

文章编号: 1001—4322(2000)02—0149—06

# 湍流大气中哈特曼传感器的模式波前复原误差\*

李新阳, 姜文汉, 王春红, 鲜浩

(中国科学院光电技术研究所, 国家 863 计划大气光学重点实验室, 成都双流 350 信箱, 610209)

**摘要:** 分别采用 Zernike 和 Karhunen-loeve 两种模式波前复原法, 分析了子孔径斜率测量不受噪声影响的理想情况下, 哈特曼传感器对大气湍流畸变波前的模式复原误差与大气湍流相干长度、传感器的结构尺寸、模式复原阶数等的关系。结果表明 Karhunen-loeve 模式法比 Zernike 模式法的波前复原误差更小些。

**关键词:** 哈特曼传感器; 大气湍流; 模式波前复原; Zernike 模式; Karhunen-Loeve 模式  
**中图分类号:** O437.1 **文献标识码:** A

在对由于大气湍流造成的动态畸变波前进行测量时, 经常用到哈特曼-夏克型波前传感器(Hartmann-Shack wavefront sensor, 简称哈特曼传感器)<sup>[1-7]</sup>。哈特曼传感器通过子孔径上的波前斜率间接地测量整孔径上的畸变波前。传感器的结构尺寸、子孔径划分形式、大气湍流强度、斜率探测噪声等因素都影响波前斜率的测量精度<sup>[4,5]</sup>。即使是准确测量出了子孔径斜率, 从波前斜率复原计算出波前的过程中仍然存在复原误差<sup>[6,7]</sup>。在圆孔径上最常采用的是 Zernike 模式<sup>[8]</sup>和 Karhunen-Loeve 模式(K-L 模式)波前复原算法等<sup>[1,3,9,10]</sup>。由于模式阶数的大小对波前复原精度有较大影响, 因此, 仅仅凭经验确定模式复原阶数不能保证哈特曼传感器的模式波前复原精度。

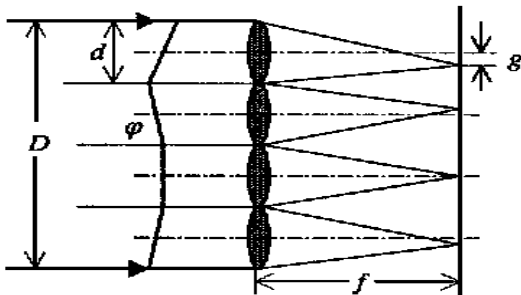


Fig 1 The principle diagram of a Hartmann wavefront sensor

图 1 哈特曼波前传感器的原理示意图

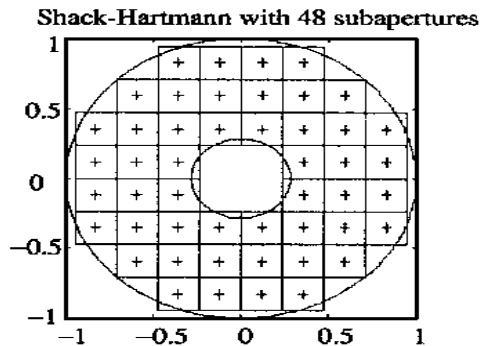


Fig 2 The subaperture location of a practical Hartmann wavefront sensor in unit circle

图 2 一个实际哈特曼传感器的子孔径分布

本文介绍哈特曼传感器和模式波前复原的基本原理, 在没有子孔径斜率测量噪声的理想情况下, 对比分析 Zernike 和 K-L 两种模式法的模式截断误差与模式混淆误差, 根据波前复原误差与模式复原阶数的关系, 给出理想情况下确定最优模式复原阶数的方法。

## 1 哈特曼传感器原理与湍流畸变波前的模式复原

### 1.1 哈特曼传感器原理<sup>[1-7]</sup>

图 1 是哈特曼波前传感器的原理示意图, 一组孔径大小和焦距相同的微透镜把传感器主孔径划分为若干个子孔径, 畸变了波前分别会在每个微透镜的焦面上成像, 用一个面阵传感器(如 CCD 相机)

\* 国家 863 激光技术领域资助课题。  
1999 年 12 月 7 日收到原稿, 2000 年 4 月 3 日收到修改稿。  
李新阳, 男, 1971 年 5 月出生, 博士生

测量出每个子孔径上的像点与标定位置的偏移量,即波前斜率,再通过波前复原算法就可以间接测量出畸变波前 $w$ 的大小。从哈特曼传感器的原理可见它对波前整体平移不敏感,以下讨论的畸变波前中也不包括波前整体平移。哈特曼传感器中子孔径的分布形式、主孔径直径 $D$ 、子孔径直径 $d$ 、微透镜焦距 $f$ 等尺寸是相对固定的,而波前复原算法和模式阶数的选择有较大的灵活性,并对波前复原精度有较大影响。

图 2 是一个实际哈特曼传感器子孔径在归一化单位圆内的分布情况,其中‘+’是子孔径的定标点。这个传感器的主要结构尺寸为:主孔径直径 $D = 0.6\text{m}$ ,子孔径直径 $d = 0.071\text{m}$ ,Cassegrain 式望远镜次镜的中心遮拦比 0.283,有效子孔径数 48 个,微透镜的等效焦距 $f = 2.7\text{m}$ ,工作波长 $\lambda = 0.69\mu\text{m}$ 。CCD 相机的尺寸 $64 \times 64$  像素,定标系数为 3.17 角秒/像素,采样频率 2900 帧/秒。本文将以这种子孔径布局为例分析哈特曼传感器的模式波前复原误差。

1.2 湍流畸变波前的模式复原算法

波前可以用一系列正交多项式的线性组合表示,通常把多项式的每一项称为一阶波前模式。圆孔径上的畸变波前常用 Zernike 波前模式表示<sup>[8]</sup>

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^p a_k z_k(x, y) \tag{1}$$

其中 $z_k(x, y)$ 是第 $k$ 阶 Zernike 模式, $a_k$ 是模式系数, $p$ 是模式阶数。Zernike 模式的特性由径向频率数 $n$ 和轴向频率数 $m$ 决定。本文采用的 Zernike 模式排列顺序如表 1 所示。

Table 1 The order of Zernike polynomials

表 1 Zernike 多项式的排列顺序

| radial degree $n$ | azimuthal frequency $m$ |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-------------------|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                   | 0                       | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |
| 1                 |                         | 1, 2   |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| 2                 | 3                       |        | 4, 5   |        |        |        |        |        |        |        |        |
| 3                 |                         | 6, 7   |        | 8, 9   |        |        |        |        |        |        |        |
| 4                 | 10                      |        | 11, 12 |        | 13, 14 |        |        |        |        |        |        |
| 5                 |                         | 15, 16 |        | 17, 18 |        | 19, 20 |        |        |        |        |        |
| 6                 | 21                      |        | 22, 23 |        | 24, 25 |        | 26, 27 |        |        |        |        |
| 7                 |                         | 28, 29 |        | 30, 31 |        | 32, 33 |        | 34, 35 |        |        |        |
| 8                 | 36                      |        | 37, 38 |        | 39, 40 |        | 41, 42 |        | 43, 44 |        |        |
| 9                 |                         | 45, 46 |        | 47, 48 |        | 49, 50 |        | 51, 52 |        | 53, 54 |        |
| 10                | 55                      |        | 56, 57 |        | 58, 59 |        | 60, 61 |        | 62, 63 |        | 64, 65 |

从波前斜率计算出波前相位的过程称为波前复原。对一个特定结构的哈特曼传感器,子孔径波前斜率与 Zernike 模式系数间的关系用矩阵形式表示为

$$g = Za \tag{2}$$

其中 $g = [g_1, g_2, \dots, g_{2m}]^T$ 是波前斜率向量, $T$ 表示矩阵的转置, $m$ 是传感器的子孔径数, $a = [a_1, a_2, \dots, a_p]^T$ 是 Zernike 模式系数向量。 $Z$ 是传感器的 Zernike 模式斜率响应矩阵。从上面的方程得到哈特曼传感器的 Zernike 模式复原算法为

$$g = Z^+ g \tag{3}$$

其中 Zernike 模式复原矩阵 $Z^+$ 是 $Z$ 矩阵的伪逆矩阵。很多人都分析了 Kolmogorov 湍流下 Zernike 模式间的相关性<sup>[1, 8~10]</sup>。任意两阶 Zernike 模式系数<sup>[10]</sup> $a_j(n, m)$ 和 $a_j'(n', m')$ 间的相关性为

$$\langle a_j a_j' \rangle = \frac{2 \cdot 246 (-1)^{(n+n'-2m)/2} [(n+1)(n'+1)]^{1/2} \Gamma\left[\frac{(n+n'-5)/3}{2}\right] \delta_{nm}}{\Gamma\left[\frac{(n-n'+17)/3}{2}\right] \Gamma\left[\frac{(n'-n+17)/3}{2}\right] \Gamma\left[\frac{(n+n'+23)/3}{2}\right]} \tag{4}$$

其中  $\Gamma$  是伽马函数。(4)式构成一个对称的模式相关矩阵  $C_Z = \langle aa^T \rangle$ , 其对角线元素值反映了 Kolmogorov 湍流下各阶 Zernike 模式的方差。考虑到湍流强度的影响后, 模式相关矩阵应为  $C_Z (D/r_0)^{5/3}$ , 其中  $r_0$  为大气相干长度。用奇异值分解方法(SVD)把上面的 Zernike 模式相关矩阵分解为

$$C_Z = USU^T \tag{5}$$

其中  $S$  是由矩阵  $C_Z$  的奇异值组成的对角矩阵,  $U$  是由矩阵  $C_Z$  的特征向量组成的酉矩阵, 满足条件  $U^{-1} = U^T$ 。另一种经常采用的 K-L 模式由 Zernike 波前模式按其相关矩阵特征向量的线性组合构成<sup>[1,9]</sup>

$$b = U^T a \tag{6}$$

用 K-L 波前模式描述 Kolmogorov 湍流畸变波前时, 模式间的相关性为

$$C_K = \langle bb^T \rangle U^T \langle aa^T \rangle U = U^T C_Z U = S \tag{7}$$

即 K-L 模式间是正交解耦的。把(6)式代入(2)、(3)式, 得到

$$g = ZU b, \quad b = U^T Z^+ g \tag{8}$$

定义  $K = ZU$ , 则  $K^+ = U^T Z^+$  即为从哈特曼子孔径波前斜率直接计算 K-L 模式系数的波前复原矩阵。畸变波前可以用 K-L 波前模式表示为  $Q(x, y) = \sum_{k=1}^p b_k y_k(x, y)$ , 其中 K-L 波前模式  $y(x, y)$  是 Zernike 波前模式  $z(x, y)$  的线性组合  $y_k(x, y) = \sum_{i=1}^p U_{kiz} z_i(x, y)$ 。

## 2 哈特曼传感器的模式波前复原误差分析

### 2.1 模式截断误差

以上讨论的 Zernike 和 K-L 两种模式相关矩阵的对角线元素值反映了 Kolmogorov 湍流畸变波前中对应模式方差的大小, 而畸变波前总方差  $\sigma_p^2$  是各阶模式方差的总和

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \sum_{k=1}^p C_Z(k, k) (D/r_0)^{5/3} \\ &= \sum_{k=1}^p C_K(k, k) (D/r_0)^{5/3} \end{aligned} \tag{9}$$

理论上要用无穷阶模式才能准确描述全部畸变波前信息, 畸变波前的方差为  $\sigma^2 = 1.0299 (D/r_0)^{5/3}$ , 但实际上复原的模式阶数是有限的, 更高阶模式的信息就丢失了, 这就造成模式截断误差

$$\Delta_C^{Z,K}(p) = [1.0299 - \sum_{k=1}^p C_{Z,K}(k, k)] (D/r_0)^{5/3} \tag{10}$$

低阶模式截断误差容易计算<sup>[1,8,9]</sup>, 估算高阶模式截断误差的经验公式为<sup>[10]</sup>

$$\Delta_C^Z(p) \approx 0.2740 p^{-0.8428} (D/r_0)^{5/3}, \quad (p > 30) \tag{11a}$$

$$\Delta_C^K(p) \approx 0.2403 p^{-0.8717} (D/r_0)^{5/3}, \quad (p > 30) \tag{11b}$$

图 3 给出了前 65 阶 Zernike 模式和 K-L 模式的截断误差, 可见对于同样的复原阶数, K-L 模式的截断误差比 Zernike 模式小, 这是 K-L 模式的一个优点。

理论上无论是采用 Zernike 模式复原法还是 K-L 模式复原法, 选取的阶数越高波前复原的精度也越高。从数学原理上看, 当模式复原阶数满足条件  $p < 2m$ , 模式复原矩阵的秩等于模式复原阶数  $p$ , 则关系  $Z^+ Z = I$  和  $K^+ K = I$  成立, 其中  $I$  是单位矩阵。假如畸变波前的模式分解系数为  $c_0$ , 哈特曼传感器上得到的子孔径斜率向量为  $g$ , 用模式波前复原法得到的模式系数为  $c_1$ , 则  $c_1 = Z^+ Z c_0 = c_0$  或  $c_1 = K^+ K c_0 = c_0$ , 即有  $m$  个有效子孔径的哈特曼传感器采用模式法进行波前复原, 模式复原阶数的数学理论极限是

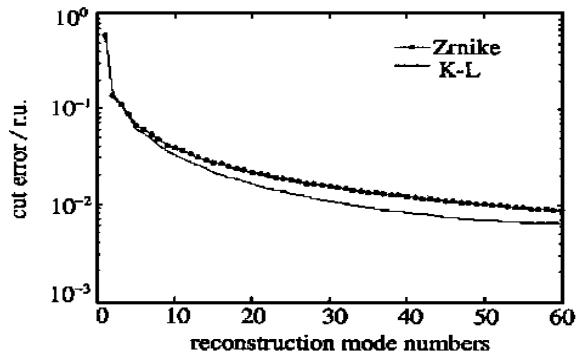


Fig 3 The reconstruction cut error of Zernike modes and the K-L modes

图 3 Zernike 模式和 K-L 模式的截断误差

2m 阶。例如图 2 中的哈特曼探测器有 48 个子孔径, 那么从数学理论上可以精确复原出 96 阶模式模式截断误差非常小, 可以达到非常高的波前复原的精度。但实际上这种数学上的极限是不可能达到的。当哈特曼传感器的子孔径直径大小  $d$  确定后, 它的空间分辨率也就大致确定在  $1/d$  量级上。再高空间频率的波前起伏将被子孔径成像平滑掉, 不能被哈特曼传感器准确测量。因此哈特曼传感器的空间分辨率对波前测量精度的影响也是不可忽视的。

2.2 哈特曼传感器空间分辨率不足带来的模式混淆误差

首先分析哈特曼传感器各个子孔径波前斜率间的相关性。假设任意两个探测子孔径的距离为  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ , 其中  $x$  和  $y$  是两个正交方向上子孔径间的距离。则两个不同子孔径上  $x$  方向波前斜率间的相关性为<sup>[11]</sup>

$$C_{gx}(x, y) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D\varphi(x, y) \tag{12}$$

其中  $\lambda$  为信标光波长,  $D\varphi$  是波前相位的结构函数。Kolmogorov 湍流的相位结构函数为

$$D\varphi(x, y) = 6.88(r/r_0)^{5/3} \tag{13}$$

则

$$C_{gx}(0, 0) = 0.145\lambda^2 r_0^{-5/3} [(x^2 + y^2)^{-1/6} - x^2(x^2 + y^2)^{-7/6}/3] \tag{14}$$

同理可以得到  $y$  方向波前斜率间的相关性。上式只在子孔径间距离  $r = (x^2 + y^2)^{1/2} < d$  的条件下成立, 其中  $d$  为子孔径直径。同孔径上波前斜率的自相关满足另一个关系<sup>[11]</sup>

$$C_{gx}(0, 0) = C_{gy}(0, 0) = 0.179(\lambda/d)^2 (d/r_0)^{5/3} \tag{15}$$

常用上式来估计大气相干长度  $r_0$  的大小。根据(13)、(14)两式可以得到 Kolmogorov 湍流下哈特曼探测器子孔径波前斜率间的相关矩阵  $C_g = \langle gg^T \rangle$ 。那么根据 Zernike 模式复原算法(3)式, 测量出的模式相关矩阵将为

$$C_M = \langle aa^T \rangle = Z^+ \langle gg^T \rangle Z^{+T} = Z^+ C_g Z^{+T} \tag{16a}$$

同理得到 K-L 模式的相关矩阵为

$$C_{KM} = K^+ C_g K^{+T} \tag{16b}$$

其中下标 M 表示测量结果, 可见测量出的模式相关矩阵的值与子孔径直径  $d$  和大气相干长度  $r_0$  的大小有关。在选择不同的模式复原法和不同的模式阶数下, 复原的结果将大不相同。通过对比复原前后各阶模式的方差, 即模式相关矩阵的对角线元素值来分析模式复原的准确性。对图 2 的哈特曼传感器, 分别用 Zernike 模式复原法和 K-L 模式复原法, 在模式阶数为 35 ( $n=7$ ) 和 65 ( $n=10$ ) 时得到的结果如图 4 所示。

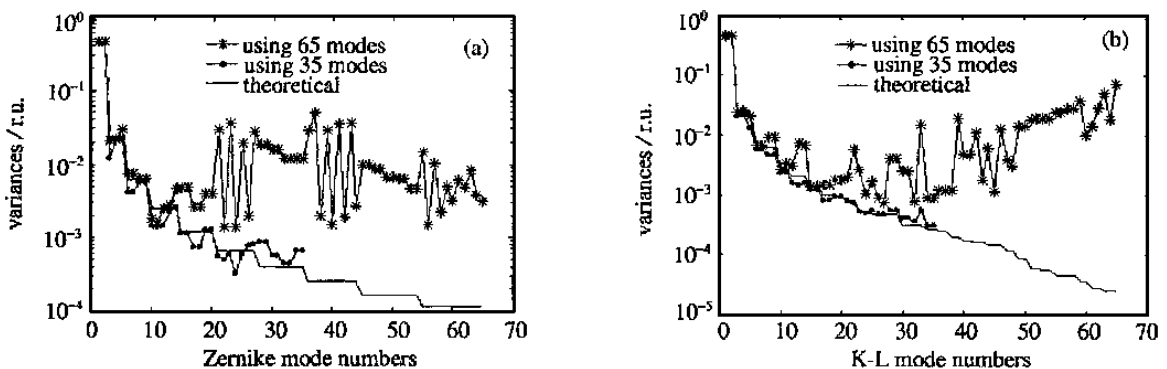


Fig. 4 The variances of modal reconstruction results for the Hartmann sensor showed in Fig 2 (a) Zernike modes; (b) K-L modes

图 4 不同模式复原阶数下图 2 中哈特曼传感器的模式复原系数方差结果

可见当模式阶数为 35 时, 复原出的模式方差与理论结果比较接近。但当模式阶数增大为 65 时, 复

原出的高阶模式方差比理论结果偏大许多, 这将会造成严重的波前复原误差。分析造成这种情况的原因是由于子孔径对波前起伏的平滑作用, 使哈特曼传感器对高空间频率的高阶模式前模式的探测能力下降。如果在波前复原中人为地想要复原出高空间频率的高阶模式, 将引起复原结果中高阶模式与低阶模式的混淆。把由于这种空间分辨率原因造成的波前模式混淆误差表示为

$$\Delta_S^Z(p) = \sum_{k=1}^p |C_{ZM}(k, k) - C_Z(k, k) (D/r_0)^{5/3}| \quad (17a)$$

$$\Delta_S^K(p) = \sum_{k=1}^p |C_{KM}(k, k) - C_K(k, k) (D/r_0)^{5/3}| \quad (17b)$$

其中上下标 Z 和 K 分别表示 Zernike 模式和 K-L 模式。

### 3 没有探测噪声时最优模式复原阶数的确定

上面的分析表明, 哈特曼传感器的模式复原误差与采用的模式复原算法和选择的模式阶数有关。不考虑探测噪声的理想情况下, 总的模式复原误差为上面两种误差的总和  $\Delta_{\varphi}(p) = \Delta_S(p) + \Delta_C(p)$ 。当选取的模式阶数较低, 模式混淆误差较小但模式截断误差较大; 当模式阶数变大时, 模式截断误差逐渐减小但模式混淆误差会增大, 所以存在一个最优模式复原阶数可以使总的波前复原误差最小。对图 2 的哈特曼传感器, 不考虑探测噪声, 得到模式复原误差与模式阶数的关系如图 5 所示。对于 Zernike 模式和 K-L 模式, 最优的模式阶数分别是 31 阶和 38 阶, 对应的模式波前复原误差分别是  $0.0471 (D/r_0)^{5/3}$  和  $0.0331 (D/r_0)^{5/3}$ , 大约是波前总方差的 4%, 其中 K-L 模式的波前复原误差较小。哈特曼传感器的波前探测误差通常表示为另一种形式  $\sigma_{\text{sensor}}^2 = k_{\text{sensor}} (d/r_0)^{5/3}$ , 其中  $k_{\text{sensor}}$  为常数,  $d$  为子孔径尺寸。根据上面分析, 这个实际哈特曼传感器的误差常数在 1.1~1.7 左右。

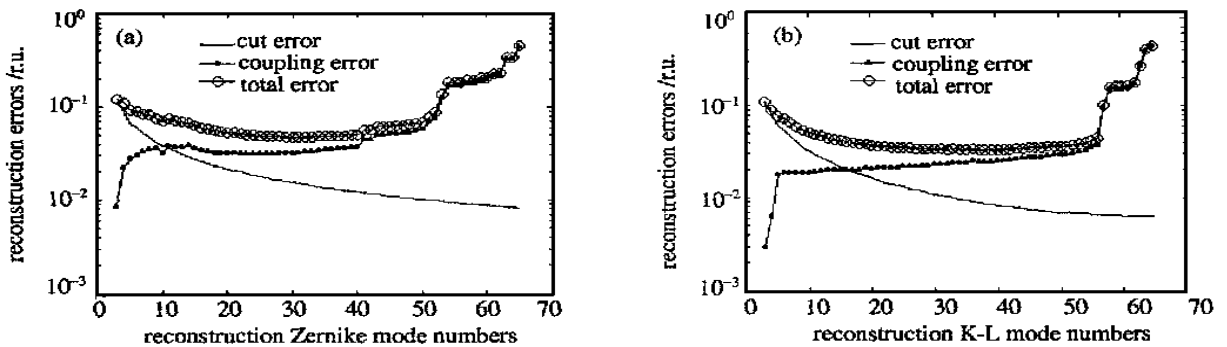


Fig. 5 The reconstruction errors versus reconstruction mode numbers (a) Zernike modes; (b) K-L modes

图 5 波前复原误差与模式复原阶数的关系

另外需要指出的是, 本文得到的最优模式复原阶数是在表 1 中 Zernike 模式排列顺序的基础上得到的。如果换一种模式排列顺序, 最优模式复原阶数和最小波前测量误差的结果将有所不同。但表 1 中 Zernike 模式基本上是按照空间频率从低到高的顺序排列的, 也是国内外最常采用的排布顺序。所以本文在这个基础上得到的最优模式复原阶数和最小波前测量误差结果可以说是比较合理的。其他模式排布顺序下的哈特曼波前测量误差问题也可以同样用本文的方法进行分析。

### 4 结 论

利用哈特曼传感器测量大气湍流畸变波前并用模式法进行波前复原时, 由于传感器子孔径空间分辨率限制造成的模式混淆误差, 以及由于部分模式复原带来的模式截断误差, 是没有探测噪声的理想情况下造成波前测量误差的两个主要原因。计算发现 Zernike 和 K-L 两种模式法的最优模式阶数很接近, 波前复原精度都较高, 但是 K-L 模式法略好些。考虑探测噪声因素后哈特曼传感器的波前复原精度问题将在下一步的工作中进行分析。

致 谢 感谢中科院光电所八室的吴旭斌、饶长辉和中科院安徽光机所二室的龚知本、吴毅、王英俭、汪超等对本文实验工作的支持和帮助。

### 参考文献:

- [1] Roggemann M C, Welsh B M. Imaging through turbulence[C]. Boca Raton: CRC Press, U SA, 1995.
- [2] Li Hua-gui, Jiang Wen-han. Atmospheric turbulence parameter measurement using Hartmann-Shack wavefront sensor[A]. 1993, Proc of ESO [C], 1993, 48: 21~ 28
- [3] Lane R G, Tallon M. Wavefront reconstruction using a Shack- Hartmann sensor[J]. *Applied Optics*, 1992, 31(32): 6902~ 6908
- [4] Chao Gen-ru, Yu Xin. Accuracy analysis of a Hartmann- Shack wavefront sensor operated with a faint object[J]. *Optical Engineering*, 1994, (33): 2331~ 2335.
- [5] Jiang Wen-han, Xian Hao, Shen Feng. Detecting error of Shack- Hartmann wavefront sensor[A]. *SPIE* [C], 1997, 3126: 534~ 544
- [6] Hemann J. Cross coupling and aliasing in model wavefront estimation[J]. *J Opt Soc Am A*, 1981, 71(8): 989~ 992
- [7] Takato N, Iye M, Yamaguchi I. Wavefront reconstruction errors of Shack-Hartmann sensors[J]. *Publ Astron Soc Pacific*, 1994, 106: 182~ 188
- [8] Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. *J Opt Soc Am A*, 1977, 67(8): 1065~ 1072
- [9] Roddier N. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials[J]. *Optical Engineering*, 1990, 29(10): 1174~ 1180
- [10] Dai Guangming. Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen-Loeve functions[J]. *J Opt Soc Am A*, 1995, 12(10): 2182~ 2193
- [11] Sarazin M, Roddier F. The ESO differential image motion monitor[J]. *Astron Astrophys*, 1990, 227: 294~ 300

## MODAL RECONSTRUCTION ERROR OF THE HARTMANN SENSOR ON MEASURING THE ATMOSPHERE DISTURBED WAVEFRONT I

LI Xin-yang, JIANG Wen-han, WANG Chun-hong, XIAN Hao

*The Key Laboratory of the Atmospheric Optics of National High Technology, Institute of Optics & Electronics, Academia Sinica, P. O. Box 350, Shuangliu, Chengdu, 610209, China*

**ABSTRACT:** By using the Zernike and the Karhunen-Loeve wavefront reconstruction algorithm, the wavefront reconstruction error of a Hartmann sensor on measuring the atmosphere disturbed wavefront was analyzed in this paper. In the condition of without measurement noise, there are two kinds of wavefront reconstruction errors: the mode coupling error causing by finite spatial frequency of sub-apertures and the mode cutting error by using finite mode numbers. It is showed that the wavefront reconstruction error will be minimum while optimal mode numbers were using, and the Karhunen-Loeve algorithm is somewhat better than the Zernike algorithm.

**KEYWORDS:** Hartmann wavefront sensor; atmospheric turbulence; wavefront reconstruction; Zernike model; Karhunen-Loeve model