。

图4计算了  $\xi_c = 1m s$  时曲线 a 的参数为  $\bar{\omega}_p = 0.8, \bar{\omega}_c = 1.2$ ; 曲线 b 的参数为  $\bar{\omega}_p = 1.0, \bar{\omega}_c = 1.5$  和曲线 c 的参数为  $\bar{\omega}_p = 1.2, \bar{\omega}_c = 1.8$  时, 三种不同条件下  $HE_{11}^p$  模式的色散曲线。由图4可见, 在归一化传输频率小于 2.5 时, 手征等离子体的特征参数对色散曲线影响较大, 当归一化传输频率较大时, 参数的变化对色散曲线影响较小, 并都趋于与图2中  $HE_{11}^c$  模式中的有相同参数的色散曲线。其原因可从  $\epsilon, \epsilon', g$  参数与等离子体频率  $\omega_p$  和电子回旋频率  $\omega_c$  的关系看出。在传输频率很高时  $\epsilon$  和  $\epsilon'$  趋于  $\epsilon_0$ , 而  $g$  趋于零, 故可认为  $\epsilon = \epsilon_0, g = 0$ , 且手征导纳相同的均匀手征媒质填充金属圆波导的色散曲线为渐进线。

图5计算了参数为  $\bar{\omega}_p = 0.4, \bar{\omega}_c = 0.6$ , 归一化传输频率  $\bar{\omega} = \omega R/c = 3.0$ , 手征导纳  $\xi_c$  在  $0 \sim 4m s$  之间变化时, 均匀手征等离子体金属圆波导的  $HE_{11}^p, HE_{12}^p, HE_{13}^p$  模式的纵向传播常数  $\beta$  随手征导纳的变化。由该图可见手征导纳对均匀手征等离子体金属圆波导的纵向传播常数  $\beta$  的影响非常明显, 且有很好的分段线性变化区域存在。

图6计算了  $\bar{\omega}_p = 1.0, \xi_c = 1m s, \bar{\omega}_c = 2.0$  时均匀手征等离子体金属圆波导  $HE_{11}^p$  模式的纵向传播常数  $\beta$  随归一化电子回旋频率  $\bar{\omega}$  的变化关系。可以看出  $\bar{\omega}$  的变化对  $HE_{11}^p$  模式的纵向传播常数  $\beta$  的影响较手征导纳的影响小, 但当归一化传输频率与  $\bar{\omega}$  相近时, 影响非常强烈, 并在  $\bar{\omega}$  大于归一化传输频率时,  $HE_{11}^p$  模式截止。

### 4 结 论

综上所述, 应用纵向分量法<sup>[11]</sup>推导出了柱坐标系下均匀手征等离子体媒质中横向电磁场分量与纵向分量的关系, 并导出了纵向分量满足的波动方程, 在圆柱坐标系下求解该波动方程并应用圆柱状导体边界条件导出了完全填充手征等离子体金属圆波导的色散方程, 数值求解

色散方程并将图2结果与文献作了比较,比较结果相一致,证明了理论推导与数值求解的正确性。图3,图4给出了完全填充手征等离子体金属圆波导的一般的正负向传输色散特性和不同极化波的相互关系。图5,图6分别给出了材料手征导纳和外磁场对传输特性的影响和控制作用。对手征控制性的研究表明, $\beta$ 随 $\xi$ 的变化较大,并且分段范围内呈现较好的线性。而外磁场对传输特性的影响可以优化控制作用,或做为模式开关。这些特性可望在微波电子学领域中得到重要的应用。

## 参考文献

- 1 Engheta N, Jaggard D L, and Kowarz M W. Electromagnetic wave in Faraday chiral media, *IEEE Trans*, 1992, **AP-40**(4): 367~ 373
- 2 Pelet P and Engheta N. Coupled-mode theory for chiral waveguides *J Appl Phys*, 1990, **67**(6): 2742~ 2745
- 3 Samant A R and Whites K W. Electromagnetic Wave propagation in a chiral material-filled rectangular waveguide *Microwave and Technology Letters*, 1995, **8**(2): 106~ 111
- 4 Ganguly S, Singh Kh S, Ojha S P, and Khastgir P. Modal cutoff conditions for a chiral waveguide with a chiral core of large annular cross section bounded by dielectric media *Microwave and Technology Letters*, 1995, **8**(1): 18~ 21
- 5 Ivanov S T and Alexov E G. Electromagnetic waves in a plasma waveguide *J Plasma Phys*, 1990, **43**(1): 51~ 67
- 6 Eftimiou C and Pearson L W. Guided electromagnetic waves in chiral media *Radio Science*, 1989, **24**(3): 351~ 359
- 7 Svedin J A M. Propagation analysis of chiral waveguides using the finite-element method *IEEE Trans*, 1990, **MTT-38**(10): 1488~ 1496
- 8 Pelet P and Engheta N. The theory of chiral waveguides *IEEE Trans*, 1990, **AP-38**(1): 90~ 98
- 9 Gong Jianmin, Yang Shixin. Propagation characteristics of a partial chiral plasma filled cylindrical waveguide. Proceedings of Asia Pacific Microwave Conference, 2~ 5th Dec 1997, Hong Kong
- 10 龚建民等, 部分填充手征等离子体波导的电磁波. *强激光与粒子束*, 1998, **1**(1): 75
- 11 Stratton J A. Electromagnetic Theory. New York: McGraw-Hill, 1941

# PROPAGATION CHARACTERISTICS OF FULLY FILLED CHIROPLASMA CYLINDRICAL WAVEGUIDES

Yang Shixin, Gong Jianmin, Sheng Kenin, Fang Yin, Ren Long

*Electromagnetic Institute, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P. R. China*

**ABSTRACT** Using the longitudinal propagating field method, the transverse electromagnetic fields expressed by the longitudinal fields are derived under the cylindrical coordinate for the homogeneous chiral plasma waveguide. The wave equations for the longitudinal fields are also derived and solved. By applying the boundary conditions at the cylindrical metal surface, eigenvalue equations are derived. Numerical results for various parameters are presented, and many meaningful results are obtained.

**KEY WORDS** chiral plasma, cylindrical waveguide, wave equations