

文章编号:1000-6893(2007)02-0263-06

# 基于圆型限制性三体问题模型的 行星卫星逃逸能量研究

何 巍, 徐世杰

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100083)

Study on Escaping Energy in Circular Restricted Three-body Problem

HE Wei, XU Shi-jie

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**摘 要:** 基于由飞行器、行星及其卫星组成圆型限制性三体问题模型,通过庞加莱映射的方法,研究了飞行器从行星卫星附近逃逸的问题。在 Jacobi 常数确定的前提下,通过逆向积分,飞行器从  $L_1$  或  $L_2$  点附近返回近月点,得到近月点速度出发速度。研究结果表明绕飞  $L_1$  点和  $L_2$  点逃逸行星卫星需要的最低能量是不同的,从月球表面逃逸所需的速度脉冲分别比开普勒算法节省 46.5 m/s 和 42.3 m/s,且均小于 Villac 等人在 Hill 模型下得到 38.9 m/s,从而改进了 Villac 等人的相关工作,同时也给出了从太阳系主要行星卫星表面逃逸所需的最小能量。

**关键词:** 逃逸轨道; 圆形限制性三体问题; 庞加莱截面

**中图分类号:** V412.4      **文献标识码:** A

**Abstract:** Escaping trajectories are investigated using a Poincaré map method in the circular restricted three body problem consisting of spacecraft, planet and moon. On the condition that Jacobi constant is fixed, the escaping trajectories are integrated back to the first periaapsis from vicinity of  $L_1$  and  $L_2$  and the escaping velocity of moon is obtained. The results show that the optimal escaping velocities through the vicinity of  $L_1$  and  $L_2$  are different. Compared with the Kepler method it saves 46.5 m/s and 42.3 m/s  $V$  escaping from the moon. It is more precision than the result of 38.9 m/s which is obtained by Villac in the Hill problem model. The optimal escaping velocities of the primary planetary moon in the solar system are also presented.

**Key words:** escaping trajectory; circular restricted three body problem; Poincaré section

随着深空探测活动的增加,仅靠化学火箭为航天器提供动力已经不能满足深空探测的需要。近年来,如何利用行星及其卫星的引力场,进而找到节省能量的“低能轨道”,已经成为新的研究热点。在对太阳系行星及其卫星的探测过程中,节省能量的关键在于设计合适的飞行轨道,其中飞行器逃离行星及其卫星的引力场的轨道设计是一个重要的课题。

研究低能轨道的方法大体上可分为两类:一类是直接研究低能轨道问题;另一类是从分析飞行器逃逸能量的角度研究低能轨道问题。对于前者,比较有代表性的工作是利用弱稳定边界理论研究地-月低能转移轨道,在这方面, Belbruno, Miller 和 Yamakawa 等人利用数值方法做了大量的工作<sup>[1-3]</sup>, W. S. Koon 等人利用不变流形的理论

分析了这种低能轨道的存在性<sup>[4]</sup>;对于后者,卓有成效的工作是 Villac 提出的利用庞加莱截面的方法来确定飞行器最小逃逸能量<sup>[5]</sup>,他计算了在 Hill 三体模型下飞行器最小逃逸能量并给出了太阳系内大部分飞行器的行星卫星逃逸能量。

由于 Villac 使用的三体模型为 Hill 模型,对从  $L_1$  点附近和  $L_2$  点附近绕飞的能量是不加区别的,因而导致了绕飞  $L_1$  和  $L_2$  点具有相同的最小逃逸能量的结论。实际上,绕飞  $L_1$  和  $L_2$  点是有一定程度的区别的,所需的最小逃逸能量并不相同。本文以地-月系统为例,基于圆型限制性三体问题(CR3BP)模型,运用庞加莱截面的方法研究飞行器的行星卫星逃逸能量问题,分别给出了绕飞  $L_1$  点和  $L_2$  点的行星卫星的最小逃逸能量,并且给出了飞行器在太阳系内一些行星卫星对应  $L_1$  点和  $L_2$  点的最小逃逸能量。本文的工作可以看作 Villac 论文中相应工作的改进与扩展。

收稿日期:2005-10-26; 修订日期:2006-07-19

基金项目:国家自然科学基金(60535010)

通讯作者:徐世杰 E-mail:starsjxu@yahoo.com.cn

### 1 圆型限制性三体问题

CR3BP 描述的是 1 个小质量天体在 2 个大质量天体引力作用下运动的情况,该模型是研究三体问题的一种常用近似方法,在航天动力学和天体力学中得到了广泛应用。而 Hill 模型是 CR3BP 的一阶近似情况,它假设 CR3BP 中 2 个天体质量均远远小于第 3 个天体的质量且质量较小的 2 个之间距离远远小于它们与质量最大的天体之间距离。在实际问题中,飞行器、行星及其卫星所组成的三体系统基本符合 Hill 模型的假设,但是些精度较高的场合,如低能转移轨道的设计,采用 CR3BP 来研究逃逸能量是必要的。

#### 1.1 运动学方程

下面以地-月-飞行器系统为例建立运动学方程。研究 CR3BP 时,一般采用质心旋转坐标系,为了研究的方便,本文将旋转坐标系的原点选在月球的质心。首先对单位进行如下标准化,相应的质量单位 [M],长度单位 [L],时间单位 [T] 为

$$\left. \begin{aligned} [M] &= m_1 + m_2 \\ [L] &= a_{12} \\ [T] &= (a_{12}^3 / G(m_1 + m_2))^{1/2} = 1/\eta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $m_1, m_2$  为地球和月球质量;  $a_{12}$  为地月平均距离;  $G$  为引力常数;  $n$  为地月之间相对运动角速度。

该问题涉及到地月质心惯性坐标系  $OXYZ$  和月球质心旋转坐标系  $\sigma_{xyz}$  的关系,其中地月质心惯性坐标系和月球质心旋转坐标系的  $z$  轴平行,且方向相同,在  $t$  时刻,两坐标系的  $x$  轴夹角为  $\theta$ ,如图 1 所示。飞行器在惯性空间受地球引力  $F_1$  和月球引力  $F_2$  作用,则有

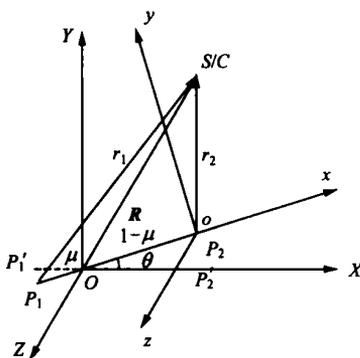


图 1 地月心惯性坐标系和月球质心旋转坐标系的关系图

Fig 1 The relationship between earth centre inertial coordinate and barycenter rotating coordinate

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = F_1 + F_2 \quad (2)$$

在地月惯性坐标系下可写为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} &= - \frac{\mu_1}{|r_1|^3} \mathbf{r}_1 - \frac{\mu_2}{|r_2|^3} \mathbf{r}_2 = \\ &= - \frac{\mu_1}{(r_1)^3} R_z(-\theta) (\mathbf{r} + [1 \ 0 \ 0] J^T) - \\ &R_z(-\theta) \frac{\mu_2}{(r_2)^3} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3)$$

式中:  $\mu_1 = 1 - \mu; \mu_2 = \mu; \mu = m_2 / (m_1 + m_2); r_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}; r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

由图 1 所示的矢量之间的几何关系可得

$$\mathbf{R} - [1 \ -\mu \ 0 \ 0] J^T = \mathbf{r} \quad (4)$$

在地月惯性坐标系下可写成分量列阵形式为

$$\mathbf{R} = R_z(-\theta) (\mathbf{r} + [1 - \mu \ 0 \ 0] J^T) \quad (5)$$

式(5)两次对时间求导可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} &= \frac{d^2 R_z(-\theta)}{dt^2} (\mathbf{r} + [1 - \mu \ 0 \ 0] J^T) + \\ &2 \frac{dR_z(-\theta)}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + R_z(-\theta) \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \end{aligned} \quad (6)$$

联立式(3)和式(6),则得到运动学方程

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ = - \frac{1-\mu}{r_1^3} \begin{bmatrix} x+1 \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{\mu}{r_2^3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

同样可以得到

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2 \begin{bmatrix} - & \dot{y} \\ \dot{x} & - \\ 0 & \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \quad (8)$$

其中:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [(x^2 + y^2) + \mu(1 - \mu)J] + \frac{1 - \mu}{r_1} + \\ &\frac{\mu}{r_2} + (1 - \mu)x \end{aligned}$$

由此可以给出月球旋转坐标系中 Jacobi 积分如下

$$2 - v^2 = C \quad (9)$$

其中:  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2; C$  为积分常数。

通过数值计算,可以得到 3 个直线平衡点分别为(单位为地月平均距离)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -0.15093423 \\ x_2 &= 0.16783268 \\ x_3 &= -1.99291207 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

### 1.2 零速度面和逃逸轨道

在限制性三体问题中存在唯一的积分,积分常数  $C$  有着重要的意义。由于  $v^2 \geq 0$ ,从式(9)可知  $2 - C \geq 0$ ,曲面  $2 - C = 0$  被称之为零速度面,在此曲面上飞行器的运动速度为零,这样积分常数可以由初始条件确定如下

$$C_0 = 2 - (x_0, y_0, z_0) - v_0^2 \quad (11)$$

在文献[6]中详细描述了对应于不同 Jacobi 积分常数的飞行器可能的运动区域。设  $C_1, C_2, C_3$  是 3 个不同的积分常数,对应文献[6]中的结论,可以发现:当满足  $C_2 < C < C_1$  时,存在通过直线平衡点  $L_1$  附近从月球返回地球的逃逸轨道;当满足  $C_3 < C < C_2$  时,存在通过直线平衡点  $L_2$  附近从月球返回地球的逃逸轨道。

在月心地月旋转坐标系下,已经由式(10)给出了 3 个直线平衡点的位置,同样可以计算出 3 个直线平衡点对应的 Jacobi 积分常数为

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 2.224\ 497\ 41 \\ C_2 &= 2.208\ 316\ 78 \\ C_3 &= 2.048\ 303\ 57 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

在  $x = L_1$  (或  $x = L_2$ ) 平面上某一点,对应某一特定的  $C$  值将有一确定的离开月球的速度  $v$ ,任意选择速度的方位角,以上述条件作为已知条件进行逆向积分,可以得到一条飞行器的轨迹,如图 2 所示。如果飞行器能够从  $x = L_1$  (或  $x = L_2$ ) 平面回到月球近月点,就对应着一条经过  $x = L_1$  (或  $x = L_2$ ) 平面的月球逃逸轨道,通过计算每一条轨道在近月点时速度的大小,就可以得到每条逃逸轨道离开月球所需要的速度增量。

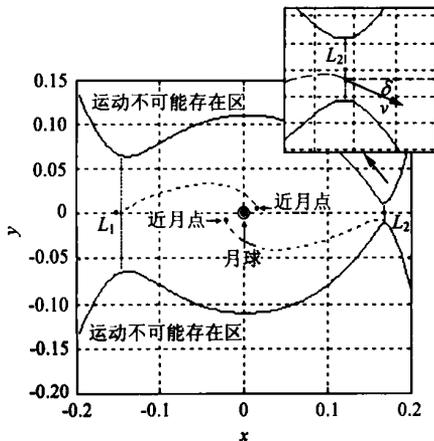


图 2 从起始平面出发的积分示意图  
Fig. 2 Integral map from the initial plane

### 2 庞加莱映射

庞加莱映射是一种经典的分析动力系统的方法,它使用  $n - 1$  阶的离散系统来代替  $n$  阶连续系统的流,它的定义保证了其极限集对应于相应流的极限集,其最大意义在于降低了所研究问题的阶数,使得问题变得相对简便和直观<sup>[7]</sup>,在微分动力系统领域得到了广泛的应用。虽然式(7)的解析解是一个尚未解决的世界性难题,但是通过使用庞加莱映射技术,可以得到一些有用的结论。

庞加莱映射的定义:设  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  中的向量场  $f(x)$  产生的流,  $\Sigma$  为  $\mathbb{R}^n$  的一条闭轨,过任意一点  $p \in \Sigma$  作截面  $\Sigma_p$ ,使得  $\Sigma_p$  不与  $f(x)$  相切,由于  $\tau(p) = p$ ,根据流的连续性,因此存在点  $p$  的某个领域  $U \subseteq \Sigma_p$ ,使得从任何点  $q \in U$  出发的轨线都能够再次回到  $\Sigma$  上。可以定义一个映射:  $P: U \rightarrow \Sigma$ ,使得  $P(q) = \tau(q)$ ,映射  $P$  被称为庞加莱映射。

本文不研究闭轨解的情况,因此构造两个截面  $\Sigma_1, \Sigma_2$ ,研究方程的解在相空间中流从  $\Sigma_1$  到  $\Sigma_2$  的庞加莱映射。

如图 2 所示,在三维情况下,选取 Jacobi 常数  $C = C_0$ ,将  $x = L_1$  (或  $x = L_2$ ) 平面作为  $\Sigma_1$ ,选取飞行器出发初始条件进行积分,

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= L_1 & \dot{x}_0 &= v_0 \cos \alpha \cos \beta \\ y_0 &= y_0 & \dot{y}_0 &= v_0 \cos \alpha \sin \beta \\ z_0 &= z_0 & \dot{z}_0 &= v_0 \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中:  $\alpha$  表示出发时速度与  $x$  轴的夹角;  $\beta$  表示速度与  $xy$  平面的夹角;  $v$  表示出发速度。 $(y_0, v_0)$  的取值方法为:特定的  $C_0$  在  $x_0 = L_1$  (或  $x_0 = L_2$ ) 对应着 1 个特定的  $(y_0^2 + z_0^2)_{\max}$ ,在满足上述条件范围内随机选取  $y_0, z_0$ ,通过可以得到  $v_0$ ,在  $[-\pi/2, \pi/2]$  范围内随机选取  $\alpha$ 。选取  $\dot{r} = 0, \dot{r} > 0$  为到达终止平面  $\Sigma_2$  的条件。对于二维情况,  $z_0 = 0, \dot{z}_0 = 0$ ,随机选取  $(y_0, v_0)$ ,计算至少  $100 \times 100$  个点;对于三维情况,随机选取  $(y_0, z_0, v_0)$ ,至少计算  $300 \times 300$  个点,得到如下结果(见图 3)。

图 3 显示出,从  $x = L_1$  点出发的轨道在以  $\dot{r} = 0, \dot{r} > 0$  为终止条件的截面上形成了 2 个集合,由于只有集合二的点在月球附近,所以对于月球逃逸问题,值得关注的是集合二。

图 4 和图 5 分别给出了从  $x = L_1$  和  $x = L_2$  出发的庞加莱映射,其中 3 幅图各自对应不同的  $C$  值。

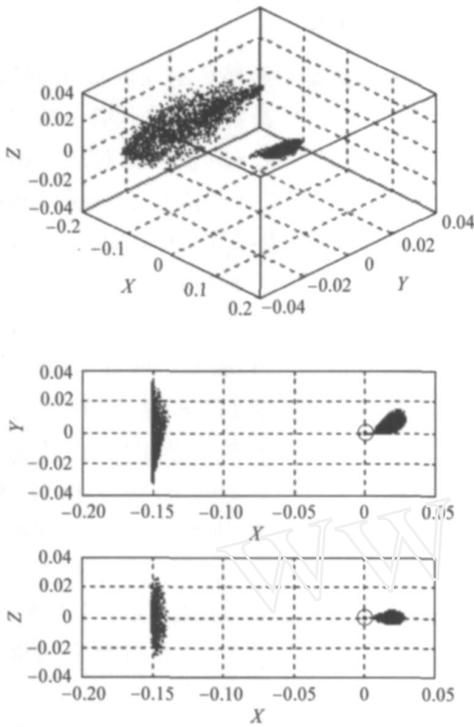


图3 庞加莱截面终止点集合分布图

Fig.3 Example of Poincaré map for  $C=2.22036$

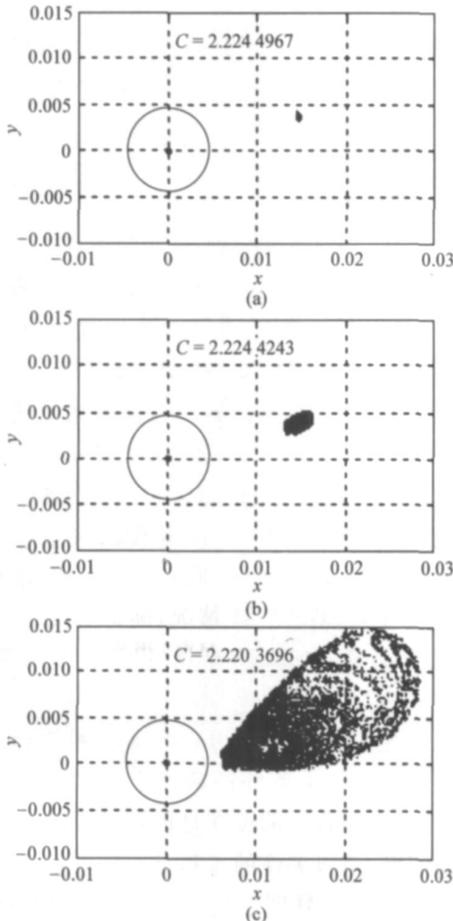


图4 从  $x=L_1$  出发的庞加莱映射

Fig.4 Series of Poincaré map start from  $x=L_1$

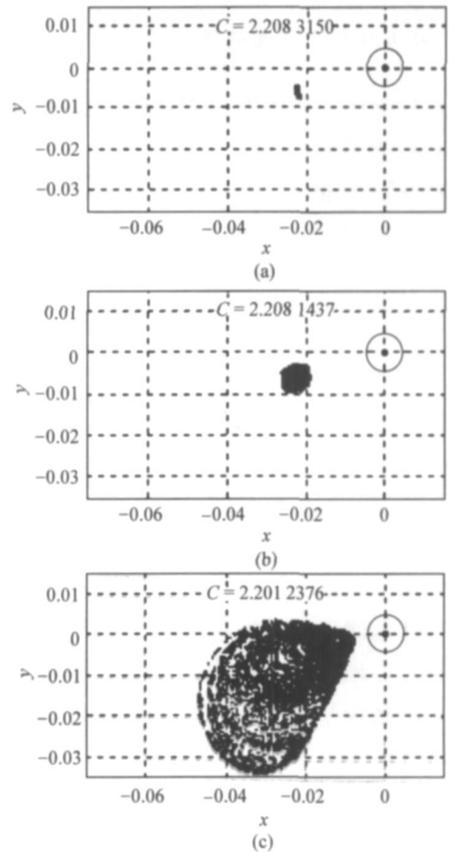


图5 从  $x=L_2$  出发的庞加莱映射

Fig.5 Series of Poincaré map start from  $x=L_2$

### 3 最小逃逸能量轨道

为了研究最小逃逸能量轨道,需要分析逃逸速度。对应半径为  $r$  的圆轨道的逃逸速度为

$$v = v - v_c \tag{14}$$

式中:  $v = \sqrt{2 - C}$ ;  $v_c = \sqrt{1/r - r_0}$ 。

因为  $\partial v / \partial C = -1/2v > 0$ 。可见  $C$  越小,逃逸所需能量就越大。另外,从图4-图5中可以发现:随着  $C$  值的增大,庞加莱映射的分布范围变小,最终收缩到相空间的一点。由此可知,庞加莱映射内部的点对应的  $v$  会随着  $C$  值的增大而减小(尽管  $C$  值增大会使得映射集合向相空间的一点收缩,但只要此时这一点仍然处于映射集合的内部),最极端的情况出现在该点处于映射集合的边缘。因此,从数值计算的角度,可以认为映射集合中对应的  $r_{max}$  和  $r_{min}$  点的  $v$  为该半径下的最小逃逸能量。

图6显示的是三维情况下,集合二的终止点对应的轨道近地点半径和轨道倾角之间的关系。对于不同的  $C$  值,近地点半径最小和最大的轨道对应的轨道倾角均为0,结合前面的分析可知:逃

逸能量最小的月球卫星初始轨道为月球白道面内的轨道。

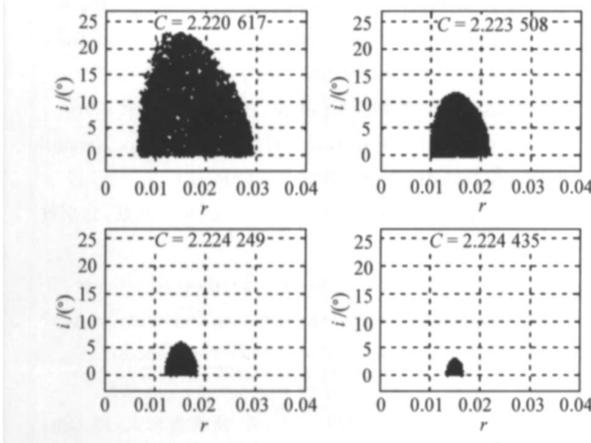


图 6 终止条件下轨道半径与轨道倾角分布示意图

Fig. 6 The relationship between orbital radio and orbital inclination at perigee

图 7 是通过计算不同的 Jacobi 常数  $C$  值所对应的庞加莱映射,而得到的飞行器近月点半径(即环绕月球轨道半径)与相应的最小逃逸能量的曲线,图中虚线段为轨道对应近月点距离小于月球到  $L_1$  点地距离。同时也可以得到终止条件下  $x, y$  平面上的轨道近月点辐角与近月点距离的曲线(见图 8)。

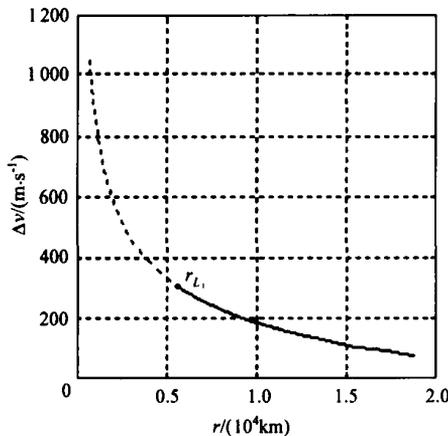


图 7 从  $x = L_1$  点出发的轨道近月点距离与最小逃逸能量关系图

Fig. 7 Relationship between perigee radii and optimal  $v$  based on  $x = L_1$

#### 4 算例及结果分析

基于 CR3BP 模型的分析与计算表明,绕飞  $L_1$  和  $L_2$  点附近的最小逃逸轨道能量存在一定的差别,但是差别不大。在航天任务中,如果仅从飞行器逃逸行星卫星引力的角度考虑,从  $L_1$  点附近绕飞需要更少的能量,但是由于实际的航天

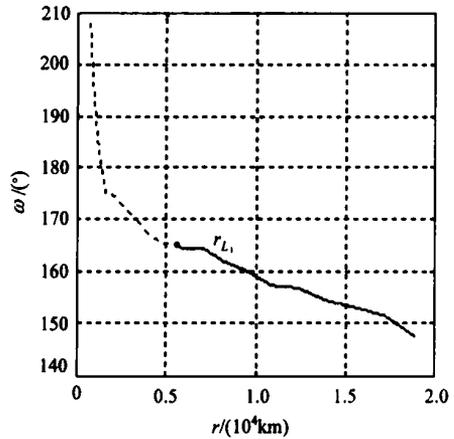


图 8 从  $x = L_1$  点出发的轨道近月点距离与和近月点辐角关系图

Fig. 8 Relationship between perigee radii and argument of perigee based on  $x = L_1$

任务不仅仅需要摆脱卫星引力,还要到达主行星或者其它的卫星,有时在  $L_2$  点附近绕飞对于飞往主行星或其它卫星可能节省更多的能量。工程中是选择绕飞  $L_1$  还是  $L_2$  点,需要对具体情况进行分析与计算,本文研究的重点在逃离行星卫星引力场的飞行过程,对一些次要的干扰因素并未考虑。

表 1 中列出了通过各种方法计算得到的从太阳系部分行星卫星表面出发的轨道的逃逸能量。从表 1 中可以看出,与开普勒轨道的计算结果比较,本文介绍的方法可以不同程度地节省能量。

表 1 从太阳系主要行星卫星表面逃逸所需能量表

Table 1 Optimal escaping velocities from the surface of some planetary satellites

行星	卫星	逃逸速度/( $m \cdot s^{-1}$ )			
		CR3BP 模型		Hill 三 体问题 模型	开普 勒轨道
		$L_1$ 点附 近绕飞	$L_2$ 点附 近绕飞		
地球	Moon	649. 2	653. 4	656. 8	695. 7
木星	Io	474. 8	478. 0	474. 8	748. 7
	Europa	443. 5	445. 2	451. 2	590. 9
	Ganymede	653. 4	654. 8	669. 5	802. 8
土星	Titan	686. 8	689. 6	697. 5	775. 6
海王星	Triton	336. 9	338. 9	370. 3	426. 3

#### 5 结束语

应用 CR3BP 模型来求解深空探测器行星卫星逃逸能量问题比 Hill 模型的计算过程更加复杂,但是其结果更加精确。通过使用庞加莱截面的方法,把一个复杂的高阶连续问题,转变成为一个相对低阶的离散问题。通过数值的方法,给出了一种计算行星卫星最小逃逸能量的方法,对深

空探测器的轨道设计具有一定的意义。本文以地-月系统为例,分别给出了绕飞  $L_1$  点和  $L_2$  点的行星卫星的最小逃逸能量,并且给出了太阳系内一些行星卫星的对应  $L_1$  点和  $L_2$  点的最小逃逸能量。本文的工作可以看作 Villac 论文中相应工作的改进与扩展。

需要指出的是,一个完整的低能轨道,要根据飞行任务作通盘考虑,不仅仅是飞越特定行星及其卫星的能量,而且要考虑其后的轨道所要求的能量,既飞越三体问题中 2 个直线平动点之后继续飞往主行星或其它行星的轨道能量。如何根据具体的任务设计完整的低能轨道,是需要进一步研究的内容。

### 参 考 文 献

- [1] Belbruno E A, Carrico J P. Calculation of weak stability boundary ballistic lunar transfer trajectories [C]// AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, 2000.
- [2] Belbruno E A. Low energy trajectories for space travel and stability transition regions [C]// Proceedings of IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control, Oxford: IFAC Publ., Elsevier Science Ltd, 2000: 7-12.
- [3] Yamakawa H, Kawauchi J, Ishii N, et al. On earth-moon transfer trajectory with gravitational capture [C]// Proceedings AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Paper No. AAS 93-633, 1993.
- [4] Koon W S, Lo M W, Marsden J E, et al. Low energy

transfer to the moon [J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2001, 81(1): 63-73.

- [5] Villac B F, Scheeres D J. Escaping trajectories in the Hill three-body problem and applications [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 26(2): 224-232.
- [6] 刘林. 航天器轨道理论 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2000. Liu L. Orbit theory of spacecraft [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2000. (in Chinese)
- [7] 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分叉 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989. Lu Q S. Qualitative methods and divergent of ordinary differential equation [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1989. (in Chinese)

作者简介:



何 巍(1979 - ) 男,湖南衡东人,博士生,主要研究方向:飞行器总体设计,航天器轨道动力学。E-mail: hewei@buaa.edu.cn



徐世杰(1951 - ) 男,吉林人,北京航空航天大学教授,博士生导师。主要研究方向:航天器动力学与控制,鲁棒控制理论及其应用。E-mail: starsjxu@yahoo.com.cn

(责任编辑:刘振国)